



Sharif University of Technology

<https://sjie.journals.sharif.edu/>



Research Article

Developing and Assessing New Models for the Free Patrol Vehicle Routing Problem

Hamed Manshadian, Mohsen Sadegh Amalnick * and Seyed Ali Torabi

School of Industrial Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

* corresponding author: (amalnick@ut.ac.ir)

Article Info

Article history:

Received: 12 May 2024

Revised: 22 September 2024

Accepted: 8 October 2024

Keywords:

Vehicle routing problem,
free patrolling,
mixed integer linear
programming,
continuous-time mathematical
models,
discrete-time mathematical
models.

Abstract

Vehicle routing problems are a category of complex mathematical problems in the field of transportation and supply chain management, and a wide variety of these problems have been introduced. One category within this field involves the collaboration of two different types of fleets in a network, where in many cases, one of the fleets must patrol the graph as a support fleet and is not subject to the same constraints as the other fleet, such as only visiting a vertex or an edge once. Examples include refueling fleets or trucks providing services to drones, where these fleets patrol the network so that the other fleet can use their services as needed.

In this paper, the problem of the free movement of such fleets on a graph is examined as a free patrol problem, which can be used as a sub-problem in the modeling and solving of many routing problems. To this end, the problem is modeled as a mixed-integer linear programming (MILP) problem in both discrete and continuous time spaces. Generally, it is expected that the model in continuous time space will exhibit lower computational complexity, but since modeling in continuous time requires changes to the graph, leading to an increase in the number of vertices and edges, its behavior needs to be more thoroughly investigated. On the other hand, another challenge in analyzing this problem is that the objective of the free patrol sub-problem depends on the main problem, as without the main problem, the free patrol problem may lose its objective, with a fleet patrolling the graph within a designated time. Therefore, to decouple and make the free patrol independent of the main problem, five different objective functions have been introduced for each model, covering a wider range of comparisons, leading to ten models in total. Subsequently, all ten models were solved exactly using randomly generated data for ten different graphs. Finally, the behavior of the models was evaluated and compared from various perspectives. The numerical results demonstrate the superior performance of the continuous time model over the discrete time model.

Funding

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

To Cite this article:

Manshadian, H., Sadegh Amalnick, M. and Torabi, S.A. 2025. Developing and assessing new models for the free patrol vehicle routing problem, Sharif Industrial Engineering and Management Journal, 41(1), 98-108.

<https://doi.org/10.24200/sj.2024.64520.2405>



توسعه و ارزیابی مدل‌های جدید برای مسئله گشت آزاد وسائط نقلیه

حامد منشادیان، محسن صادق عمل نیک* و سیدعلی ترابی

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

*نویسنده مسئول (amalnick@ut.ac.ir)

چکیده	اطلاعات مقاله
در نوشتار حاضر، مسئله حرکت آزادانه ناوگان کمکی، نظیر ناوگان سرویس‌دهنده به پهباد به‌عنوان یک مسئله گشت آزاد بررسی شده است، که می‌تواند به‌عنوان یک زیرمسئله در مدل‌سازی و حل بسیاری از مسائل مسیریابی استفاده شود. بدین منظور، مسئله به‌صورت برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط در حالت زمان‌های گسسته و پیوسته مدل‌سازی شده است. معمولاً انتظار می‌رود مدل در فضای زمان پیوسته، پیچیدگی کمتری از خود نشان دهد، اما از آنجایی که مدل‌سازی در این حالت نیازمند تغییراتی در گراف است، که منجر به افزایش تعداد رئوس و یال‌های آن می‌شود، رفتار آن باید به‌صورت دقیق‌تری بررسی شود. در نتیجه، برای پوشش ابعاد وسیع‌تری از مدل، ۵ تابع هدف برای هر مدل معرفی شده و سپس هر یک از ۱۰ مدل به‌دست‌آمده برای ۱۰ گراف تصادفی دقیقاً تحلیل و درنهایت، رفتار مدل‌ها از جوانب گوناگون ارزیابی و مقایسه شده است. نتایج حل نشان داده‌اند که مدل زمان پیوسته، عملکرد بهتری از خود نشان داده است.	تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۲۳ تاریخ اصلاحیه: ۱۴۰۳/۰۷/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۷
	واژگان کلیدی: مسیریابی وسیله نقلیه، گشت آزاد، برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط، مدل‌سازی ریاضی در فضای گسسته، مدل‌سازی ریاضی در فضای پیوسته.

۱. مقدمه

شهری حرکت کند و محدودیت برای تعداد دفعه‌های ملاقات یک یال و یا یک رأس وجود ندارد. در نتیجه، یک وسیله نقلیه می‌تواند به تعداد دلخواه یک رأس را ملاقات و همچنین به مقدار دلخواه در آن رأس توقف کند. این فرض این امکان را به مسئله می‌دهد که یک وسیله نقلیه گشت آزاد را در یک گراف تجربه کند و باعث می‌شود بسیاری از محدودیت‌های سایر مسائل حمل‌ونقل، مانند: محدودیت در ملاقات یک رأس، محدودیت در توقف یک رأس، و یا محدودیت در ملاقات یک یال در نظر گرفته نشود. این مسئله می‌تواند یک زیرمسئله کمکی برای بسیاری از مسائل مسیریابی مخصوصاً مسائل مسیریابی با درنظرگیری هماهنگی بین وسائط نقلیه باشد؛ و همچنین می‌تواند به صورت مجزا مدل‌سازی ریاضی شود و در مسائل مشابه استفاده شود. اما بسته به نحوه مدل‌سازی، مسئله اصلی که ممکن است به‌صورت زمان‌های گسسته و یا پیوسته باشد، مدل گشت آزاد می‌تواند رفتارهای متفاوتی از خود نشان دهد. به همین دلیل در نوشتار حاضر سعی شده است برای هر دو حالت، مدل ریاضی مجزا ارائه شود. در مدل ریاضی زمان گسسته، نیازی به تغییر گراف اولیه نیست و زمان پایان عملیات در تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای مسئله، مستقیماً تأثیرگذار است؛ اما در مدل زمان پیوسته، در گراف اولیه باید تغییراتی روی دهد

مسئله مسیریابی وسائط نقلیه، معمولاً جزء مسائل پیچیده برای حل در شاخه پژوهش در عملیات شناخته می‌شود. پژوهشگران تاکنون شاخه‌های متنوعی از مسائل مذکور را معرفی کرده و با الگوریتم‌های گوناگونی سعی در ارائه روش‌های حل متفاوتی برای این‌گونه مسائل داشته‌اند؛ که یکی از آن‌ها، که به‌تازگی توسط منشادیان و همکاران (۲۰۲۳)^[۱] معرفی شده است، مسئله مسیریابی وسیله نقلیه گشت آزاد است، که به‌منظور همکاری پهبادها و وسائط نقلیه برای ضدغونی کردن مناطق شهری در شرایط بحران تعریف شده است. مسئله گشت آزاد در مواردی که دو ناوگان با کاربری متفاوت در مسئله وجود داشته باشند، مانند ناوگان‌هایی که به‌منظور پشتیبانی ناوگان دیگر در شبکه حرکت می‌کنند، مسئله‌ای کاربردی محسوب می‌شود. در صورتی که یک ناوگان به‌عنوان خدمت‌دهنده عمل کند، مدل‌سازی مسئله معمولاً با محدودیت‌هایی مانند تعداد دفعه‌های عبور آن ناوگان، بیشینه‌ی یک بار از یک رأس یا یال مواجه است، اما ناوگان دیگر که با هدف خدمت‌رسانی به ناوگان اولی فعالیت می‌کند، می‌تواند در گراف به‌صورت آزادانه گشت بزند. در نتیجه، نویسندگان فرض کرده‌اند که یک وسیله نقلیه می‌تواند آزادانه در منطقه‌ی

استناد به این مقاله:

منشادیان، حامد، صادق عمل نیک، محسن و ترابی، سیدعلی، ۱۴۰۴. توسعه و ارزیابی مدل‌های جدید برای مسئله گشت آزاد وسائط نقلیه. مهندسی صنایع و مدیریت شریف، ۴۱(۱)، صص. ۹۸-۱۰۸. <https://doi.org/10.24200/j65.2024.64520.2405>



مسیریابی رأس را مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد تشکیل می‌دهد؛ که در آن، یک فروشنده از شهر مبدأ شروع به حرکت و مجموعه‌ای شامل چند شهر را ملاقات می‌کند. برای فهرستی از شهرها، کوتاه‌ترین مسیر ممکن را که یک بار در هر شهر می‌گذرد و به شهر مبدأ باز می‌گردد، تعیین می‌کند. چالش مسئله این است که فروشنده‌ی دوره‌گرد می‌خواهد مسافت کل طی شده را به میزان کمینه برساند. می‌توان مواردی نظیر سرویس‌های حمل‌ونقل، توزیع و تحویل کالا، برنامه‌ریزی، و لجستیک را به‌عنوان کاربردهای مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد نام برد. تعداد جواب‌هایی که برای حل مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد وجود دارد، برابر با تعداد دوره‌های هامیلتونی است، که در یک گراف کامل وجود دارد.^[۲] مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد با روش‌های گوناگون، مانند: شبکه‌ی عصبی،^[۳] الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده،^[۴] الگوریتم ژنتیک،^[۵] بهینه‌سازی ازدحام ذرات،^[۶] الگوریتم کلونی مورچگان،^[۷] و البته بسیاری روش‌های فراابتکاری دیگر و نیز ترکیبی از روش‌های اخیر حل شده است.

مسائل مسیریابی یال مربوط به تعیین مسیرهایی با کمینه‌ی هزینه‌ی پیمایش یال‌هایی از یک گراف با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی است. مسائل مذکور عملاً کاربردهای فراوانی، نظیر: تعمیرات و نگهداری جاده‌ها، جمع‌آوری زباله، آبیاری درختان کنار خیابان‌ها، تحویل مرسوله‌های پستی، مسیریابی اتوبوس مدارس، خواند و اندازه‌گیری مترآژ، سم‌پاشی و ضدعفونی کردن مسیرها، بازرسی مرزها، بازرسی کابل‌های برق، بازرسی لوله‌ها، گشت پلیس، تمیزکردن مسیرها، کنترل ترافیک، مسیریابی گشت پلیس، ماسه‌ی نم‌پاشی بر روی مسیرهای یخ‌زده، و برف‌روبی جاده‌ها، و ... دارد. برای مشاهده‌ی جزئیات مربوط به کاربردهای مسائل مسیریابی می‌توان به نوشتارهای درور^۱ (۲۰۱۲)، ایسلت^۲ (۱۹۹۵)، اسد و گلدن^۳ (۱۹۹۵)، و یو^۴ و همکاران (۲۰۱۹)،^[۱۱] مراجعه کرد. پایه‌ی مسائل مسیریابی یال را مسائل پستیچی چینی و پستیچی روستایی تشکیل می‌دهد. در مسئله‌ی اخیر، یک پستیچی می‌خواهد تمامی نامه‌ها را به مقصد آن‌ها برساند؛ در حالی که مسافت طی شده کمینه باشد و بعد از پایان کار به نقطه‌ی آغاز برگردد. در این کار، باید هر خیابان را دست‌کم یک بار طی کند و اگر مجبور شود که از مسیری دو بار عبور کند، باید مسیری با کوتاه‌ترین مسافت را انتخاب کند. مسئله‌ی پستیچی چینی به مسائل: پستیچی چینی غیر جهت‌دار،^[۱۲] پستیچی چینی جهت‌دار، پستیچی چینی مختلط،^[۱۳] پستیچی چینی بادی،^[۱۴] و پستیچی چینی سلسله‌مراتبی،^[۱۵] دسته‌بندی می‌شود.

مسئله‌ی پستیچی روستایی، که برای اولین بار توسط اورلوف^۵ (۱۹۷۴)،^[۱۶] مطرح شد و NP-Hard بودن آن بعداً توسط لنسترا و کان^۶ (۱۹۷۴)،^[۱۷] اثبات شد، نیز شباهت زیادی به مسئله‌ی پستیچی چینی دارد، با این تفاوت که پیمایش باید بر زیرمجموعه‌ای از یال‌ها و کمان‌های گراف انجام پذیرد. مسئله‌ی مذکور، در یک تقسیم‌بندی کلی به مسائل: پستیچی روستایی غیر جهت‌دار،^[۱۸] پستیچی روستایی جهت‌دار،^[۱۹] پستیچی روستایی مختلط،^[۲۰] و پستیچی روستایی ظرفیت‌دار،^[۲۱] دسته‌بندی می‌شود.

علاوه‌بر دسته‌بندی مسائل مسیریابی وسیله در دو دسته‌ی مسیریابی رأس و مسیریابی یال، دسته‌بندی‌های دیگری نیز در ادبیات یافت می‌شود. پژوهشگران علاقه‌مند می‌توانند به نوشتارهای مروری این گروه، مانند الشائر و آواد^۷

و تعدادی یال و رأس به آن گراف اضافه شود و زمان پایان عملیات در تعداد متغیرها و محدودیت‌های مسئله به‌صورت غیرمستقیم و با افزایش تعداد یال و رأس گراف تأثیرگذار است. علاوه‌بر تعداد محدودیت‌ها و متغیرها، عوامل دیگری نظیر تابع هدف مسئله و زیرمسئله‌های دیگر موجود در مسئله‌ی اصلی نیز در زمان و سرعت حل تأثیرگذار باشند. به همین دلیل، مدل‌های ارائه‌شده، با توابع هدف و نمونه‌های مختلفی باید آزمون شوند که بتوانند از لحاظ عملکردی مقایسه شوند.

از موارد استفاده‌ی مسئله‌ی پژوهش‌شده می‌توان به مسائلی، همچون: همکاری پهپادها و کامیون‌ها، همکاری کامیون و تریلر، ایستگاه‌های متحرک تعویض باتری در مسائل مسیریابی و یا زنجیره تأمین سبز، ایستگاه‌های متحرک سوخت‌رسانی، گشت پلیس امنیت، گشت آمبولانس، نقشه‌برداری از معابر شهری برای کشف تغییرات ایجادشده و کنترل ترافیک شهری اشاره کرد.

تاکنون مدل‌های گوناگونی برای مسائل مسیریابی با مفروضات متنوعی معرفی شده‌اند، که با توجه به شرایط مسئله، از نوع خطی و یا غیرخطی و با متغیرهایی در فضای گسسته، پیوسته، و یا ترکیبی از آن‌ها بوده‌اند. در مسائل هماهنگی بین پهپادها و وسائط نقلیه، فرض آزادبودن وسیله‌ی نقلیه‌ی زمینی در گراف می‌تواند فرض سودمندی باشد و در عمل استفاده شود. لذ در نوشتار حاضر سعی شده است تا مسئله‌ی مذکور به صورت موشکافانه‌تر بحث و بررسی شود. همچنین، برای آن، توابع هدف گوناگون، و همچنین مدل‌های ریاضی گوناگون در فضاهای گسسته و پیوسته معرفی شود.

۲. مروری بر ادبیات

مسئله‌ی مسیریابی وسیله‌ی نقلیه، یک مسئله‌ی بهینه‌سازی ترکیبی و معمولاً شاخه‌ای از حوزه‌های مطالعاتی حمل‌ونقل و زنجیره‌ی تأمین را در بر می‌گیرد. تمرکز مسئله‌ی مسیریابی وسیله‌ی نقلیه بر روی بهینه‌سازی مجموعه‌ای از مسیرها برای ناوگانی از وسائط نقلیه‌ای است که قصد خدمت‌رسانی به مجموعه‌ای از مشتریان را دارند. معمولاً هدف از مسئله‌ی مسیریابی وسیله‌ی نقلیه، کمینه‌سازی هزینه‌ی مسیرهای پیمایش‌شده است. ادبیات بسیار وسیعی در حوزه‌ی مسیریابی وجود دارد و پژوهشگران بسیار زیادی در بخش‌های گوناگون حوزه‌ی مذکور، مطالعاتی انجام داده‌اند. جمع‌آوری تمام ادبیات انجام‌شده در حوزه‌ی مسیریابی در این مختصر ممکن نبوده است، لیکن سعی شده است ابعاد اصلی مرتبط با مسئله‌ی پژوهش حاضر پوشش داده شوند.

مسائل مسیریابی را می‌توان به‌صورت کلی به دو دسته‌ی مسائل مسیریابی رأس و مسائل مسیریابی یال یا کمان تقسیم‌بندی کرد. در صورتی که در مسئله‌ی مسیریابی، هدف اصلی رساندن خدمت یا ملاقات تمامی رئوس یا زیرمجموعه‌ای از رئوس یک گراف باشد، آن مسئله، مسئله‌ی مسیریابی رأس نامیده می‌شود. کاربردهای گوناگونی از این دسته مسائل مسیریابی می‌توان نام برد؛ مانند: بازرسی از مناطق خاص، تحویل کالا به سوپرمارکت‌ها، پخش روزنامه، جمع‌آوری مواد فاسدشده از فروشگاه‌ها، و ... اما بیشترین کاربرد مشاهده‌شده در ادبیات مسیریابی رأس، مربوط به حوزه‌ی ارسال و تحویل کالا است. پایه‌ی اصلی مسائل

⁵ Orloff

⁶ Lenstra & Kan

⁷ Elshaer

¹ Dror

² Eiselt

³ Assad & Golden

⁴ Yu

در شرایط عملی و مخصوصاً در مسائل همکاری وسائط نقلیه می‌تواند بسیار کاربردی باشد. محدودیتی که یک مسئله‌ی VRP و یا TSP برای حرکت وسیله‌ی نقلیه قائل است؛ این است که وسیله‌ی نقلیه فقط می‌تواند هر مشتری را یک بار ویزیت کند. ولی در مسئله‌ی ما فرض بر آن است که وسیله‌ی نقلیه می‌تواند به‌صورت آزادانه در گراف حرکت کند. یعنی یک رأس را چند بار پیمایش کند و در هر رأس به مقدار دلخواه متوقف شود.

یکی از نزدیک‌ترین مسائل از لحاظ مفروضات به مسئله‌ی نوشتار حاضر، مسئله‌ی Multi Trip VRP است، که برای اولین بار توسط فلیشمن^{۱۳} (۱۹۹۰)، مطرح شده است. در مسئله‌ی VRP در یک دوره‌ی تناوب برنامه‌ریزی، فقط یک بار از یک ناوگان استفاده شده است. ولی در MT-VRP یک ناوگان می‌تواند در یک دوره‌ی تناوب برنامه‌ریزی، چند سفر را داشته باشد. به این ترتیب که ناوگان حرکت خود را از دیو شروع می‌کند و پس از پیمایش یک سفر، به دیو باز می‌گردد و می‌تواند سفر جدیدی را آغاز کند. در نظر گرفتن این شرط، مسئله را به دنیای واقعی، نزدیک‌تر می‌کند و چالش‌های جدیدی را برای حل پیش روی پژوهشگران می‌گذارد. با توجه به فرضیات مسئله‌ی عنوان شده، نزدیک‌ترین پژوهش‌های موجود در ادبیات مربوط به MT-VRP است. در صورتی که این مسئله برای مدل‌سازی مسئله‌ی همکاری کامیون و پهباد استفاده شود، و فرض بر این باشد که نقش کامیون در مدل فقط سرویس‌رسانی به پهباد باشد، مدل MT-VRP چند چالش اصلی خواهد داشت؛ که یکی از آن‌ها، تعریف بیشینه‌ی تعداد زیردوره‌های ممکن برای کامیون خواهد بود. چالش دیگر این است که کامیون پس از هر دور (یا زیردور) سرویس‌دهی، باید مجدداً به دیو باز گردد، که مسئله را از مفروضات واقعی آن دور می‌کند.

مسئله‌ی FP-VRP می‌تواند یک مسئله‌ی بدون هدف باشد و برای هماهنگی بهتر چند ناوگان استفاده شود. به عنوان مثال، در مسئله‌ی هماهنگی کامیون و پهباد، کامیون‌ها بر روی خیابان‌های شهر آزادانه حرکت می‌کنند و در مواقع لزوم به پهبادها سرویس می‌دهند. بسته به مدلی که تعریف می‌شود، می‌توان مسئله‌ی اخیر را با اهداف خاص و یا بدون هدف و با ترکیب مسائل دیگر مدل‌سازی کرد.

گراف غیرجهت‌دار متصل $G = \{V, E\}$ با ماتریس مجاورت a در نظر گرفته شده است، که یال‌های آن نشانگر خیابان‌ها و رئوس آن، یعنی $V = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ، نماینده‌ی نقاط تقاطع خیابان‌هاست. با داشتن یک رأس موهومی (v) ، گراف تشکیل می‌شود. حال رأس شروع v به گراف اضافه و گراف $\hat{G} = (\hat{V} = V \cup v_0, \hat{E} = E \cup e_{v_0, v_1})$ تشکیل می‌شود. شایان ذکر است این رأس فقط دو بار و در شروع و پایان مأموریت توسط وسائط نقلیه ویزیت می‌شود. برای مدل‌سازی محدودیت‌های مسئله، ابتدا مجموعه‌ها، پارامترها، و متغیرها تعریف شده‌اند.

– مجموعه‌ها

Adj_i : مجموعه‌ی رئوس مجاور رأس i ؛

$\hat{T}$: مجموعه‌ی شامل اعداد صحیح مثبت از صفر تا زمان مجاز برای انجام عملیات پهباد $\{\hat{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ ؛

(۲۰۲۰)،^[۲۲] کنستانتاکوپولوس^۸ و همکاران (۲۰۲۰)،^[۲۳] و مقدانی^۹ و همکاران (۲۰۲۱)،^[۲۴] رجوع کنند. همچنین برای درک بهتر کاربردهای مدل مطرح‌شده برای مسئله‌ی گشت آزاد، خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به نوشتارهای مسائل همکاری وسائط نقلیه مانند: رئیسی و همکاران (۲۰۲۰)،^[۲۵] وانگ و شیو^{۱۰} (۲۰۱۹)،^[۲۶] چونگ^{۱۱} و همکاران (۲۰۲۰)،^[۲۷] و درکسل^{۱۲} (۲۰۱۲)،^[۲۸] رجوع کنند.

با بررسی ادبیات موجود در حوزه‌ی مسیریابی وسائط نقلیه و همچنین حوزه‌ی هماهنگی در مسیریابی وسائط نقلیه، مشخص می‌شود که روش‌های گوناگونی برای مدل‌سازی و حل آن‌ها استفاده شده است و از طرفی دیگر، روش مدل‌سازی یک مسئله در زمان و روش حل آن می‌تواند بسیار مؤثر باشد. علاوه بر آن، در بسیاری از مواقع شکستن یک مسئله به مسائل کوچک‌تر نیز می‌تواند در استفاده از روش‌های دقیق، ابتکاری، و فراابتکاری کمک شایانی کند. روش‌هایی مانند: تجزیه‌ی بندرز، الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری ترکیبی می‌توانند سرعت حل را افزایش دهند. در نتیجه، در بسیاری از مواقع تفکیک یا تجزیه‌ی مسائل به مسائل کوچک‌تر، گزینه‌های بیشتری را برای حل و احتمالاً بالاتر بردن سرعت و دقت آن پیش روی یک پژوهشگر خواهد گذاشت. به عنوان مثال، تفکیک و تجزیه‌ی مسئله به چند مسئله‌ی کوچک‌تر، می‌تواند این امکان را به پژوهشگر بدهد که یکی از مسائل را با یک الگوریتم فراابتکاری و مسئله‌ی دیگر را با الگوریتم دیگر حل کند و در هر گام نتایج آن‌ها را به صورت هم‌زمان مقایسه و آزمون کند. برای مسائل هماهنگی در مسیریابی وسائط نقلیه، مسئله‌ی گشت آزاد برای نخستین بار توسط منشادیان و همکاران (۲۰۲۳)^[۱۱] معرفی شده است، که در حل مسئله‌ی همکاری پهباد و کامیون و به منظور مدل‌سازی بخشی از مسئله، یعنی گشت آزاد کامیون در گراف از آن استفاده شده و عملکرد خوبی را در مدل‌سازی و حل آن به جا گذاشته است. اما بررسی عمیق مدل گشت آزاد و روش‌های گوناگون مدل‌سازی آن یعنی مدل‌سازی‌های پیوسته و گسسته، تاکنون در ادبیات بحث و بررسی نشده است. همچنین کارایی مدل‌های گوناگون به‌صورت مجزا در مورد توابع هدف محتمل تاکنون تحلیل نشده است. در پژوهش حاضر، سعی شده است که این شکاف مطالعاتی بررسی شود و مسئله‌ی گشت آزاد به صورت عمیق‌تر از لحاظ نحوه‌ی مدل‌سازی و همچنین با توابع هدف گوناگون مقایسه و تحلیل شود.

مسئله‌ای که در نوشتار حاضر بررسی شده است، می‌تواند در برخی از مسائل حمل‌ونقل استفاده شود. زیرا در آن فرض شده است که وسیله‌ی نقلیه می‌تواند آزادانه در گراف حرکت کند و در رئوس آن به مقدار دلخواه متوقف شود. در نتیجه، در صورتی که شرایط دیگری، مانند: پنجره‌ی زمانی، اجبار در پوشش یال، اجبار در ملاقات رأس به تعداد دفعات معلوم، و ... می‌تواند به عنوان شرایط کمکی در مدل تعریف شود. از آنجایی که مسائل مسیریابی بسته به شرایط مسئله به دو صورت مسائل زمان‌های گسسته و پیوسته مدل‌سازی می‌شوند، مسئله‌ی گشت آزاد بررسی‌شده در نوشتار حاضر نیز به هر دو صورت زمان‌های گسسته و پیوسته، مدل‌سازی و با هم مقایسه شده‌اند. در قسمت بعد، تعریف مسئله به‌صورت جامع و با جزئیات بحث و بررسی شده است.

۳. تعریف مسئله و مدل‌سازی

مسئله‌ای که بر طبق مفروضات مطرح‌شده در نوشتار حاضر بررسی شده است،

¹¹ Chung

¹² Drexl

¹³ Fleischmann

⁸ Konstantakopoulos

⁹ Moghdani

¹⁰ Wang & Sheu

$$\sum_{t \in T^+} \chi_{(1, v_0)}^{f(t-RT_{(1, v_0)}^f)} = 1 \quad \forall f \in F \quad (3)$$

$$\sum_{i \in \hat{T}} \sum_{(i, j) \in R} \chi_{(i, j)}^{ft} = \sum_{i \in \hat{T}} \sum_{(j, k) \in R} \chi_{(j, k)}^{ft} \quad \forall f \in F, j \in \hat{V} \quad (4)$$

$$\sum_{r \in R} \chi_r^{ft} + \sum_{i \in V} \omega_i^{ft} \leq 1 \quad \forall f \in F, t \in \hat{T} \quad (5)$$

$$\sum_{(j, k) \in R} \chi_{(j, k)}^{f(t+RT_{(i, j)}^f)} + \omega_j^{f(t+RT_{(i, j)}^f)} \geq \chi_{(i, j)}^{ft} \quad \forall f \in F, (i, j) \in R, \\ \forall t \in \hat{T} \mid t + RT_{(i, j)}^f \leq T \quad (6)$$

$$\sum_{(i, j) \in R} \chi_{(i, j)}^{f(t-RT_{(j, k)}^f)} + \omega_j^{f(t-RT_{(j, k)}^f)} \geq \chi_{(j, k)}^{ft} \quad \forall f \in F, (j, k) \in R, \\ \forall t \in \hat{T} \mid t + RT_{(j, k)}^f > T \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{t+1 \leq t \leq t+RT_r^f \\ i \in \hat{T}}} \left(\sum_{i \in V} \omega_i^{ft} + \sum_{r \in R} \chi_r^{ft} \right) \leq M(1 - \chi_r^{ft}) \\ \forall f \in F, r \in R, t \in \hat{T} \quad (8)$$

$$\omega_i^{f(t+1)} + \sum_{(i, j) \in R} \chi_{(i, j)}^{f(t+1)} \geq \omega_i^{ft} \quad \forall f \in F, r \in R, t \in \hat{T} \quad (9)$$

$$\chi_r^{ft}, \omega_i^{ft} \in \{0, 1\} \quad \forall r \in R, \forall f \in F, \forall t \in \hat{T}, i \in \hat{V} \quad (10)$$

۲.۳. محدودیت‌های مدل زمان پیوسته

به‌منظور مدل‌سازی مسئله‌ی گشت آزاد به‌صورت زمان پیوسته، تغییراتی در گراف اصلی ایجاد شده است. بدین صورت که هر رأس به اندازه‌ی p رأس با مشخصات موقعیتی همان رأس تکرار می‌شود. در نتیجه، گراف $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ به‌صورت $G' = (V', E')$ تغییر خواهد کرد (روابط ۱۱ الی ۱۳) (بدیهی است که $P_{v_i} = 1$):

$$|V'| = \sum_{i \in \hat{V}} P_i \quad (11)$$

$$V' = \left\{ v_i^{p_i} \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq p_i \leq \text{Max}P_i \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$E' = \left\{ e_{i^p j^q} \mid \begin{array}{l} i, j \in V, a_{ij} = 1, \\ 1 \leq p_i \leq \text{Max}P_i, \\ 1 \leq q_j \leq \text{Max}P_j \end{array} \right\} \quad (13)$$

که در آن‌ها، V_i^p برابر با تکرار p ام رأس i است. همچنین در صورتی که مقدار ماتریس مجاورت برابر ۱ باشد، مقدار ماتریس مجاورت تمامی نقاط تکرار آن دو رأس نیز ۱ است (رابطه‌ی ۱۴):

$$\forall i, j \in \hat{V}, \quad \forall p \in P_i, \quad \forall q \in P_j \quad a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{v_i^p v_j^q} = 1 \quad (14)$$

منشادیان و همکاران (۲۰۲۳)^[۱] ثابت کرده‌اند که بیشینه‌ی تعداد تکرار هر رأس $i \in V$ از رابطه‌ی ۱۵ تبعیت می‌کند.

T^- : مجموعه‌ی شامل اعداد صحیح مثبت از ۰ تا ۱ واحد قبل از زمان مجاز برای انجام عملیات پهپاد $T^- = \{0, \dots, T-1\}$ ؛
 T^+ : مجموعه‌ی شامل اعداد صحیح مثبت از ۱ تا زمان مجاز برای انجام عملیات پهپاد $T^+ = \{1, \dots, T\}$ ؛
 F : مجموعه‌ی کل وسائط نقلیه.

- پارامترها

RT_r^f : زمان طی کردن رأس i تا j توسط ایستگاه متحرک f ؛
 $RT_r^f = \frac{Dis_r}{SPF^f}$, $\forall r \in R, f \in F$ ؛
 $SP_{(i, j)}$: کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس i و j ؛
 $Dis_{(i, j)}$: طول یال قرارگرفته بین دو رأس i و j ؛
 SPF^f : میانگین سرعت وسیله‌ی نقلیه‌ی f در واحد زمان؛
 T : بیشینه‌ی زمان مجاز کل عملیات؛
 M : عدد بزرگ.

- متغیرها

χ_r^{ft} : اگر وسیله‌ی نقلیه‌ی f در زمان t مسیر r را شروع به پیمایش کند، ۱ و در غیر این صورت ۰؛
 ω_i^{ft} : اگر وسیله‌ی نقلیه‌ی f در زمان t در رأس i مشغول استراحت باشد، ۱ و در غیر این صورت صفر.

۱.۳. محدودیت‌های مدل زمان گسسته

مجموعه‌ی محدودیت‌های ۱ و ۲ بیان می‌کنند که هر وسیله‌ی نقلیه در زمان شروع باید رأس موهومی را ترک کند و فقط یک بار می‌تواند این کار را انجام دهد. مجموعه‌ی محدودیت ۳ بیان می‌کند که هر وسیله‌ی نقلیه باید در زمان پایان عملیات در رأس موهومی باشد. مجموعه‌ی محدودیت ۴ بیان می‌کند که تعداد ورودی‌های یک رأس باید برابر با تعداد خروجی‌های آن رأس باشد. مجموعه‌ی محدودیت ۵ بیان می‌کند که در زمان، یک وسیله‌ی نقلیه می‌تواند مشغول توقف باشد و یا حرکت خود را شروع کرده باشد. مجموعه‌ی محدودیت‌های ۶ و ۷ بیان می‌کنند در صورتی که یک وسیله‌ی نقلیه حرکت خود را شروع کند، زمان رسیدن به مقصد باید توقف داشته باشد و یا حرکت بعدی خود را شروع کند. همچنین مجموعه‌ی محدودیت اخیر بیان می‌کند در صورتی که یک وسیله‌ی نقلیه، حرکت خود را شروع کند، در زمان قبل از رسیدن به رأس بعدی، باید در رأس قبلی متوقف باشد و یا حرکت خود را شروع کرده باشد. مجموعه‌ی محدودیت ۸ بیان می‌کند در صورتی که یک وسیله‌ی نقلیه حرکت خود را شروع کرده باشد، تا زمان رسیدن به رأس بعدی، نمی‌تواند در حالت توقف باشد و یا حرکت جدیدی را شروع کند. مجموعه‌ی محدودیت ۹ تضمین می‌کند در صورتی که یک وسیله‌ی نقلیه در یک زمان متوقف باشد، در زمان بعد باید یا متوقف باشد و یا حرکت خود را به سمت رأس بعدی شروع کند. مقدار مجاز برای متغیرها توسط مجموعه‌ی محدودیت ۱۰ تعیین می‌شود.

$$\chi_{(v_0, 1)}^{f0} = 1 \quad \forall f \in F \quad (1)$$

$$\sum_{t \in \{1, \dots, T\}} \chi_{(v_0, 1)}^{ft} = 0 \quad \forall f \in F \quad (2)$$

$$\alpha_r^f \in \{0,1\} \quad r \in R', \forall f \in F \quad (23)$$

$$\beta_i^f, \theta_i^f, \pi_i^f \geq 0 \quad i \in V', \forall f \in F \quad (24)$$

۳.۳. تعریف توابع هدف

مسئله‌ای که در نوشتار حاضر بررسی شده است، می‌تواند به عنوان یک مسئله کمکی برای برخی از مسائل مسیریابی وسیله نقلیه استفاده شود. اما برای اینکه بتوان محدودیت‌های هر دو مسئله را در فضای گسسته و پیوسته ارزیابی و مقایسه کرد، باید تابع هدفی برای آن تعریف شود. همان‌طور که پیشتر بیان شد، توابع هدف متفاوتی برای مسئله حاضر می‌توان تعریف کرد؛ که با توجه به محدودیت‌های موجود و ذکر شده برای آن، توابع هدف به دو دسته تقسیم شده‌اند:

۱- **توابع هدف محرک:** این دسته توابع هدفی هستند که با توجه به

محدودیت‌های موجود، وسائط نقلیه را به گشت در گراف تحریک می‌کنند.

۲- **توابع هدف بازدارنده:** این دسته توابع هدفی را تشکیل می‌دهند که با توجه به محدودیت‌های موجود، وسائط نقلیه را به عدم تحرک و توقف بیشتر در رئوس گراف تشویق می‌کنند.

در مسائلی که توابع هدف بازدارنده وجود دارد، معمولاً محدودیت‌های دیگری نظیر کمینه‌ی تعداد دفعاتی که باید یک رأس یا یک یال ملاقات شود، تأمین تقاضای مشتریان، در نظر گرفتن پنجره‌ی زمانی، و...، مسبب وجود تعادل در مدل می‌شوند. در نوشتار حاضر، چنین شروطی در نظر گرفته نشده است؛ زیرا فقط توابع هدف محرک بررسی شده‌اند. به منظور مدل‌سازی موارد اخیر، در برخی از مسائل، تعریف متغیرهای موهومی جدید لازم است، که در ادامه بررسی شده‌اند.

۱.۳.۳. کمینه‌سازی زمان توقف

یکی از توابع هدفی که می‌توان برای مسئله گشت آزاد مطرح کرد، کمینه‌سازی زمان توقف است. توابع هدف ۲۵ و ۲۶، به ترتیب توابع هدف برای کمینه‌سازی زمان توقف برای مسائل گسسته و پیوسته هستند.

$$Obj_1^D = \min \sum_{i \in \tilde{T}} \sum_{f \in F} \sum_{i \in V'} \omega_i^f \quad \text{s.t. (1)-(10)} \quad (25)$$

$$Obj_1^C = \min \sum_{i \in V'} \sum_{f \in F} \theta_i^f \quad \text{s.t. (16)-(24)} \quad (26)$$

۲.۳.۳. بیشینه‌ی پاداش رئوس ملاقات‌شده

در صورتی که WN_i پاداش هر بار ملاقات رأس $i \in V$ باشد، برای بیشینه‌سازی پاداش رئوس ملاقات‌شده در مدل‌های زمان‌های گسسته و پیوسته از توابع هدف ۲۷ و ۲۸ استفاده می‌شود:

$$Obj_2^D = \max \sum_{i \in \tilde{T}} \sum_{f \in F} \sum_{r \in R} \chi_r^f WN_i \quad \text{s.t. (1)-(10)} \quad (27)$$

$$Obj_2^C = \max \sum_{(v_i, v_j) \in R'} \sum_{f \in F} \alpha_{(v_i, v_j)}^f WN_i \quad \text{s.t. (16)-(24)} \quad (28)$$

۳.۳.۳. بیشینه‌ی پاداش مسافت طی‌شده

در صورتی که WR_r پاداش پیمایش هر واحد مسیر $r \in R$ باشد و متغیر موهومی σ_r^f بدین صورت تعریف شود: در صورتی که ناوگان f پیمایش مسیر r را در زمان t شروع کند، برابر ۱ و در غیر این‌صورت برابر ۰ باشد؛ معادله‌ی ۲۹، تابع هدف را در مدل گسسته نشان می‌دهد و برابر با مجموعه‌ی پاداش

$$\max_{f \in F} \left\{ \frac{T - 2 \times \frac{Dis_{(v_0, i)}}{SPF^f}}{2 \times \min_{j \in V' | a_j = 1} \left\{ \frac{SP_{(i, j)}}{SPF^f} \right\}} + 1 \right\} \quad (15)$$

با فرض اینکه $R' = \{(i, j) | i, j \in V', j \in Adj(i)\}$ برابر با مجموعه‌ی تمامی مسیرهای ممکن برای حرکت ایستگاه‌های متحرک باشد، و با در نظر گرفتن متغیرهای مطرح‌شده، محدودیت‌های مربوط به مسئله ذکر شده تعریف شده است.

- متغیرها

α_r^f : اگر وسیله نقلیه‌ی f مسیر r را طی کند، ۱ و در غیر این صورت ۰
 $(r \in R' \forall f \in F)$

β_i^f : زمان رسیدن وسیله نقلیه‌ی f به رأس i ($\forall f \in F, i \in V'$)

θ_i^f : زمان توقف وسیله نقلیه‌ی f در رأس i ($\forall f \in F, i \in V'$)

π_i^f : زمان ترک وسیله نقلیه‌ی f در رأس i ($\forall f \in F, i \in V'$)

مجموعه‌ی محدودیت‌های ۱۶ و ۱۷، زمان ترک و بازگشت به آشیانه را برای هر وسیله نقلیه مشخص می‌کنند. مجموعه‌ی محدودیت ۱۸ بیان می‌کند تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها به هر رأس (همچنین رأس موهومی) برابر و کمتر از ۱ است. مجموعه‌ی محدودیت‌های ۱۹ و ۲۰ بیان می‌کنند در صورتی که مسیری طی شود، زمان ورود به رأس مقصد برابر زمان خروج از رأس مبدأ به اضافه‌ی زمان پیمایش مسیر از مبدأ به مقصد است. مجموعه‌ی محدودیت ۲۱ بیان می‌کند زمان خروج از هر رأس برابر مجموع زمان ورود به آن و زمان توقف در آن رأس است. مجموعه‌ی محدودیت ۲۲ بیان می‌کند در صورتی که زمان شروع و ترک یک رأس بیشتر از ۱ باشد، یعنی از آن رأس و یا به آن رأس حتماً حرکتی وجود داشته است. مجموعه‌ی محدودیت‌های ۲۳ و ۲۴، بازه‌ی مجاز متغیرها را نشان می‌دهند.

$$\pi_{v_0}^f = 0 \quad \forall f \in F \quad (16)$$

$$\beta_{v_0}^f = T \quad \forall f \in F \quad (17)$$

$$\sum_{r=(i,j) \in R'} \alpha_r^f = \sum_{r=(j,i) \in R'} \alpha_r^f \leq 1 \quad \forall f \in F, \forall j \in V' \quad (18)$$

$$\beta_j^f \geq \pi_i^f + \frac{Dis_r}{SPF^f} - M(1 - \alpha_r^f) \quad \forall f \in F, \forall r = (i, j) \in R' \quad (19)$$

$$\beta_j^f \leq \pi_i^f + \frac{Dis_r}{SPF^f} + M(1 - \alpha_r^f) \quad \forall f \in F, \forall r = (i, j) \in R' \quad (20)$$

$$\pi_i^f = \beta_i^f + \theta_i^f \quad \forall f \in F, \forall i \in V' \quad (21)$$

$$\beta_i^f + \pi_i^f \leq M \left(\sum_{r=(i,j) \in R'} \alpha_r^f + \sum_{r=(j,i) \in R'} \alpha_r^f \right) \quad \forall f \in F, \forall i \in V' \quad (22)$$

در مسئله‌ی زمان پیوسته، مجموع امتیازهای کسب‌شده برای پوشش یال‌ها توسط تابع هدف ۴۱ تعیین می‌شود. محدودیت‌های ۴۲ و ۴۳ بیان می‌کنند در صورتی که یک وسیله‌ی نقلیه، هر یک از تکرارهای یک رأس به هر یک از تکرارهای یک رأس دیگر طی کرده باشد، مسیر اصلی بین آن دو رأس اصلی را ملاقات کرده است. حدود مجاز برای متغیر ξ_r توسط محدودیت ۴۴ تعیین می‌شود.

$$Obj_5^C = \text{Max} \sum_{r \in R} \xi_r Dis_r WR_r \quad \text{s.t. (16)-(24)} \quad (41)$$

$$\forall (i, j) \in R' \quad \sum_{f \in F} \sum_{1 \leq p_i \leq \text{Max} P_i} \sum_{1 \leq p_j \leq \text{Max} P_j} \alpha_{(v_i^{p_i}, v_j^{p_j})}^f \leq M \xi_r, \quad (42)$$

$$\forall (i, j) \in R' \quad \xi_r \leq \sum_{f \in F} \sum_{1 \leq p_i \leq \text{Max} P_i} \sum_{1 \leq p_j \leq \text{Max} P_j} \alpha_r^f, \quad (43)$$

$$\xi_r \in \{0, 1\}, \forall r \in R' \quad (44)$$

۴. حل مسئله

در بخش قبل در ابتدا محدودیت‌های مربوط به مدل‌های زمان‌های گسسته و پیوسته مطرح و پس از آن چهار نوع تابع هدف برای هر مسئله معرفی شده است. در بخش حاضر، به مقایسه‌ی دو مدل مذکور در مسائل مختلف و با مفروضه‌های متفاوت پرداخته شده است. برای اینکه مقایسه‌ی اخیر منصفانه باشد، واحدها، پارامترها و شرایط در مسائل گوناگون به صورت مشابه در نظر گرفته شده‌اند.

برای ساخت مثال‌های تصادفی، ۱۰ گراف هم‌بند به صورت تصادفی در یک ناحیه‌ی مربع‌شکل به طول ضلع ۱۰۰۰ متر با تعداد رؤس ۵ تا ۱۴ رأس (با افزایش یک رأس در هر مرحله) ساخته شده‌اند. سپس رأس با مختصات (۰،۰)

به عنوان رأس موهومی گراف و یال (e_{v_0}, e_{v_1}) به گراف G اضافه و گراف G تشکیل شده است. همچنین برای اینکه مقادیر پارامترها در دو مسئله‌ی زمان‌های گسسته و پیوسته مشابه باشند؛ یک وسیله‌ی نقلیه‌ی نامتناجس برای هر مسئله و با سرعت ۸ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است.

$$T = \frac{\sum_{e \in E} Dis_e}{\sum_{f \in F} SPF^f / n(F)} \quad (45)$$

همچنین پارامترهای مربوط به پاداش یعنی WN و WR به صورت تصادفی در بازه‌ی $[1, 10]$ تنظیم شده‌اند. مسئله در دو حالت زمان‌های گسسته و پیوسته و ۵ تابع هدف به صورت دقیق با استفاده از موتور CPLEX در نرم‌افزار ۱۲.۱ و Cplex optimization studio IBM ILOG مدل‌سازی و با کمک کامپیوترهای پردازش سریع (HPC) دانشگاه صنعتی شریف با تنظیمات nodes=1:ppn=16:mem=16GB حل شده است. برای هر مسئله، ۳۶۰۰ ثانیه حد زمان حل در نظر گرفته شده است (جدول ۱).

در جدول ۲، پنج تابع هدف تعریف و همچنین نمونه‌های ۱ الی ۱۰ از نظر زمان حل، تعداد دفعات دستیابی به جواب بهینه، تعداد متغیرها، و همچنین تعداد محدودیت‌ها در دو حالت زمان‌های گسسته و پیوسته حل و مقایسه شده‌اند. علاوه بر آن، جهت درک بهتر تفاوت دو مدل زمان‌های پیوسته و گسسته، شکل‌های ۱ الی ۳ به منظور مقایسه‌ی تابع هدف ۱ در ۱۰ نمونه‌ی تصادفی تولیدشده ارائه شده‌اند. توابع هدف دیگر، وضعیت تقریباً مشابهی با تابع هدف ۱ داشته و به دلیل جلوگیری از تراکم شکل‌ها، فقط نمودارهای مربوط به تابع هدف ۱ ترسیم شده است.

کسب‌شده برای پوشش یال‌ها توسط وسیله‌ی نقلیه است. در مسئله‌ی زمان پیوسته، مجموع امتیازهای کسب‌شده برای پوشش یال‌ها توسط تابع هدف (رابطه‌ی ۳۰) تعیین می‌شود.

$$Obj_3^D = \text{Max} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} \sum_{f \in F} \sigma_r^{ft} Dis_r WR_r \quad \text{s.t. (1)-(10)} \quad (29)$$

$$Obj_3^C = \text{Max} \sum_{r \in R'} \sum_{f \in F} \alpha_r^f Dis_r WR_r \quad \text{s.t. (16)-(24)} \quad (30)$$

۴.۳.۳. بیشینه‌ی پاداش رؤس منحصر به فرد ملاقات‌شده

متغیر باینری τ_i بدین صورت تعریف می‌شود: در صورتی برابر با ۱ خواهد بود که رأس i ملاقات شده باشد (در مسئله‌ی پیوسته، دست‌کم یکی از تکرارهای رأس i ملاقات شده باشد) و در غیر این صورت ۰ خواهد بود (رابطه ۳۴) و مجموع پاداش‌ها توسط رابطه ۳۱ محاسبه می‌گردد. مجموعه‌ی محدودیت‌های ۳۲ و ۳۳ نیز مشخص می‌کنند در صورتی که یک رأس توسط هر یک از وسائط نقلیه در هر زمانی ملاقات شود، آن رأس ملاقات شده است. حدود مجاز برای متغیر τ_i توسط محدودیت ۳۴ تعیین می‌شود.

$$Obj_4^D = \text{Max} \sum_{i \in V} \tau_i WN_i \quad \text{s.t. (1)-(10)} \quad (31)$$

$$\sum_{f \in F} \sum_{t \in \bar{T}} \chi_i^{ft} \leq M \tau_i, \forall i \in V \quad \xi_r \in \{0, 1\}, \forall r \in R \quad (32)$$

$$\tau_i \leq \sum_{f \in F} \sum_{t \in \bar{T}} \chi_i^{ft}, \forall i \in V \quad (33)$$

$$\tau_i \in \{0, 1\} \quad (34)$$

مجموع زمان‌های توقف تمامی وسائط نقلیه در تمامی رؤس توسط تابع ۳۵، محاسبه و بیشینه می‌شود. مجموعه‌ی محدودیت‌های ۳۶ و ۳۷، مشخص می‌کنند در صورتی که دست‌کم هر یک از تکرارهای یک رأس یک بار ملاقات شود، آن رأس ملاقات شده است.

$$Obj_4^C = \text{Max} \sum_{i \in V} \tau_i WN_i \quad \text{s.t. (16)-(24)} \quad (35)$$

$$\sum_{f \in F} \sum_{j \in \{1, \dots, \text{Max} P_i\}} \beta_{v_i^j}^f \leq M \tau_i, \forall i \in V \quad (36)$$

$$\tau_i \leq \sum_{f \in F} \sum_{j \in \{1, \dots, \text{Max} P_i\}} \beta_{v_i^j}^f, \forall i \in V \quad (37)$$

۵.۳.۳. بیشینه‌ی پاداش یال منحصر به فرد طی شده

متغیر موهومی ξ_r در صورتی که مسیر r پیمایش شود، برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۰ است. معادله‌ی ۳۸، تابع هدف را در مدل گسسته نشان می‌دهد و با مجموعه‌ی پاداش کسب‌شده برای پوشش یال‌ها توسط وسیله‌ی نقلیه برابر است. مجموعه‌ی محدودیت‌های ۳۹ و ۴۰، مسیرهای پیمایش‌شده برای وسیله‌ی نقلیه را مشخص می‌کنند.

$$Obj_5^D = \text{Max} \sum_{r \in R} \xi_r Dis_r WR_r \quad \text{s.t. (1)-(10)} \quad (38)$$

$$\sum_{f \in F} \sum_{t \in \bar{T}} \sigma_r^{ft} \leq M \xi_r, \forall r \in R \quad (39)$$

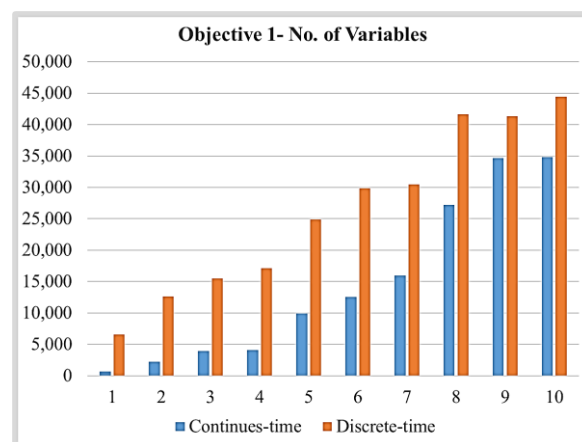
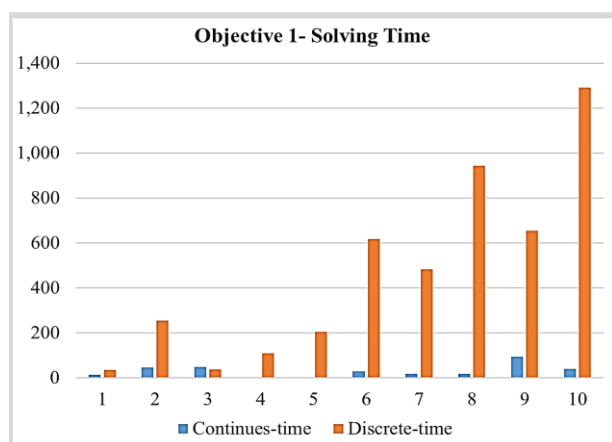
$$\xi_r \leq \sum_{f \in F} \sum_{t \in \bar{T}} \sigma_r^{ft}, \forall r \in R \quad (40)$$

جدول ۱. نتایج حل دقیق نمونه‌های تصادفی.

		Continues-Time				Discrete-time			
sample	objective	#Variables	#Constraints	Time (s)	GAP%	#Variables	#Constraints	Time (s)	GAP%
Sample 1	Obj 1	663	67	14.24	0%	6540	11448	34.36	0%
	Obj 2	662	67	52.43	0%	6540	11448	371.32	0%
	Obj3	662	67	44.99	0%	6540	11448	540.50	0%
	Obj 4	667	77	1.60	0%	6546	11460	35.18	0%
	Obj 5	676	95	111.58	0%	6554	11476	776.68	0%
Sample 2	Obj 1	2259	115	46.70	0%	12609	22419	255.52	0%
	Obj 2	2258	115	3600.47	164%	12609	22419	3716.85	-
	Obj3	2258	115	3600.83	295.48%	12609	22419	3617.76	-
	Obj 4	2264	127	0.46	0%	12616	22433	85.60	0%
	Obj 5	2278	155	3601.41	114.43%	12629	22459	3644.23	102.09%
Sample 3	Obj 1	3969	163	48.98	0%	15520	27648	38.08	0%
	Obj 2	3968	163	3600.62	213.73%	15520	27648	3617.23	-
	Obj3	3968	163	3601.61	225.46%	15520	27648	3612.01	-
	Obj 4	3975	177	0.45	0%	15528	27664	105.02	0%
	Obj 5	3992	211	3601.16	71.55%	15544	27696	3617.44	134.47%
Sample 4	Obj 1	4098	184	3.49	0%	17115	30321	109.08	0%
	Obj 2	4097	184	3600.74	294.79%	17115	30321	3615.59	-
	Obj3	4097	184	3600.44	283.29%	17115	30321	3611.66	-
	Obj 4	4105	200	0.53	0%	17124	30339	93.88	0%
	Obj 5	4123	236	3600.48	84.88%	17141	30373	3607.88	118.29%
Sample 5	Obj 1	9924	298	1.56	0%	24880	44165	203.76	0%
	Obj 2	9923	298	3600.51	334.01%	24880	44165	3673.42	-
	Obj3	9923	298	3603.88	405.40%	24880	44165	3672.53	-
	Obj 4	9932	316	1.08	0.00%	24890	44185	3624.25	16.95%
	Obj 5	9953	358	3600.65	105.86%	24910	44225	3629.65	229.74%
Sample 6	Obj 1	12525	331	28.08	0%	29845	53343	617.26	0%
	Obj 2	12524	331	3605.89	364.67%	29845	53343	3685.13	-
	Obj3	12524	331	3600.96	521.69%	29845	53343	3673.34	-
	Obj 4	12534	351	2.08	0%	29856	53365	3616.85	
	Obj 5	12560	403	3602.03	109.87%	29881	53415	3628.24	223.77%
Sample 7	Obj 1	15927	403	18.31	0%	30450	54204	482.38	
	Obj 2	15926	403	3600.96	455.88%	30450	54204	3632.67	-
	Obj3	15926	403	3600.46	485.68%	30450	54204	3633.04	-
	Obj 4	15937	425	1.19	0%	30462	54228	1526.66	0%
	Obj 5	15964	479	3600.86	117.32%	30488	54280	3643.31	184.54%
Sample 8	Obj 1	15927	403	18.31	0%	30450	54204	482.38	
	Obj 2	27176	535	3600.90	458.05%	41610	74463	3647.24	-
	Obj3	27176	535	3600.94	500.65%	41610	74463	3763.38	-
	Obj 4	27188	559	8.24	0%	41623	74489	3754.43	192.59%
	Obj 5	27220	623	3601.21	105.16%	41654	74551	3667.80	-
Sample 9	Obj 1	34665	643	93.82	0%	41296	73339	654.40	0%
	Obj 2	34664	643	3601.89	561.07%	41296	73339	3649.47	-
	Obj3	34664	643	3604.45	683.70%	41296	73339	3699.68	-
	Obj 4	34677	669	2.56	0%	41310	73367	3625.86	2.94%
	Obj 5	34708	731	3601.97	131.54%	41340	73427	3672.57	258.34%
Sample 10	Obj 1	34776	646	40.71	0%	44395	79231	1291.05	0%
	Obj 2	34775	646	3601.67	613.24%	44395	79231	3697.17	-
	Obj3	34775	646	3601.03	471.27%	44395	79231	3664.13	-
	Obj 4	34789	674	8.62	0%	44410	79261	3653.55	135.71%
	Obj 5	34825	746	3601.08	106.61%	44445	79331	3639.09	168.39%

جدول ۲. مقایسه‌ی مسئله‌ی زمان‌های گسسته و پیوسته با توجه به توابع هدف و نمونه‌های تصادفی.

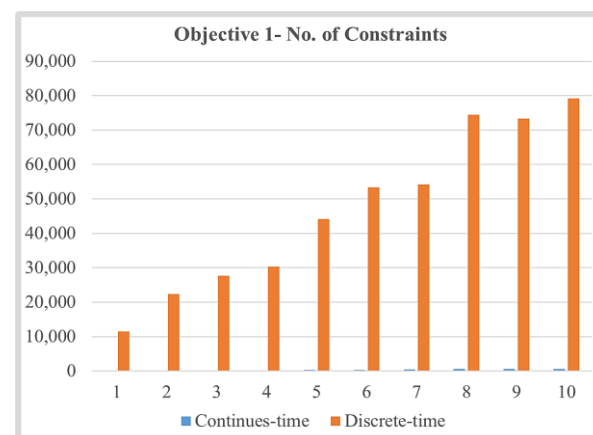
objective	Continues-time				Discrete-time			
	Time(s)	%Optimal	#Variables	#Constraints	Time(s)	%Optimal	#Variables	#Constraints
Obj 1	31.34	100%	13473	325	463.02	100%	25310	45032
Obj 2	3246.61	10%	14597	339	3330.61	10%	26426	47058
Obj 3	3245.96	10%	14597	339	3348.80	10%	26426	47058
Obj 4	2.68	100%	14607	358	2012.13	50%	26437	47079
Obj 5	3252.24	10%	14630	404	3352.62	10%	26459	47123
Sample 1	224.84	100%	666	75	351.61	100%	6544	11456
Sample 2	2169.97	40%	2260	125	2263.99	40%	12614	22430
Sample 3	2170.56	40%	3974	175	2197.96	40%	15526	27661
Sample 4	2161.14	40%	4104	198	2207.62	40%	17122	30335
Sample 5	2161.53	40%	9931	314	2960.72	20%	24888	44181
Sample 6	2167.81	40%	12533	349	3044.16	20%	29854	53362
Sample 7	2164.36	40%	15936	423	2583.61	40%	30460	54224
Sample 8	2165.76	40%	24937	531	3155.42	20%	39389	70434
Sample 9	2180.94	40%	34676	666	3060.39	20%	41308	73362
Sample10	2170.62	40%	34788	672	3188.99	20%	44408	79257
Average solving time (obtimal results): 23.88 s					Average solving time(obtimal results): 453.61 s			
Average solving time: 1955.77 s					Average solving time: 2501.45 s			
No. of obtimal results: 23					No. of obtimal results: 18			
% of obtimal results: 46%					% of obtimal results: 36%			



شکل ۱. تعداد متغیرها در تابع هدف ۱.

شکل ۳. زمان حل در تابع هدف ۱.

از آنجایی که تعداد محدودیت‌ها وابسته به زمان پایان مسئله‌ی مسیریابی است، با افزایش زمان مجاز برای گشت، تعداد محدودیت‌ها و متغیرها در مدل زمان گسسته به صورت نمایی افزایش یافته است. معمولاً انتظار می‌رود که با افزایش تعداد محدودیت‌ها و متغیرها، پیچیدگی مدل بیشتر شود و زمان حل افزایش یابد. در بین پارامترهای تعداد محدودیت و متغیر، معمولاً واکنش زمان حل مدل به تعداد محدودیت‌ها بیشتر است. مسئله‌ی حاضر، یکی از دلایل اصلی عملکرد بهتر مدل زمان پیوسته نسبت به مدل زمان گسسته است. در مدل زمان پیوسته، با وجود اینکه هر رأس به تعداد دفعاتی تکرار شده و متناسب با تکرار رؤس، یال‌های گراف نیز افزایش یافته است، ولی به دلیل ماهیت مستقل ساخت متغیر



شکل ۲. تعداد محدودیت‌ها در تابع هدف ۱.

در نوشتار حاضر، مسئله‌ی گشت آزاد برای ناوگان‌های زمینی در یک گشت شهری بررسی شده است. اما در حوزه‌هایی مانند گشت هوایی (مانند گشت پهپاد بر فراز شهر)، مدل‌های ارائه‌شده باید طراحی مجدد شوند. همچنین مسئله‌ی گشت آزاد در مناطق برون‌شهری و جاده‌ها، با توجه به اینکه فاصله‌ی رؤس در گراف مرتبط با آن معمولاً زیاد است، توقف آزاد در اواسط یال می‌تواند یکی از شروط اصلی آن مسئله باشد. هر چند که در مسئله‌ی گشت آزاد شهری، که در نوشتار حاضر بررسی شده است، شرط توقف در اواسط یال بررسی نشده است و به عنوان یک پژوهش آتی می‌تواند مدل‌سازی و حل شود. مسئله‌ی دیگر که باید پژوهش شود، بررسی مدل‌های گوناگون توسعه داده‌شده‌ی پیشین در حوزه‌ی مسیریابی وسائط نقلیه، حمل‌ونقل، و زنجیره‌ی تأمین که همکاری دو یا چند ناوگان گوناگون در آن بررسی شده است و یا مسیریابی یک نوع وسیله‌ی نقلیه ولی با امکان اضافه‌شدن فرض گشت آزاد (مانند گشت خودروی پلیس) و حل مجدد مدل‌های بررسی‌شده با این فرض و مدل‌های ارائه‌شده در نوشتار حاضر است. یکی دیگر از کاربردهای پژوهش حاضر، در مورد ارائه‌ی روش‌های حل ابتکاری در مسائل دیگر باشد. به عنوان مثال، می‌توان در مرحله‌ی اول، مسئله‌ی اصلی را به دو زیرمسئله تقسیم کرد، که یکی از آن‌ها مسئله‌ی گشت آزاد باشد و پس از آن یک جواب شدنی برای زیرمسئله‌ی دیگر، یک جواب شدنی برای زیرمسئله‌ی گشت آزاد نیز باشد و در غیر این صورت آن جواب، قابل قبول نخواهد بود و یا جریمه‌ای برای قبول آن در نظر گرفت. در مجموع، مسئله‌ی گشت آزاد مطرح‌شده در نوشتار حاضر، شاید به تنهایی کاربرد کمتری نسبت به بسیاری از مسائل مسیریابی در دنیای واقعی داشته باشد، اما در صورتی که به عنوان یک مسئله‌ی کمکی و یا زیرمسئله‌ای از یک مسئله‌ی اصلی در نظر گرفته شود، کاربردهای بسیار زیادی در حوزه‌ی مذکور خواهد داشت.

و محدودیت جدید از زمان پایان گشت، تعداد متغیر و محدودیت کمتری نسبت به حالت زمان گسسته تولید شده است.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهاد مطالعات آتی

در نوشتار حاضر، مسئله‌ی مسیریابی وسیله‌ی نقلیه‌ی گشت آزاد بحث و بررسی شده است. در مسئله‌ی مسیریابی گشت آزاد، وسیله‌ی نقلیه می‌تواند به صورت آزادانه در گراف حرکت کند، چند بار یک رأس را طی و یا یک یال را پیمایش کند. همچنین می‌تواند به مقدار دلخواه در رؤس گراف توقف کند. مدل‌سازی مسئله‌ی مذکور می‌تواند در مدل‌سازی بسیاری از مسائل مسیریابی دیگر کمک کند. به عنوان مثال، مسیریابی گشت امنیت شهری، و مسیریابی همکاری و هماهنگی چند نوع وسیله‌ی نقلیه را می‌توان نمونه‌ای از این دسته مسائل معرفی کرد. پس از تعریف کلی مسئله و مروری بر ادبیات موجود، در بخش سه، مسئله‌ی پژوهش به دو صورت زمان‌های گسسته و پیوسته مدل‌سازی شده است. با توجه به آنکه در مدل زمان گسسته، تعداد محدودیت‌ها و متغیرها به زمان اجرای عملیات وابستگی دارد و همچنین زمان پیوسته نیاز به تغییراتی در گراف اصلی وجود دارد و این تغییرات به افزایش تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای مدل می‌انجامد، توابع هدف گوناگونی برای مقایسه‌ی دو مدل اخیر از لحاظ زمان حل تعریف و پس از آن، پنج تابع هدف گوناگون برای مسئله معرفی شده است. در بخش چهار، ۱۰ نمونه‌ی تصادفی تولید و هر ۵ تابع هدف در دو مسئله‌ی زمان‌های پیوسته و گسسته حل شده‌اند. نتایج نشان داده‌اند که مدل زمان پیوسته نسبت به مدل زمان گسسته، عملکرد بهتری از خود ارائه داده است.

References- منابع

1. Manshadian, H., Amalnick, M. S. and Torabi, S. A., 2023. Synchronized truck and drone routing under disastrous conditions (case study: urban thoroughfares disinfection). *Computers & Operations Research*, 106295. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2023.106295>
2. Schrijver, A., 2005. On the history of combinatorial optimization (till 1960). *Handbooks in operations research and management science*, 12, pp. 1-68. [https://doi.org/10.1016/S0927-0507\(05\)12001-5](https://doi.org/10.1016/S0927-0507(05)12001-5)
3. Xing, Z., Tu, S. and Xu, L., 2020. Solve Traveling Salesman Problem by Monte Carlo Tree Search and Deep Neural Network. *arXiv preprint arXiv:2005.06879*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.06879>
4. Zhou, A.-H., Zhu, L.-P., Hu, B., Deng, S., Song, Y., Qiu, H. and Pan, S., 2019. Traveling-salesman-problem algorithm based on simulated annealing and gene-expression programming. *Information*, 10, 7. <https://doi.org/10.3390/info10010007>
5. Ahmed, Z. H., 2020. Adaptive Sequential Constructive Crossover Operator in a Genetic
- Algorithm for Solving the Traveling Salesman Problem. GAs, 11. <https://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2020.0110275>
6. Guo, J. and Sato, Y., 2020. A Standardized Bare Bones Particle Swarm Optimization Algorithm for Traveling Salesman Problem. *International Journal of Machine Learning and Computing*, <https://doi.org/10.18178/ijmlc.2020.10.3.960>
7. Dahan, F., El Hindi, K., Mathkour, H. and Alsalman, H., 2019. Dynamic flying ant colony optimization (DFACO) for solving the traveling salesman problem. *Sensors*, 19, 1837. <https://doi.org/10.3390/s19081837>
8. Dror, M., 2012. Arc routing: theory, solutions and applications, *Springer Science & Business Media*. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4495-1>
9. Eiselt, H. A., Gendreau, M. and Laporte, G., 1995. Arc routing problems, part II: The rural postman problem. *Operations research*, 43, pp. 399-414. <https://doi.org/10.1287/opre.43.3.399>
10. Assad, A. A. and Golden, B. L., 1995. Arc routing methods and applications. *Handbooks in operations*

- research and management science, 8, pp. 375-483.
[https://doi.org/10.1016/S0927-0507\(05\)80109-4](https://doi.org/10.1016/S0927-0507(05)80109-4)
11. Yu, M., Jin, X., Zhang, Z., Qin, H. and Lai, Q., 2019. The split-delivery mixed capacitated arc-routing problem: Applications and a forest-based tabu search approach. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 132, pp. 141-162.
<https://doi.org/10.1016/j.tre.2019.09.017>
12. Corberán, Á., Erdoğan, G., Laporte, G., Plana, I. and Sanchis, J. M., 2018. The Chinese Postman Problem with load-dependent costs. *Transportation Science*, 52, pp. 370-385.
<https://doi.org/10.1287/trsc.2017.0774>
13. Christofides, N., Benavent, E., Campos, V., Corberán, A. and MOTA, E., 1984. An optimal method for the mixed postman problem. *System modelling and optimization*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/BFb0008937>
14. Minieka, E., 1979. The Chinese postman problem for mixed networks. *Management Science*, 25, pp. 643-648. <https://doi.org/10.1287/mnsc.25.7.643>
15. Dror, M., Stern, H. and Trudeau, P., 1987. Postman tour on a graph with precedence relation on arcs. *Networks*, 17, pp. 283-294.
<https://doi.org/10.1002/net.3230170304>
16. Orloff, C., 1974. A fundamental problem in vehicle routing. *Networks*, 4, pp. 35-64.
<https://doi.org/10.1002/net.3230040105>
17. Lenstra, J. K. and Kan, A. R., 1976. On general routing problems. *Networks*, 6, pp. 273-280.
<https://doi.org/10.1002/net.3230060305>
18. Hertz, A., Laporte, G. and Hugo, P. N., 1999. Improvement procedures for the undirected rural postman problem. *INFORMS Journal on computing*, 11, pp. 53-62. <https://doi.org/10.1287/ijoc.11.1.53>
19. Christofides, N., Campos, V., Corberán, A. and Mota, E., 1986. An algorithm for the rural postman problem on a directed graph. Netflow at pisa. Springer.
<https://doi.org/10.1007/BFb0121091>
20. Corberán, Á., Plana, I. and Sanchis, J. M., 2014. The rural postman problem on directed, mixed, and windy graphs. Arc Routing: Problems, Methods, and Applications, *MOS-SIAM Series on Optimization*, pp. 101-127.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611973679.ch6>
21. Golden, B. L. and Wong, R. T., 1981. Capacitated arc routing problems. *Networks*, 11, pp. 305-315.
<https://doi.org/10.1002/net.3230110308>
22. Elshaer, R. & AWAD, H., 2020. A taxonomic review of metaheuristic algorithms for solving the vehicle routing problem and its variants. *Computers & Industrial Engineering*, 140, 106242.
<https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106242>
23. Konstantakopoulos, G. D., Gayialis, S. P. and Kechagias, E. P., 2020. Vehicle routing problem and related algorithms for logistics distribution: A literature review and classification. *Operational research*, pp. 1-30. <https://doi.org/10.1007/s12351-020-00600-7>
24. Moghdani, R., Salimifard, K., Demir, E. and Benyettou, A., 2021. The green vehicle routing problem: A systematic literature review. *Journal of Cleaner Production*, 279, 123691.
<https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.123691>
25. Raeesi, R. and Zografos, K. G., 2020. The electric vehicle routing problem with time windows and synchronised mobile battery swapping. *Transportation Research Part B: Methodological*, 140, pp. 101-129.
<https://doi.org/10.1016/j.trb.2020.06.012>
26. Wang, Z. and Sheu, J.-B., 2019. Vehicle routing problem with drones. *Transportation research part B: methodological*, 122, pp. 350-364.
<https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.03.005>
27. Chung, S. H., Sah, B. and Lee, J., 2020. Optimization for drone and drone-truck combined operations: A review of the state of the art and future directions. *Computers & Operations Research*, 123, 105004.
<https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.105004>
28. Drex1, M., 2012. Synchronization in vehicle routing—a survey of VRPs with multiple synchronization constraints. *Transportation Science*, 46, pp. 297-316.
<https://doi.org/10.1287/trsc.1110.0400>
29. Fleischmann, B., 1990. The vehicle routing problem with multiple use of vehicles. *Forschungsbericht Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Universität Hamburg*.
https://www.researchgate.net/publication/221704650_The_vehicle_routing_problem_with_multiple_use_of_vehicles

