

بهینه‌سازی دو مرحله‌ای زمان‌بندی و تخصیص داوران در مسابقات فوتبال بر اساس معیارهای عدالت

حسام آیت

کارشناسی، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

hesam.ayat@ie.sharif.edu

مریم رادمان^۱

استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

radman@sharif.edu

چکیده

در این مطالعه، یک مدل ریاضی دو مرحله‌ای برای زمان‌بندی رقابت‌های لیگ‌های فوتبال ارائه شده است که هدف آن برگزاری منظم و عادلانه مسابقات است. در مرحله اول، ترتیب برگزاری بازی‌ها، تعیین میزبان-مهمان هر تیم و تخصیص داوران به منظور تضمین عدالت در برگزاری مسابقه‌ها با رعایت محدودیت‌های مختلف مانند رعایت تناوب میزبان-میهمان بودن تیم‌ها و عدم تقابل یک تیم ضعیف با دو تیم قوی در دو هفته متوالی مشخص می‌شود. سپس، در مرحله دوم، بر اساس نتایج مرحله اول، زمان‌بندی دقیق مسابقات شامل روز و ساعت برگزاری هر بازی تعیین می‌گردد. اصلی‌ترین نوآوری این پژوهش، اجرای تصمیمات در دو مرحله و در نظر گرفتن محدودیت‌های دنیای واقعی شامل سطح تجربه داوران، تعادل در داوری بازی‌ها و فاصله حداقل سه روز بین بازی‌های یک تیم است. با استفاده از مدل ارائه شده می‌توان برنامه زمان‌بندی بهینه برگزاری رقابت‌ها تا شش تیم و هشت داور در دوره زمانی ۱۰ هفته‌ای را ارائه کرد. نتایج تحلیل حساسیت بر روی تعداد داوران قوی و ضعیف نشان می‌دهد که در صورتی برابری تعداد هر دو گروه، کمترین انحراف از معیارهای عدالت-محور حاصل می‌شود و با افزایش اختلاف تعداد این دو گروه (با فرض ثابت بودن تعداد کل داوران)، میزان انحراف نیز افزایش می‌یابد.

کلمات کلیدی: زمان‌بندی ورزشی، تخصیص داور، برنامه‌ریزی عدد صحیح، زمان‌بندی مسابقات لیگ فوتبال، عدالت.

Two-stage optimization of scheduling and referee assignment in football competitions based on fairness criteria

Hesam Ayat, hesam.ayat@ie.sharif.edu

B.Sc. degree, Department of Industrial Engineering, Sharif university of technology, Tehran, Iran

Maryam Radman, (corresponding author), radman@sharif.edu

Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Sharif university of technology, Tehran, Iran

Abstract

In this study, a two-stage mathematical model is proposed for scheduling football league competitions with the primary goal of organizing matches in a fair and orderly manner. In the first stage, the sequence of matches, the assignment of home and away teams, and the allocation of referees are determined by

^۱ نویسنده مسئول

considering various constraints to ensure justice in the competition. These constraints include alternating home and away match for each team, preventing a weak team from playing against two strong teams in consecutive weeks, and others aimed at promoting fairness. Subsequently, in the second stage, the exact scheduling of each match, specifying the day and time, is determined based on the outcomes of the first stage. The main innovation of this research is the stepwise decision-making process, which not only separates the determination of match sequence and exact timing but also incorporates practical constraints such as referee experience level, balancing the number of games officiated by each referee, and ensuring a minimum three-day interval between games for any team. Using the proposed model, it is possible to develop an optimal schedule for up to 6 teams and 8 referees over a 10-week period, and to conduct comprehensive analysis of the results. The results of the sensitivity analysis on the number of strong and weak referees indicate that when the number of both groups is equal, the smallest deviation from fairness-oriented criteria is observed. As the disparity between the sizes of these two groups increases (assuming the total number of referees remains constant), the deviation also increases.

Keywords: Sports scheduling; Referee assignment; Integer programming; Football league scheduling; Sequencing; Fairness.

Introduction

Providing optimal scheduling for real-world problems is of great importance [1–3]. One such problem is the scheduling of sports competitions. Sporting events play a vital role in society, fostering healthy competition, economic development, tourism, and urban growth. In recent decades, sports have evolved into a multi-billion-dollar industry, generating significant economic, social, and cultural benefits, especially for host cities of major events such as the FIFA World Cup and the Olympics. This increasing global attention has driven a need for improved scheduling and operational processes, particularly in football, the most-watched sport worldwide. With increasingly complex tournament calendars and the challenge of fair referee allocations, issues of fairness, bias, and scheduling efficiency have become central concerns in sports management [4].

Football competitions are typically organized as leagues, where each team faces all others both home and away, or as knockout tournaments. Each format presents distinct scheduling challenges. Leagues, for example, demand careful match organization to ensure fairness and balance given dense calendars, limited stadium availability, the requirement for player rest, and international fixture alignment. Equally, referee allocation must be managed to prevent disputes and maintain competition integrity [5].

Computationally, sports scheduling is known to be NP-hard [6]. Even small cases can be difficult to solve exactly and require advanced

mathematical models and optimization techniques. Integrated frameworks, which schedule not only matches but also related activities, are increasingly favored in recent research [7].

Studies on minimizing team travel [5], balancing home and away games [8], and equitable referee assignments [9] have produced improvements in both fairness and cost, with methods like iterative local search reducing travel by up to 24.5% [5] and optimized referee allocations cutting soft constraint violations by half [6]. The introduction of integer programming has enabled, for the first time, league calendars meeting all stakeholders' demands in settings such as Belgium [10].

The principal innovation of this study is a two-stage approach that concurrently considers match order, referee assignment, and exact timing, while directly addressing constraints related to referee experience, workload, and minimum rest periods. The paper proceeds with a literature review, problem statement, results, and suggestions for future research.

Methodology

This research addresses the complex challenge of scheduling matches in a double round-robin football league, where each of N teams faces every other both home and away. The main scheduling goals are fairness, especially in rest periods, referee distribution, and home/away balance, and practical feasibility given constraints like stadium availability. As perfect

alternation between home and away games is rarely possible due to real-world limitations, these requirements are modeled as soft constraints, each incurring penalties in the objective function when violated.

The objective function is designed to penalize breaches in key fairness and operational constraints: too many consecutive home or away games for teams, imbalanced referee workloads, assigning inexperienced referees to major matches, and insufficient recovery time for players or referees. Core model constraints ensure: (1) teams avoid long sequences of home/away games; (2) referees are rotated fairly and according to experience; (3) sufficient rest is preserved; and (4) no match overlaps occur for teams or shared venues.

The model operates in two phases. The first determines the match sequence, home/away assignments, and referee allocation to achieve the best balance under fairness and practical limits. The second phase schedules each match and referee onto specific days and times, respecting real-world calendar and venue constraints. Additional rules, including alternating referees, distributing experience levels, and handling shared stadia, are designed to maximize equity and minimize practical conflicts.

Results

Applying the proposed model to real-world-inspired football league cases yielded strong results, especially for small and medium leagues. For instance, with four or six referees and up to six teams, the model quickly produced optimal and fair schedules, even when accounting for team strength and referee experience. As the number of teams and referees increased, computation time and problem complexity also rose, but the model still returned quality feasible solutions. However, for the largest tested case, eight teams and eight referees over fourteen weeks, the model could not find a feasible solution within 28 hours, highlighting

computational challenges at larger scales. For leagues with up to six teams, the model proved to be flexible, efficient, and user-friendly, requiring only basic input data. Its two-stage approach, integrating both match and referee scheduling, offers a transparent and practical solution, making it ideal for federations and managers seeking balanced, easily generated league schedules without intensive manual planning. For larger leagues, adopting stronger computational tools or metaheuristic algorithms is recommended to address increased complexity and scalability.

Conclusion

The proposed mathematical model offers an integrated, two-stage solution for the simultaneous scheduling of matches and referees across multiple calendar levels. By incorporating soft constraints, penalties, and real-world limitations, it yields detailed, feasible, and balanced competition schedules. A major strength lies in its comprehensive coverage of all fairness and operational aspects, rare in earlier works often limited to just match or referee scheduling in isolation. For simplicity, the model currently assumes features like mirrored calendars in the second half and a single match per hour, and does not model uncertain team/referee availability. Future work could improve flexibility by supporting simultaneous matches in different venues, removing mirrored scheduling, introducing rolling week-by-week planning, and relying on real-time data or additional criteria like referee nationality. For leagues with more than six teams, exact optimization may be combined with metaheuristics (e.g., genetic algorithms) to overcome computational barriers. In summary, the model offers a practical, fair, and transparent scheduling tool well-suited for small and mid-size leagues and provides a solid foundation for future enhancements in larger or more complex league settings.

ارایه زمان‌بندی بهینه برای مسائل دنیای واقعی از اهمیت زیادی برخوردار است [۱-۳]. یکی از این نوع مسائل، زمان‌بندی مسابقات ورزشی است. مسابقات ورزشی از دیرباز

۱. مقدمه

تأثیر عمیقی بر جوامع انسانی داشته و در دوران معاصر به عنوان ابزاری برای ترویج رقابت سالم و ارتقای سلامت عمومی شناخته شده‌اند. ورزش امروزه ابعادی فراتر از سرگرمی و نشاط یافته و به صنعتی چند میلیارد دلاری تبدیل شده است که نقش بسزایی در رشد اقتصادی، توسعه گردشگری و ایجاد زیرساخت‌های شهری ایفا می‌شود. برگزاری مسابقات بزرگی همچون جام جهانی فوتبال، المپیک و سایر رویدادهای بین‌المللی، نه تنها رونق اقتصادی قابل توجهی به شهرهای میزبان بخشیده، بلکه از منظر فرهنگی و اجتماعی نیز با اهمیت چشمگیر همراه بوده است. رشد فزاینده توجه جهانی به ورزش، لزوم بهبود فرآیندها و برنامه‌ریزی‌های اجرایی آن، به ویژه در بعد زمان‌بندی رقابت‌ها، بیش از پیش نمایان شده است. در میان مسابقات ورزشی، مسابقات فوتبال به عنوان پر بیننده‌ترین رشته مطرح هستند و امروزه رقابت‌های متعددی نظیر لیگ ملت‌ها، انتخابی جام جهانی و جام جهانی باشگاه‌ها سبب شده است که زمان‌بندی مسابقات این رشته به موضوعی چالش‌برانگیز تبدیل شود. از سوی دیگر، تخصیص داوران به عنوان یکی از جنبه‌های کلیدی مدیریت لیگ فوتبال مطرح بوده است؛ چرا که تخصیص‌های ناعادلانه می‌تواند منجر به بروز تعارض و نگرش جانبدارانه میان تیم‌ها و داوران شود [۴].

مسابقات فوتبال از لحاظ ساختار کلی به دو دسته اصلی لیگ و تورنومنت^۱ تقسیم شده‌اند. لیگ مجموعه‌ای از بازی‌ها است که در آن همه تیم‌ها به صورت رفت و برگشت در طول یک فصل با یکدیگر رقابت می‌کنند؛ تمام تیم‌ها تا پایان دوره در رقابت باقی ننگه داشته می‌شوند و در نهایت برترین تیم‌ها به عنوان قهرمان یا نمایندگان صعود به مرحله بالاتر تعیین می‌گردند. در مقابل، تورنومنت‌ها بر پایه سیستم حذفی برگزار می‌شوند؛ تیم‌ها پس از هر بازی یا مرحله، در صورت شکست حذف شده و تنها یک تیم تا انتها به عنوان قهرمان باقی می‌ماند. هریک از این ساختارها نیازمند قوانین و روش‌های زمانی خاص خود بوده و چالش‌های متفاوتی برای سازمان‌دهندگان به همراه دارند. در لیگ‌ها، تعداد بازی‌های هر تیم به صورت $2(n-1)$ محاسبه شده و در مجموع $n(n-1)$ مسابقه در لیگ برگزار می‌گردد.

پیچیدگی این مسئله ناشی از وجود محدودیت‌های فراوانی مانند تقویم‌های فشرده، نیاز به استراحت بازیکنان،

محدودیت‌های استادیوم‌ها و هماهنگی با مسابقات بین‌المللی است. همچنین، رعایت عدالت در برنامه‌ریزی و جلوگیری از ایجاد موقعیت‌های ناعادلانه برای تیم‌ها و داوران از اهمیت اساسی برخوردار است [۵]. مسائل زمان‌بندی ورزشی، عموماً جزو مسائل NP-سخت^۲ دسته‌بندی شده‌اند؛ به گونه‌ای که حتی برای ابعاد نسبتاً کوچک، یافتن راه‌حل مطلوب نیازمند به کارگیری الگوریتم‌های پیشرفته جست‌وجو و مدل‌سازی‌های ریاضی است [۶]. برخلاف رویکردهای سنتی که تنها بر زمان‌بندی مسابقات متمرکز هستند، مدل‌های یکپارچه نشان داده‌اند که می‌توان انواع مختلف رویدادهای ورزشی اعم از اردوهای تمرینی، جلسات مدیریتی و مسابقات را به صورت هماهنگ در یک چارچوب جامع برنامه‌ریزی کرد [۷].

در لیگ‌ها باید اطمینان حاصل شود که بازی‌ها با فاصله زمانی مناسب برگزار می‌گردند، هیچ تیمی دچار فشار یا خستگی مفرط نمی‌شود و تقویم بازی‌ها تداخل ندارد. در تورنومنت‌ها نیز باید محدودیت زمانی، جابه‌جایی و کیفیت رقابت‌ها به دقت مدیریت گردد. مطالعات متعددی نشان داده‌اند که وزن‌دهی به معیارهایی مانند کمینه‌سازی مسافت سفر تیم‌ها [۵]، توزیع عادلانه بازی‌های خانگی و خارج از خانه [۸]، یا حتی تخصیص منصفانه داوران [۹] می‌تواند کیفیت و عدالت برنامه‌ریزی را بهبود بخشیده و در عین حال هزینه‌های عملیاتی مسابقات را کاهش دهد. برای نمونه، در مطالعه‌ای در سال ۲۰۱۰، الگوریتم‌های جست‌وجوی محلی تکرارشونده^۳ توانستند فاصله سفر تیم‌ها را تا ۲۴.۵٪ نسبت به روش‌های پیشین کاهش دهند [۵]. در مطالعه دیگری، مدلی برای تخصیص بهینه داوران ارائه شده که جریمه ناشی از محدودیت‌های نرم را تا بیش از ۵۰٪ کاهش داده است [۹]. استفاده از روش‌های تحقیق در عملیات^۴ و مدل‌سازی ریاضی به عنوان راهکاری مؤثر برای حل این چالش و توسعه زمان‌بندی بهینه مورد توجه قرار گرفته است. رویکرد برنامه‌ریزی عدد صحیح^۵ برای نخستین بار امکان زمان‌بندی در لیگ فوتبال بلژیک را فراهم کرده است، به نحوی که تمام محدودیت‌ها و خواسته‌های متعارض ذینفعان رعایت شده است [۱۰].

اصلی‌ترین نوآوری این پژوهش، اجرای تصمیمات در دو مرحله است که برای نخستین بار ابعاد کلیدی زمان‌بندی

رقابت‌ها، تخصیص داوران و زمان‌بندی روز و ساعت بازی به‌طور همزمان و یکپارچه در نظر گرفته شده است؛ موضوعی که در ادبیات پیشین غالباً به صورت تفکیکی بررسی شده است. به بیان دیگر، در مرحله اول، میزبان و میهمان بودن تیم‌ها، توالی مسابقات و تخصیص داوران مشخص می‌گردد و در مرحله دوم تعیین می‌شود که هر مسابقه در چه روز و ساعتی برگزار گردد. همچنین، در نظر گرفتن محدودیت‌های واقعی از قبیل سطح تجربه داوران و تفکیک آن‌ها به دو دسته باتجربه و تازه‌کار، ایجاد تعادل در داوری بازی‌ها و رعایت فاصله حداقل سه روز بین بازی‌های یک تیم از دیگر نوآوری‌های این پژوهش محسوب می‌شود که تا پیش از این در ادبیات استفاده نشده است.

ادامه ساختار مقاله به این شرح است: در بخش ۲، پیشینه پژوهش بررسی می‌گردد. در بخش ۳، تعریف مسئله ارائه می‌شود. در بخش ۴، نتایج گزارش می‌گردد و در بخش آخر، نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی بیان می‌شود.

۲. پیشینه پژوهش

در این بخش، پس از بررسی مطالعات پیشین در زمینه برنامه‌ریزی مسابقات فوتبال، دسته‌بندی آن‌ها انجام می‌شود.

۱.۲. بررسی مطالعات پیشین در زمینه برنامه‌ریزی مسابقات فوتبال

در این بخش، به بررسی پژوهش‌های مرتبط با زمان‌بندی مسابقات فوتبال به ترتیب سال انتشار پرداخته می‌شود. در پژوهشی که در سال ۲۰۱۰ انجام شد، به بررسی مسئله سفرهایی که در یک تورنمنت فوتبال باید انجام شود، پرداخته شده است [۵]. در این مسئله، هر تیم دقیقاً یک‌بار با هر تیم دیگر بازی می‌کند و مکان برگزاری هر مسابقه از قبل مشخص شده است. هدف اصلی، کمینه‌سازی فاصله سفر و رعایت محدودیت‌های عدالت است. این مطالعه یک روش جستجوی محلی تکرارشونده معرفی می‌کند که به طور قابل‌ملاحظه‌ای از روش‌های قبلی بهتر عمل کرده است. این الگوریتم به طور متوسط باعث بهبود ۲۴.۵٪ نسبت به بهترین راه‌حل‌های شناخته‌شده در ادبیات، تا آن زمان، شده است. مطالعه‌ای

دیگر در سال ۲۰۱۲، به بررسی برنامه‌ریزی برای تورنمنت فوتبال برزیل پرداخته است که به بررسی دستیابی به عدالت، افزایش درآمد، امنیت، و رعایت محدودیت‌های پخش تلویزیونی پرداخته است [۱۱]. این مطالعه به چالش‌هایی همچون تعادل در مسابقات خانگی و خارج از خانه، جلوگیری از تداخل بازی‌های رقابتی مهم، و اطمینان از برگزاری بازی‌های مهم در آخر هفته‌ها برای جلب توجه بیشتر پرداخته است. این تحقیق با استفاده از تکنیک‌های برنامه‌ریزی عددصحیح توانست در برنامه‌ریزی مسابقات تورنمنت فوتبال برزیل در سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۱۰ باعث افزایش عدالت و ایجاد مسابقات جذاب‌تر شود.

در زمینه تخصیص داوران در لیگ‌های فوتبال، مطالعه‌های مختلفی وجود دارند که به رفع چالش‌های مربوط به عدالت و تخصیص بهینه داوران پرداخته‌اند. یکی از مطالعاتی که به تخصیص داوران در لیگ فوتبال شیلی پرداخته است، از برنامه‌ریزی عددصحیح برای به حداقل رساندن فاصله سفر داوران استفاده کرده است [۶]. در این مطالعه که در سال ۲۰۱۳ انجام شده است، دو روش مختلف برای حل این مسئله ارائه شده است که شامل رویکرد برنامه‌ریزی عددصحیح و رویکرد مبتنی بر الگوریتم است. با توجه به نتایج، رویکرد مبتنی بر الگوریتم به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای زمان‌های حل را کاهش داد و توانست مسائل واقعی را در مدت زمان کوتاهی حل کند.

در مطالعه‌ای دیگر در سال ۲۰۱۳، مسئله برنامه‌ریزی مسابقات لیگ فوتبال اکوادور با استفاده از مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مورد بررسی قرار گرفته است [۸]. پیش از این تحقیق، فدراسیون فوتبال اکوادور برنامه‌ریزی مسابقات را به‌صورت دستی انجام می‌داد که منجر به جداول غیر بهینه با توزیع ناعادلانه مسابقات خانگی و خارج از خانه و سفرهای بیش‌ازحد برای برخی تیم‌ها می‌شد. نتایج این مطالعه نشان داد که استفاده از این مدل به بهبود عدالت و کاهش هزینه‌های سفر تیم‌ها و افزایش حضور تماشاگران در مسابقات کلیدی منجر شده است. در پژوهشی که بر روی لیگ فوتبال پرتغال در سال ۲۰۱۵ انجام شده است، هدف، توسعه مدلی

مناسب برای برنامه‌ریزی مسابقات و تخصیص داوران به‌منظور بهبود عدالت در این لیگ بود. نتایج نشان داد که روش پیشنهادی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای عدالت را نسبت به برنامه‌ریزی انجام‌گرفته در فصل ۲۰۱۴-۲۰۱۵ بهبود بخشیده است [۱۲].

مقاله‌ای دیگر در سال ۲۰۱۷ به بررسی برنامه‌ریزی هم‌زمان مسابقات فوتبال و تخصیص داوران پرداخته است که در آن از مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط^۷ استفاده شده است [۱۳]. این تحقیق نشان می‌دهد که ترکیب تخصیص داوران با برنامه‌ریزی مسابقات می‌تواند نتایج بهتری نسبت به روش‌های سنتی که تخصیص داوران و برنامه‌ریزی مسابقات به‌طور جداگانه انجام می‌شود، به دست آورد. با این حال، نتایج نشان داد که الگوریتم ژنتیک^۸ که برای حل این مسئله استفاده شده است، منجر به نتایج بهتری در مقایسه با رویکرد بهینه‌سازی عدد صحیح نشده است. یکی از مطالعات برجسته در این زمینه، بررسی مرحله مقدماتی جام جهانی ۲۰۱۸ در منطقه آمریکای جنوبی است که به مساله عدم تعادل در برنامه‌ریزی مسابقات تیم‌ها در دوره‌های دوگانه پرداخته است [۱۴]. تیم‌هایی همچون آرژانتین و برزیل از برنامه‌ریزی‌های ناعادلانه برخوردار بودند که منجر به فواصل طولانی و توزیع نامتوازن مسابقات خانگی و خارج از خانه می‌شد. در این مطالعه که در سال ۲۰۱۷ انجام شد، نویسندگان با استفاده از برنامه‌ریزی عدد صحیح، یک برنامه‌ریزی جدید برای این مسابقات طراحی کردند که در آن، فواصل دوگانه کاهش یافت و توزیع بازی‌ها بین تیم‌ها متعادل‌تر شد.

در یک مطالعه دیگر در سال ۲۰۱۸، به بهینه‌سازی زمان‌بندی مسابقات لیگ والیبال نروژ پرداخته شده است [۱۵]. پنج مدل مختلف ارائه شده است که شامل برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی و برنامه‌ریزی محدودیت-محور^۹ برای تنظیم یک تورنمنت دوره‌ای هستند. این مدل‌ها تلاش می‌کنند تا تعداد استراحت‌های تیم‌ها را به‌طور یکنواخت توزیع کنند، حداکثر تعداد بازی‌های خانگی یا خارج از خانه متوالی را محدود نمایند و هزینه‌های سفر را به حداقل برسانند. نتایج

این تحقیق نشان می‌دهد که مدل مبتنی بر برنامه‌ریزی محدودیت-محور توانسته است مسافت سفر تیم‌ها را بین ۱۰٪ تا ۲۹٪ کاهش دهد و به‌عنوان گزینه‌ای مناسب برای زمان‌بندی لیگ پیشنهاد شده است. همچنین، در مطالعه‌ای دیگر به تخصیص داوران در لیگ بسکتبال حرفه‌ای آرژانتین پرداخته شده است. در این تحقیق، مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح برای تخصیص داوران به‌گونه‌ای که هزینه‌های سفر داوران کاهش یابد، طراحی شده است [۱۶]. یکی از چالش‌های اصلی این مطالعه، هزینه‌های بالای سفر به دلیل وسعت جغرافیایی آرژانتین بود. مدل پیشنهادی در فصول ۲۰۱۶-۲۰۱۷ و ۲۰۱۷-۲۰۱۸ پیاده‌سازی شد و نتایج نشان داد که تخصیص‌های بهینه باعث کاهش ۲۸٪ در مسافت‌های سفر نسبت به برنامه‌ریزی‌های دستی شده است.

در تحقیق دیگری در سال ۲۰۲۰ که در آن به بهینه‌سازی برنامه‌ریزی داوران در لیگ فوتبال ایتالیا پرداخته شده است، مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح برای کاهش جریمه‌ها از محدودیت‌های نرم و افزایش عدالت در تخصیص داوران معرفی شده است. این مدل توانست جریمه‌ها را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش دهد و مدل جستجوی محلی در کنار آن زمان محاسباتی را به‌شدت کاهش داد [۱۷]. مطالعه‌ای دیگر در سال ۲۰۲۱ به مساله تخصیص داوران در لیگ بسکتبال حرفه‌ای آرژانتین پرداخته است که در آن، مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح برای تخصیص داوران به‌گونه‌ای که هزینه‌های سفر کاهش یابد، توسعه داده شده است. این مدل در فصل‌های ۲۰۱۶-۲۰۱۷ و ۲۰۱۷-۲۰۱۸ استفاده شد و نشان داد که تخصیص‌های بهینه باعث کاهش ۲۶٪ در هزینه‌های سفر داوران شده است [۱۸].

در مطالعه دیگری در سال ۲۰۲۲، به بررسی مدل برنامه‌ریزی غیرخطی صفر و یک برای بهینه‌سازی روزهای مسابقه در لیگ فوتبال ترکیه پرداخته شده است [۱۹]. این تحقیق، هدف اصلی خود را توزیع عادلانه روزهای مسابقه برای تمام تیم‌ها، کاهش نابرابری‌ها در برنامه‌ریزی، به‌ویژه تعداد بازی‌های برگزارشده در روزهای نامطلوب (جمعه‌ها و

دوشنبه‌ها) قرار داده است. نتایج نشان داد که مدل بهینه‌شده به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای از برنامه‌ریزی دستی فدراسیون فوتبال ترکیه بهتر عمل کرده و عدالت را در توزیع روزهای مسابقه بهبود بخشیده است. مطالعه دیگری در سال ۲۰۲۲، به مسأله کاهش تعداد وقفه‌ها در تورنمنت‌های دوگانه^{۱۰} پرداخته شده است [۲۰]. این تحقیق با فرمول‌بندی مسأله به‌صورت برنامه‌ریزی عددصحيح مختلط به تحلیل آن پرداخته است.

مطالعه‌ای دیگر در سال ۲۰۲۳ به بهینه‌سازی برنامه‌ریزی روزهای مسابقه در لیگ فوتبال ترکیه پرداخته است [۲۱]. این تحقیق به بررسی چالش‌های توزیع عادلانه روزهای مسابقه و کاهش انحرافات از توزیع ایده‌آل روزهای مسابقه پرداخته است. هدف اصلی این تحقیق، ارائه برنامه‌ریزی مناسب برای تمام تیم‌ها با توجه به محدودیت‌های اقتصادی بود. در این مطالعه، مدل برنامه‌ریزی عددصحيح صفر و یک^{۱۱} به‌کار گرفته شده و نتایج نشان داد که این مدل توانسته است برنامه‌ریزی بهتری نسبت به برنامه‌ریزی دستی فدراسیون فوتبال ترکیه^{۱۲} ارائه دهد.

در مقاله دیگری که به بررسی مسأله کاهش وقفه‌ها در تورنمنت‌های دوگانه آینده‌ای پرداخته است، دو روش بهینه‌سازی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند که شامل فرمول‌بندی بدون محدودیت صفر و یک و فرمول‌بندی عدد صحيح مختلط است. این تحقیق نشان داد که مدل بهینه‌سازی بدون محدودیت صفر و یک، به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای نسبت به برنامه‌ریزی عدد صحيح مختلط، عملکرد بهتری دارد و برای مسائل بزرگ‌تر، سریع‌تر و کارآمدتر عمل می‌کند [۲۲].

۱.۲. دسته‌بندی مطالعات پیشین

در این بخش مقاله‌های بررسی شده بر اساس زیرحوزه مورد مطالعه، به سه بخش توالی مسابقات، زمان‌بندی مسابقات و تخصیص داور در جدول ۱، دسته‌بندی شده‌اند. همچنین نوع مدل‌سازی، روش حل و محدودیت‌های استفاده شده در هر کدام آورده شده است. بیشتر مقاله‌ها از برنامه‌ریزی

عددصحيح، جهت مدل‌سازی مسئله استفاده کرده‌اند و اکثر روش‌های پیشنهادی شامل ابتکاری^{۱۳} و فراابتکاری^{۱۴} بوده‌اند. محدودیت‌های برنامه‌ریزی مسابقات ورزشی را می‌توان به چهار دسته کلی تقسیم کرد که شامل محدودیت‌های مرتبط با عدالت برگزاری بازی‌ها، محدودیت‌های مربوط به داوران، محدودیت‌های زمانی و محدودیت‌های مکانی است. محدودیت‌های عدالت، شامل رعایت توالی مناسب بازی‌های سخت و آسان برای هر تیم و میزبانی و میهمانی یک در میان است، به طوری که هیچ تیمی با دو بازی متوالی دشوار روبه‌رو نشود و توزیع میزبانی‌ها عادلانه باشد. در زمینه داوران، محدودیت‌هایی نظیر تعیین تعداد مشخصی بازی برای هر داور، اختصاص استراحت کافی پس از هر دوره داور و جلوگیری از قضاوت‌های تکراری برای تیم‌ها اهمیت دارد. محدودیت‌های زمانی نیز بر برنامه‌ریزی مطلوب بازی‌های حساس، تعریف فاصله زمانی مناسب بین مسابقات متوالی هر تیم و جلوگیری از هم‌زمانی بازی‌های مهم متمرکز است. در نهایت، محدودیت‌های مکانی شامل جلوگیری از برگزاری هم‌زمان بازی‌های تیم‌هایی است که ورزشگاه مشترک دارند و همچنین عدم تخصیص بیش از یک مسابقه به هر ورزشگاه در یک روز معین می‌باشد. بررسی ادبیات پژوهش نشان می‌دهد که هر یک از مقاله‌های حوزه زمان‌بندی مسابقات، مجموعه متفاوتی از این محدودیت‌ها را مورد توجه قرار داده‌اند.

دسته‌بندی مقاله‌های منتخب از نظر پوشش این محدودیت‌ها، حاکی از روند رو به رشد توجه پژوهشگران به تحقق عدالت، تخصیص مناسب داوران، مسائل زمانی و مکانی است. پژوهش حاضر، با پوشش هم‌زمان هر چهار دسته محدودیت، به عنوان یکی از کامل‌ترین مدل‌ها در این حوزه معرفی می‌شود. این رویکرد جامع با مقاله‌های پیشین که عموماً بر یک یا دو دسته از محدودیت‌ها تمرکز داشته‌اند، تفاوت‌هایی دارد و گامی مناسب در حل مسئله زمان‌بندی رقابت‌های ورزشی بر می‌دارد.

جدول ۱. دسته بندی مطالعات پیشین در زمینه برنامه ریزی مسابقات فوتبال (Classification of previous studies on the planning of football matches)

Number	Article No.	Year	Sub-category			Solution method	Modeling	Constraints			
			Referee assignment	Time scheduling	Sequencing of matches			Referee	Time	Fair	Venue
1	[4]	2008	✓			Hungarian method	IP	✓		✓	
2	[5]	2010		✓	✓	Iterated local search	IP	✓		✓	✓
3	[11]	2012		✓	✓	CPLEX	IP			✓	✓
4	[6]	2013	✓			A pattern-based approach	IP			✓	
5	[8]	2013			✓	Gurobi	IP		✓	✓	✓
6	[9]	2014	✓		✓	Genetic algorithm	IP	✓		✓	
7	[12]	2015	✓		✓	CPLEX	BIP	✓		✓	
8	[13]	2017	✓		✓	Genetic algorithm	MILP	✓	✓	✓	
9	[14]	2017			✓	Branch and bound	MILP	✓		✓	
10	[15]	2018			✓	CPLEX	^{1°} NLBIP	✓			✓
11	[16]	2019		✓	✓	CPLEX	IP	✓		✓	
12	[17]	2020	✓		✓	Evolutionary algorithm	IP		✓	✓	✓
13	[18]	2021	✓		✓	Rolling horizon	IP	✓		✓	
14	[19]	2022		✓		Dynamic programming	NLBIP	✓		✓	✓
15	[10]	2022			✓	CPLEX	IP			✓	✓
16	[20]	2022			✓	Branch and cut	^{1*} MIQP	✓	✓		✓
17	[7]	2023			✓	Fix and optimize	IP			✓	✓
18	[21]	2023		✓		Dynamic programming	NLBIP		✓	✓	✓
19	[22]	2023			✓	Branch and cut	MIQP	✓		✓	
20	Current Research	2025	✓	✓	✓	Python (pulp library)	MILP	✓	✓	✓	✓

این عدالت، ابعاد مختلف از جمله رعایت فاصله مناسب بین بازی‌های هر تیم، توزیع منصفانه داوران با سطوح مختلف تجربه و همچنین برقراری تعادل در نقش میزبان و مهمان بودن تیم‌ها در طول فصل را در بر می‌گیرد. فرآیند زمان‌بندی لیگ در دو مرحله صورت می‌گیرد. مرحله اول به تعیین توالی دیدارها، نقش میزبان و مهمان برای هر مسابقه و همین‌طور تخصیص داوران به دیدارها در هر هفته اختصاص یافته است. پس از اتمام مرحله اول و تعیین ساختار کلی فصل، در مرحله دوم تخصیص دقیق روز و ساعت برگزاری هر مسابقه به‌گونه‌ای

۳. تعریف و مدل‌سازی مساله

در این بخش، ابتدا، تعریف مسئله، مفروضات و تابع هدف آن بیان می‌شود. سپس، نمادهای مسئله و مدل‌سازی آن ارائه می‌شود.

۱.۳ تعریف مسئله

در این پژوهش، یک مدل ریاضی برای زمان‌بندی مسابقات لیگ فوتبال رفت و برگشت ارائه شده است که تمرکز اصلی آن بر تحقق عدالت در روند برگزاری مسابقات فوتبال است.

انجام می‌شود که محدودیت‌های زمانی و مکانی رعایت شود. جدول ۲، نمایش‌دهنده یک خروجی از مرحله اول برنامه‌ریزی است. در این جدول فرض شده است که هشت تیم در یک لیگ، بازی رفت و برگشتی انجام می‌دهند. پس در مجموع $2(n-1)=14$ هفته وجود دارد که در هر هفته، هر تیم، دقیقاً یک بازی باید انجام دهد. خروجی مدل‌سازی شامل یک متغیر چهار بعدی است که به ترتیب، تیم میزبان، تیم میهمان، داور (داخل جدول) و اندیس هفته (ستون جدول) است.

در مرحله دوم با توجه به خروجی مرحله اول، باید برای هر هفته یک مسئله بهینه‌سازی دیگر با محدودیت‌های جدید به منظور تعیین روز و ساعت مسابقه حل شود. به این منظور نیاز به تعریف دو مجموعه روز شامل شنبه تا جمعه و ساعت شامل دو ساعت {۱۷ و ۲۱} است. به منظور سادگی، فرض شده است که مسابقات به صورت هم‌زمان برگزار نمی‌شوند. جدول ۳ نتایج خروجی این مرحله را نشان می‌دهد که برای یک هفته مشخص بیان می‌کند که در چه مسابقاتی در چه روز و ساعتی برگزار شوند.

جدول ۲. شمای کلی از خروجی مرحله اول برنامه‌ریزی مسابقات فوتبال (Overview of the output of the first stage of football league planning)

Week 1	Week 2	Week 3	Week 4	Week 5	Week 6	...	Week 14
A-B-1	A-D-5	A-C-1	A-E-5	A-G-2	A-F-6		H-A-5
C-D-2	B-C-6	B-D-5	D-F-6	E-B-1	E-D-1		B-F-6
E-F-3	E-G-1	E-H-4	C-H-4	F-C-6	H-B-3		C-E-1
G-H-4	F-H-2	F-G-2	G-B-1	H-D-5	C-G-2		D-G-2

جدول ۳. شمای کلی از خروجی مرحله دوم برنامه‌ریزی مسابقات فوتبال (Overview of the output of the second stage of football league planning)

Day Time	Saturday	Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday
17:00	A-B-1	G-H-4		C-D-5			A-D-5
21:00	E-F-3						E-G-1

۲.۳. مفروضات

در این مساله، مفروضات زیر وجود دارد:

که به تازگی به لیگ صعود کرده باشند تیم ضعیف محسوب می‌شوند. این فرض به برقراری برخی محدودیت‌ها از جمله محدودیت اثر بازی با تیم‌های قوی به صورت متوالی و تخصیص داور قوی به بازی‌های مهم کمک خواهد کرد.

• داوران با توجه به سطح تجربه و تخصص، به دو دسته باتجربه و تازه‌کار تقسیم‌بندی شده‌اند. داوران با تجربه به داورانی گفته می‌شود که بیش از ۱۰ سال سابقه قضاوت در لیگ را داشته باشند یا سابقه قضاوت مسابقه بین‌المللی را دارا باشند. داورانی که

• در این مسئله تیم‌ها به دو دسته قوی و ضعیف تقسیم‌بندی شده‌اند. معیار این دسته‌بندی، متوسط امتیازات هر تیم در دو فصل گذشته است. به این صورت که تیم‌ها بر اساس متوسط امتیازاتشان در دو فصل گذشته رده بندی خواهند شد و تیم‌هایی که بیشتر از دو سوم امتیازات ممکن را کسب کرده باشند تیم قوی محسوب می‌شوند و باقی تیم‌ها در دسته ضعیف قرار می‌گیرند، تیم‌هایی

کمتر از ۱۰ سال در یک لیگ قضاوت کرده باشند یا سابقه قضاوت بین‌المللی نداشته باشند، در دسته تازه کار قرار می‌گیرند.

- فرض شده‌است که هر شهر دارای یک ورزشگاه هست و به این ترتیب تیم‌هایی که از یک شهر هستند، به صورت مشترک از یک ورزشگاه استفاده می‌کنند.
- فرض شده‌است که بازی تیم‌ها به صورت آینه‌ای^{۱۷} برگزار می‌شوند، به بیان دیگر برنامه‌ریزی در نیم فصل انجام خواهد شد و سپس برای نیمه دوم فصل به همان ترتیب اما تیم‌های میزبان و میهمان جابه‌جا می‌شوند.
- در مرحله دوم، فرض می‌شود که بازی‌ها تنها می‌توانند در دو ساعت ۱۷ و ۲۱ برگزار شوند. همچنین فرض می‌شود که در هر روز و هر ساعت حداکثر یک بازی انجام شود، به بیان دیگر از انجام بازی‌ها به صورت همزمان جلوگیری می‌شود.

۳.۳. تابع هدف

تابع هدف این مدل، کمینه‌سازی انحرافات موزون از معیارهای عدالت در نظر گرفته شده‌است که در ادامه تشریح شده‌است.

معیارهای عدالت مرحله اول:

- ترجیح بر این است یک داور، قضاوت هر دو دیدار رفت و برگشت دو تیم را بر عهده نداشته باشد.
- ترجیحاً هر داور دو بازی متوالی از یک تیم را قضاوت نکند.
- مسابقات بین تیم‌های قوی بهتر است توسط داوران

مجرب قضاوت شوند.

- بهتر است توزیع داوران میان مسابقات به‌گونه‌ای باشد که تعادل رعایت شده و تمامی تیم‌ها به میزان یکسانی با داوران مجرب و تازه‌کار روبه‌رو شوند.
- ترجیحاً داوران پس از تعداد مشخصی قضاوت استراحت داشته باشند.
- تعداد مسابقاتی که هر داور قضاوت می‌کند به‌گونه‌ای تنظیم شده که از توزیع نامتعادل جلوگیری شود.
- حداقل امکان تناوب بین میزبان و میهمان بودن تیم‌ها رعایت شود.
- یک تیم ضعیف حداقل امکان با دو تیم قوی بازی متوالی نداشته باشد.
- برای تیم‌هایی که ورزشگاه مشترک دارند، تلاش شده که در یک هفته هم‌زمان میزبان نباشند.

معیارهای عدالت مرحله دوم:

- برنامه‌ریزی به‌گونه‌ای انجام شود که مسابقات حساس ترجیحاً در روزهای تعطیل برگزار شوند.
- ترجیحاً دو بازی حساس در یک روز نباشند.
- ترجیحاً توزیع ساعات مسابقات هر تیم بین ساعت ۱۷ و ۲۱ متعادل باشد.
- فاصله مشخصی بین بازی‌های هر تیم در نظر گرفته شود تا از فشار بیش از حد به بازیکنان جلوگیری گردد.

۴.۳. تعریف نمادها

در این بخش، تعریف نمادهای مسئله شامل مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرهای مسئله در جداول ۴ تا ۶ آورده شده‌است.

جدول ۴. معرفی مجموعه‌های مدل ریاضی پیشنهادی (The sets of the proposed mathematical model)

Set	Description	Set	Description
R	Set of referees	$I=TOP \cup Weak$	Set of teams
$S \subseteq R$	Set of experienced referees	TOP	Set of strong teams
D	Set of days of the week (Saturday to Friday)	$Weak$	Set of weak teams

H	Set of holidays (Thursday and Friday)	C	Set of cities with at least two teams
T	Set of match times	$Same_c$	Set of teams in city c
W_1	Set of weeks in the first half of the season	W	Set of weeks in the season
dw	Set of pre-weekend game days: {Wednesday, Thursday, Friday}	$S(dw)$	Set of impossible game days in the following week for each pre-weekend day: For Wednesday: {Saturday} For Thursday: {Saturday, Sunday} For Friday: {Saturday, Sunday, Monday}

جدول ۵. معرفی پارامترهای مدل ریاضی پیشنهادی (The parameters of the proposed mathematical model)

Parameter	Description	Parameter	Description
$m_{i,j,r,w}$	Output of the first stage specifying that team i plays against team j with referee r in week w	$gameplay$	Number of matches officiated by each referee during the season
$Pen_{restgame}$	Penalty for a team playing two consecutive matches in less than n days	T	Number of matches a referee should not officiate consecutively
$Pen_{holiday}$	Penalty for scheduling a match between two strong teams on a day outside of set H	Pen_{HAT}	Penalty for two consecutive home or away matches for a team
$Pen_{strongteams}$	Penalty for scheduling two matches between strong teams on the same day	$Pen_{Carryover}$	Penalty for consecutive matches against strong teams
$Pen_{excessgame}$	Penalty for scheduling more matches than allowed at a specific time slot	Pen_{Same}	Penalty for assigning one stadium to two teams from the same city in one week
$Pen_{shortfallgame}$	Penalty for scheduling fewer matches than allowed at a specific time slot	$Pen_{weight-excess} / Pen_{weight-shortfall}$	Penalty for assigning a referee to more/less than the specified number of matches
$Pen_{GameTwice}$	Penalty for assigning a referee to both legs of a home-and-away match	$Pen_{refereerest}$	Penalty for no rest given to a referee after T consecutive matches
$Pen_{BackToBack}$	Penalty for assigning a referee to consecutive matches for a single team	Pen_{strong}	Penalty for assigning a non-elite referee to a strong vs. strong match
		$Pen_{weight-over} / Pen_{weight-under}$	Penalty for assigning elite referees to more/less than half of a particular team's matches

جدول ۶. معرفی متغیرهای تصمیم‌گیری مدل پیشنهادی (Decision variables of the proposed mathematical model)

Decision variable	Description	Decision variable	Description
$X_{i,j,r,w,d,t}$	1, if team i is the home team against team j with referee r in week w on day d and at time t ; 0 otherwise.	$x_{i,j,w}$	1, if team i has a home match against team j in week w ; 0 otherwise.
$dholiday_{i,j,r,w,t}$	1, if strong teams i and j play with referee r at time t in week w on a non-holiday; 0 otherwise.	$y_{i,j}$	1, if team i has consecutive home matches in weeks w and $w + 1$; 0 otherwise.

$dstrongteams_{d,w}$	1, if two strong-strong matches are held on day d in week w ; 0 otherwise.	$m_{i,j,r,w}$	1, if team i has a home match against team j with referee r in week w ; 0 otherwise.
$shortfall_i / excess_i$	The surplus/shortage of matches played by team i at 17:00 from the allowed limit. (The allowed limit is half of the matches.)	$dHAt_i$	An integer variable that indicates the number of consecutive home matches for team i .
$drestgame_{i,j,w,d}$	1, if either team i or team j plays two consecutive matches in week w or $w+1$ on day d , with the matches being less than 3 days apart; 0 otherwise.	$dCarryOver_{i,j1,j2,w}$	1, if in weeks w and $w+1$, consecutive matches occur between team i , j_1 , and j_2 ; 0 otherwise.
$Excess_r / Shortfall_r$	The surplus or shortage of matches for referee r compared to the ideal gameplay amount throughout the season.	$dSame_{w,c}$	1, if a shared stadium is assigned to two teams from city c in week w ; 0 otherwise.
$Over_i / Under_i$	The number of matches above/below the allowed limit for team i that are officiated by an elite referee. (The allowed limit is more than half of the matches.)	$drest_{r,w}$	1, if referee r does not rest after T consecutive matches in week w ; 0 otherwise.
$dGameTwice_{i,j,r,w}$	1, if referee r is assigned to both legs of home-and-away matches between teams i and j in week w ; 0 otherwise.	$dNostrong_{i,j,w}$	1, if a non-elite referee is assigned to a match between two strong teams i and j in week w ; 0 otherwise.
		$dBackToBack_{i,r,w}$	1, if referee r is assigned to consecutive matches for team i in weeks w and $w+1$; 0 otherwise.

۵.۳. مدل سازی

مدل سازی مرحله اول:

$$\begin{aligned}
 MinZ = & pen_{HAT} * \sum_{i \in I} dHAt_i + pen_{Carryover} * \sum_{i \in I} \sum_{w \in W} \sum_{j1 \in TOP} \sum_{j2 \in TOP} dCarryover_{i,j1,j2,w} \\
 & + Pen_{weightexcess} * \sum_{r \in R} Excess_r + pen_{backtoback} * \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} \sum_{w \in W} dBacktoBack_{i,r,w} \\
 & + pen_{Same} * \sum_{w \in W} \sum_{c \in C} dSame_{c,w} + Pen_{strong} * \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{w \in W} Notstrong_{i,j,w} \\
 & + Pen_{refereerest} * \sum_{w \in W} \sum_{r \in R} drest_{r,w} + Pen_{weightover} * \sum_{i \in I} over_i + Pen_{weightunder} * \sum_{i \in I} under_i \\
 & + Pen_{Gametwice} * \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{w \in W} \sum_{r \in R} dGametwice_{i,j,r,w} + Pen_{weightshortfall} * \sum_{r \in R} Shortfall_r \\
 \text{s.t.}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\sum_{w \in W1} (x_{i,j,w} + x_{j,i,w}) = 1 \quad \forall i, j \in I, i \leq j \tag{2}$$

$$\sum_{j \in I, j \neq i} (x_{i,j,w} + x_{j,i,w}) = 1 \quad \forall i \in I, \forall w \in W1 \tag{3}$$

$$x_{i,j,w} = x_{j,i,w+|W|} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall w \in W \tag{4}$$

$$\sum_{i \in SAME_C} \sum_{j \notin SAME_C} x_{i,j,w} + \sum_{i \in SAME_C} \sum_{j \in SAME_C, i \neq j} x_{i,j,w} - dSame_{w,c} \leq 1 \quad \forall c \in C, \forall w \in W \tag{5}$$

$$x_{i,j1,w} + x_{i,j2,w+1} + x_{j1,i,w} + x_{j2,i,w+1} - dCarryOver_{i,j1,j2,w} \leq 1 \quad \forall i \in Weak, \forall j1, j2 \in TOP, j1 \neq j2, \forall w \in W, w \neq |W| \tag{6}$$

$$\sum_{j \in I, j \neq i} (x_{i,j,w} + x_{i,j,w+1} \leq 1 + y_{i,w} \quad \forall i \in I, w \in W, w \leq |W| - 1 \quad (7)$$

$$\sum_{w \in W} y_{i,w} - dHAt_i = 0 \quad \forall i \in I \quad (8)$$

$$\sum_{r \in R} m_{i,j,w,r} = x_{i,j,w} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall w \in W \quad (9)$$

$$\sum_{j \in I} \sum_{i \in I, i \neq j} m_{i,j,w,r} \leq 1 \quad \forall r \in R, \forall w \in W \quad (10)$$

$$\sum_{r \in R/S} y_{i,j,w,r} - dNostrong_{i,j,w} \leq 0 \quad \forall i, j \in TOP, \forall w \in W \quad (11)$$

$$m_{i,j,w,r} + m_{j,i,w+|W|,r} - dGameTwice_{i,j,w,r} \leq 1 \quad \forall i, j \in I, j \neq i, \forall w \in W, \forall r \in R \quad (12)$$

$$\sum_{j \in I, i \neq j} (m_{i,j,w,r} + m_{j,i,w,r} + m_{i,j,w+1,r} + m_{j,i,w+1,r}) - dBacktoBack_{i,r,w} \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall w \in W, \forall r \in R \quad (13)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I, i \neq j} \sum_{t \in W, w \leq t \leq w+T-1} m_{i,j,t,r} - dRest_{w,t} \leq T - 1 \quad \forall w \in |W| - (T - 1), \forall r \in R \quad (14)$$

$$\sum_{r \in S} \sum_{j \in I, i \neq j} \sum_{w \in W} m_{i,j,w,r} - (n - 1) \leq Over_i - Under_i \quad \forall i \in I \quad (15)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I, i \neq j} \sum_{w \in W} m_{i,j,w,r} - gameplay \leq Excess_r - Shortfall_r \quad \forall r \in R \quad (16)$$

بازی در هفته برای هر داور جلوگیری می‌کند. رابطه (۱۱) تلاش می‌کند تا داوری بازی‌های حساس را به داوران قوی محدود کند و انحرافات از این معیار را محاسبه کند. رابطه (۱۲)، حداکثر از داوری یک بازی رفت و برگشت توسط یک داور جلوگیری می‌کند و انحرافات از این معیار را محاسبه می‌کند. رابطه (۱۳) تلاش می‌کند تا مانع داوری متوالی بازی‌های یک تیم توسط یک داور شود و انحرافات از این معیار را محاسبه می‌کند. رابطه (۱۴) تلاش می‌کند که داور پس از T بازی متوالی استراحت داشته‌باشد و انحرافات از این معیار را محاسبه می‌کند. رابطه (۱۵) تلاش می‌کند بازی‌های هر تیم را بین داوران قوی و تازه‌کار به طور متوازن تقسیم کند و انحرافات از این معیار را محاسبه می‌کند. رابطه (۱۶) مشخص می‌کند که هر داور باید در طول فصل تعداد مشخصی بازی را قضاوت کند و میزان کمبود و مازاد این انحراف را محاسبه می‌کند.

تابع هدف (۱) مجموع جریمه موزون را برای معیارهای بیان‌شده در بخش ۳.۳ کمینه می‌کند. رابطه (۲) برای هر جفت تیم در نیم‌فصل اول یک بازی را برنامه‌ریزی می‌کند. رابطه (۳) برای هر تیم در هر هفته یک بازی را برنامه‌ریزی می‌کند. رابطه (۴) بازی‌های رفت و برگشت را به صورت آینه‌ای برنامه‌ریزی می‌کند. رابطه (۵) حداکثر از میزبانی هم‌زمان تیم‌های یک شهر جلوگیری می‌کند و انحرافات مربوط به این معیار را محاسبه می‌کند. رابطه (۶) تلاش می‌کند تا مانع رویارویی متوالی تیم‌های ضعیف با تیم‌های قوی شود و میزان انحراف این معیار را محاسبه می‌کند. رابطه (۷)، سعی در متناوب کردن ترتیب میزبان و میهمان بودن بازی‌های هر تیم را دارد و انحراف از این معیار را برای هر تیم محاسبه می‌کند. رابطه (۸) جمع میزان انحرافات رابطه (۷) برای همه تیم‌ها را محاسبه می‌کند. رابطه (۹)، هر بازی را به یک داور اختصاص می‌دهد. رابطه (۱۰) از قضاوت بیش از یک مدل‌سازی مرحله دوم:

$$\begin{aligned} MinZ = & Pen_{holiday} \sum_{r \in R} \sum_{w \in W} \sum_{i \in TOP} \sum_{j \in TOP} \sum_{t \in T} d_{holiday_{i,j,r,w,t}} \\ & + Pen_{strongteams} \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} d_{strongteams_{d,w}} + Pen_{shortfallgame} \sum_{i \in I} shortfall_i \end{aligned} \quad (17)$$

$$+ Pen_{excessgame} \sum_{i \in I} excess_i + Pen_{restgame} \sum_{i \in I} \sum_{w \in W} \sum_{d \in D} \sum_{j \in I} d_{restgame_{i,j,w,d}}$$

s.t.

$$\sum_{d \in D} \sum_{t \in T} X_{i,j,w,r,d,t} = m_{i,j,w,r} \quad \forall i, j \in I, \forall w \in W, \forall r \in R \quad (18)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I, i \neq j} \sum_{r \in R} X_{i,j,w,r,d,t} \leq 1 \quad \forall d \in D, \forall t \in T, \forall w \in W \quad (19)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I, i \neq j} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} X_{i,j,r,w,d,t} \leq t \quad \forall d \in D, \forall w \in W \quad (20)$$

$$\sum_{d \in D/H} X_{i,j,r,w,d,t} - d_{holiday_{i,j,r,w,t}} \leq 0 \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall w \in W, \forall r \in R, \forall t \in T \quad (21)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{t \in T} X_{i,j,r,w,d,t} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} X_{p,b,r,w,d,t} - d_{stronteam_{s,d,w}} \leq 1 \quad \forall i, \forall j, \forall p, \forall b \in TOP, i \neq j, p \neq b, \forall d \in D, \forall w \in W \quad (22)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{w \in W} \sum_{d \in D} \sum_{j \in I, i \neq j} X_{i,j,r,w,d,21} - \sum_{r \in R} \sum_{w \in W} \sum_{d \in D} \sum_{j \in I, i \neq j} X_{i,j,r,w,d,17} \leq excess_i - shortfall_i \quad \forall i \in I \quad (23)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{t \in T} X_{i,j,r,w,d,t} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} X_{j,i,r,w,d,t} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} \sum_{d' \in S(d)} \sum_{k \in I, k \neq i} X_{j,k,r,w+1,d',t} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} \sum_{d' \in S(d)} \sum_{k \in I, k \neq i} X_{i,k,r,w+1,d',t} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} \sum_{d' \in S(d)} \sum_{k \in I, k \neq i} X_{k,j,r,w+1,d',t} \quad (24)$$

$$+ \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} \sum_{d' \in S(d)} \sum_{k \in I, k \neq i} X_{k,i,r,w+1,d',t} - d_{restgame_{i,j,w,d}} \leq 1 \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall w \in W, \forall d \in D$$

این است که اگر تیمی در روزهای شنبه، یکشنبه، دوشنبه و سه‌شنبه بازی داشته باشد، بازی آن تیم در هفته آینده قطعا دارای حداقل ۳ روز فاصله است، ولی برای سه روز فوق، با لحاظ این محدودیت حداقل ۳ روز فاصله اعمال می‌شود. هرگونه انحراف از این معیار، اندازه‌گیری شده و در تابع هدف لحاظ می‌شود.

۴. پیاده سازی نتایج

در این بخش، نتایج پیاده‌سازی مدل ارائه شده در ۱۰ مسئله متفاوت آورده شده است. مدل ارائه شده در نرم‌افزار پایتون^{۱۸} برنامه‌نویسی و با کتابخانه *pulp* حل شده است. لپ‌تاپ مورد استفاده دارای مشخصات *CPU: Intel Core i5 1035G* و *RAM: 8GB* است.

۱.۴. مشخصات مسائل

در جدول ۷ ورودی‌های هر مسئله آورده شده است که به صورت تصادفی تولید شده‌است.

جدول ۷. مشخصات مسائل مورد استفاده (Specifications of the problems used)

Problem	# Teams	#Referees	#Strong teams	#Elite referees	T	Number of assignments	#Cities
1	4	2	2	1	4	6	4
2	4	4	2	1	4	3	4
3	4	4	3	2	4	3	3
4	4	6	3	2	3	2	2
5	6	3	2	1	5	10	6
6	6	4	2	2	4	7	4
7	6	4	3	2	4	8	3
8	6	6	2	3	3	5	3
9	6	6	2	3	3	5	2
10	8	6	2	3	5	9	6

تابع هدف رابطه (۱۷)، جریمه‌های مربوط به معیارهای بخش ۳-۳ برای مرحله دوم را کمینه می‌کند. رابطه (۱۸)، هر بازی را به یک روز و ساعت مشخص اختصاص می‌دهد. رابطه (۱۹)، محدودیت برگزاری هم‌زمان بیش از یک بازی در یک روز و ساعت را اعمال می‌کند. رابطه (۲۰) حداکثر تعداد بازی‌های روزانه را محدود می‌کند که در اینجا حداکثر دو بازی در روز است. رابطه (۲۱) تلاش می‌کند تا بازی‌های تیم‌های قوی را به روزهای تعطیل محدود کند. هرگونه انحراف از این معیار، اندازه‌گیری شده و در تابع هدف لحاظ می‌شود. رابطه (۲۲)، حداکثر مانع از برگزاری هم‌زمان دو بازی بین تیم‌های قوی در یک روز می‌شود. انحرافات از این معیار اندازه‌گیری و در تابع هدف گنجانده می‌شود. رابطه (۲۳)، به توزیع متعادل بازی‌ها در ساعت‌های مختلف می‌پردازد. انحرافات از توزیع متعادل ساعات بازی‌ها اندازه‌گیری شده و در تابع هدف برای بهبود توزیع زمان‌بندی‌ها لحاظ می‌شود. رابطه (۲۴) از انجام دو بازی برای یک تیم در کمتر از سه روز جلوگیری می‌کند. علت اینکه این محدودیت، فقط برای روزهای چهارشنبه، پنج‌شنبه و جمعه در نظر گرفته شده‌است

۲.۴. گزارش نتایج برای مسئله چهار

در مرحله دوم، که شامل زمان‌بندی دقیق هر مسابقه (روز و ساعت برگزاری) است، مدل توانسته است بدون نقض معیارهای عدالت مرحله دوم، یک جدول زمان‌بندی با مقدار تابع هدف صفر ارائه دهد. به این معنی که تخصیص روز و ساعت برگزاری به گونه‌ای انجام شده است که تمام معیارهای عدالت تعریف شده رعایت شده‌اند. نتایج این مرحله در جدول ۹ قابل مشاهده است. نکته مهم دیگر این است که جواب ارائه شده توسط مدل، یکتا نیست؛ یعنی جداول زمان‌بندی دیگری نیز با تابع هدف صفر وجود دارند. این جواب‌های بهینه چندگانه، انعطاف‌پذیری بیشتری در انتخاب برنامه نهایی ایجاد می‌کند. در مجموع، داده‌های این دو جدول نشان می‌دهد که در ابعاد کوچک، چالش اصلی مدل بیشتر بر روی توزیع عادلانه داوران و رعایت محدودیت‌های مربوط به آن‌ها (مرحله اول) است، در حالی که حل مرحله زمان‌بندی روز و ساعت (مرحله دوم)، معمولاً در زمانی کوتاه و با نقض ناچیز معیارهای در نظر گرفته شده انجام می‌شود.

در این بخش، به منظور نمایش و تحلیل خروجی مساله، نتایج بر روی مساله چهارم گزارش می‌شود. با توجه به جدول ۷، مسئله چهارم شامل یک لیگ با چهار تیم (سه تیم قوی) و شش داور (دو داور باتجربه) است. حل مرحله اول این مساله ۵.۲ ثانیه به طول انجامید و تابع هدف برابر ۱۴۱ است. این عدد، نشان‌دهنده نقض جزئی برخی از معیارهای عدالت در نظر گرفته شده برای مرحله اول است که به عنوان نمونه شامل تخصیص متوازن داوران (محدودیت ۱۵)، داوری متوالی برای یک تیم (محدودیت ۱۳) و استفاده از داوران باتجربه (محدودیت ۱۱) در مسابقات کلیدی است. جدول ۸، خروجی‌های مدل‌سازی مرحله اول شامل نحوه برنامه‌ریزی مسابقات و تخصیص داور برای هر هفته را نشان می‌دهد. با توجه به این جدول، توزیع داوران میان تیم‌ها تا حد امکان به صورت متنوع انجام شده و از تمامی داوران موجود استفاده شده است.

جدول ۸. نتایج مدل‌سازی مرحله اول برای مسئله چهارم (First-stage modeling results for the fourth problem)

Week 1	Week 2	Week 3	Week 4	Week 5	Week 6
Team2 - Team4 Referee5	Team1 - Team2 Referee1	Team1 - Team4 Referee2	Team1 - Team3 Referee3	Team2 - Team1 Referee5	Team2 - Team3 Referee1
Team3 - Team1 Referee2	Team4 - Team3 Referee6	Team3 - Team2 Referee4	Team4 - Team2 Referee1	Team3 - Team4 Referee2	Team4 - Team1 Referee6

جدول ۹. نتایج مدل‌سازی مرحله دوم مسئله چهارم (Second-stage modeling results for the fourth problem)

Host Team	Away Team	Referee	Week	Day	Time
Team3	Team1	Referee2	1	Thursday	17:00
Team2	Team4	Referee5	1	Tuesday	21:00
Team1	Team2	Referee1	2	Friday	21:00
Team4	Team3	Referee6	2	Monday	21:00
Team3	Team2	Referee4	3	Thursday	17:00
Team1	Team4	Referee2	3	Thursday	21:00
Team4	Team2	Referee1	4	Friday	17:00
Team1	Team3	Referee3	4	Thursday	21:00
Team3	Team4	Referee2	5	Friday	17:00
Team2	Team1	Referee5	5	Thursday	17:00
Team2	Team3	Referee1	6	Friday	21:00
Team4	Team1	Referee6	6	Thursday	17:00

۳.۴. نتایج محاسباتی

جدول ۱۰ نتایج محاسباتی مسائل مختلف را در دو مرحله حل نمایش می‌دهد. در مرحله اول، مقادیر ستاره‌دار (*) نشان‌دهنده دستیابی به جواب بهینه برای هر مسئله است. با توجه به جدول، جواب بهینه تمام مسائل مرحله دوم (مقدار بهینه صفر به معنی عدم انحراف از تمام معیارهای عدالت‌محور تعریف‌شده در مرحله دوم است) در زمانی کوتاه تولید شده‌است. علت صفرشدن تابع هدف مرحله دوم کوچک بودن ابعاد مسائل این مرحله نسبت به مرحله اول است. لازم به ذکر است که میانگین زمان حل مسائل مرحله اول و دوم به ترتیب

جدول ۱۰. نتایج محاسباتی مسائل حل شده (Computational results of solved problems)

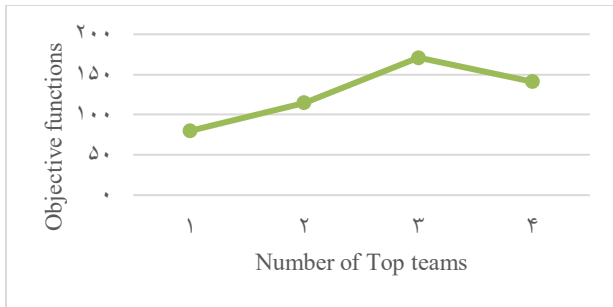
Problem number	First Stage		Second Stage	
	Objective function	Solution time	Objective function	Solution time
1	225*	3.91	0	0.52
2	115*	5.89	0	0.63
3	125*	2.93	0	0.59
4	141*	5.2	0	0.81
5	205*	704	0	1.25
6	72*	515	0	1.14
7	163*	1534	0	0.85
8	64*	259	0	0.64
9	154*	372	0	0.46
10	-	-	-	-
Average	140	378	0	0.77

است تا در هر مسئله داوران باتجربه و تازه کار موجود باشند. نتایج نشان می‌دهد که برابری تعداد داوران باتجربه و تازه کار کمترین میزان انحراف از معیارهای عدالت‌محور را برای این مسئله ایجاد کنند.

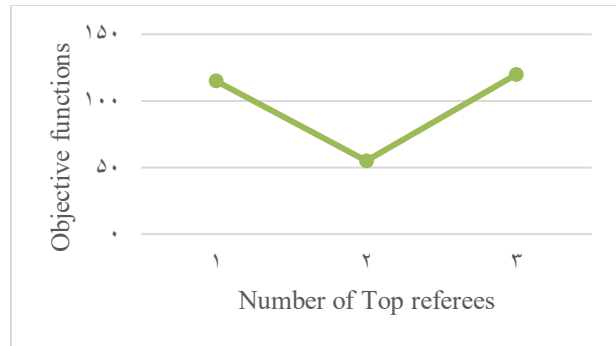
با افزایش تعداد تیم‌های قوی از یک به سه، مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد که ناشی از انحرافات مربوط به وجود داور باتجربه برای قضاوت مسابقات قوی-قوی و همچنین رویارویی پیاپی هر تیم ضعیف با تیم‌های قوی است. زمانی که تعداد تیم‌های قوی به چهار برسد، مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد. دلیل این امر آن است که در این حالت، محدودیت رویارویی یک تیم ضعیف با تیم‌های قوی عملایی معنی است و در نظر گرفته نشده‌است.

۴.۴. تحلیل حساسیت

در این بخش، تحلیل حساسیت بر روی دو پارامتر مسئله شماره دو انجام شده است که شامل تعداد داوران باتجربه و تعداد تیم‌های قوی است. شکل‌های ۱ و ۲، تغییر مقدار تابع هدف مساله مرحله اول را نسبت به تغییر تعداد داوران باتجربه و تعداد تیم‌های قوی نمایش می‌دهد. نتایج شکل ۱، بیانگر آن است که در ابتدا با افزایش تعداد داوران باتجربه، مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد، اما پس از آن، با افزایش تعداد داوران باتجربه، مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که تعداد کل داوران مقدار ثابت چهار است. همان‌طور که بیان شد، حداقل امکان باید بازی‌های هر تیم به طور مساوی توسط داوران باتجربه و کم‌تجربه قضاوت شود. بنابراین لازم



شکل ۲. تغییر مقدار تابع هدف مساله مرحله اول نسبت به تغییر تعداد تیم‌های قوی (-) Change in the objective function of the first stage model relative to the number of experienced referees



شکل ۱. تغییر مقدار تابع هدف مساله مرحله اول نسبت به تغییر تعداد داوران باتجربه (-) Change in the objective function of the first stage model relative to the number of experienced referees

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

این پژوهش با معرفی یک مدل ریاضی برای زمان‌بندی مسابقات لیگ، گامی مؤثر در بهبود برنامه‌ریزی رقابت‌های ورزشی برداشته است. مدل ارائه‌شده با در نظر گرفتن معیارهای عدالت در وضعیت میزبانی و میهمانی تیم‌ها، تخصیص داوران، و زمان‌بندی متوازن مسابقات در هفته‌ها، روزها و ساعات مختلف، ضمن رعایت محدودیت‌های اجرایی، راه‌حلی جامع و عملیاتی پیشنهاد می‌دهد. در این رویکرد، ابتدا برنامه زمان‌بندی، با در نظر گرفتن محدودیت‌ها و معیارهای مرتبط با عدالت و تخصیص داوران و تیم‌ها، به‌گونه‌ای ارائه می‌شود که هفته برگزاری مسابقه، داور، تیم میزبان و میهمان تعیین می‌شوند و در مرحله دوم، روز و ساعت دقیق هر مسابقه مشخص می‌شود. این مدل، محدودیت‌ها و نیازهای تیم‌ها و داوران و تصمیم‌گیری زمانی را به صورت یکپارچه مدنظر قرار داده تا برنامه‌ای منطقی و منصفانه برای برگزاری رقابت‌ها حاصل شود. یکی از مهم‌ترین نقاط قوت پژوهش حاضر، ارائه مدلی جامع است که برای

نخستین بار، مسأله زمان‌بندی مسابقات فوتبال و تخصیص داوران را به‌صورت همزمان و در سطوح هفته، روز و ساعت حل می‌کند؛ در حالی که مدل‌های پیشین معمولاً فقط به یکی از این ابعاد پرداخته‌اند. این یکپارچگی موجب می‌شود که برنامه‌ریزی نهایی هم از نظر توالی مسابقات و هم از حیث تخصیص منصفانه و مؤثر داوران، قابل اتکا و کارآمد باشد.

برای پیشنهادات آتی، می‌توان امکان برگزاری همزمان مسابقات در ورزشگاه‌ها و شهرهای مختلف را در مدل لحاظ کرد. همچنین حذف ساختار آینه‌ای در نیم‌فصل دوم و حرکت به سمت برنامه‌ریزی پویا به‌صورت هفته‌به‌هفته، سبب افزایش انعطاف‌پذیری مدل خواهد شد. در کنار این موارد، در نظر گرفتن معیارهای جدیدی همچون ملیت داوران و فراهم کردن امکان تصمیم‌گیری بر اساس داده‌های واقعی، می‌تواند عدالت برنامه‌ریزی را افزایش دهد. در نهایت، اگرچه استفاده از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی توانسته‌است زمان‌بندی مناسب را برای لیگ‌های شامل حداکثر شش تیم تولید کند، اما برای لیگ‌ها با تعداد تیم‌های بیشتر، نیاز به توسعه روش‌های ابتکاری و فراابتکاری است.

پانویس‌ها

1. Tournament
2. NP-hard
3. Iterated Local Search (ILS)
4. Operation Research (OR)
5. Integer Programming (IP)
6. Pattern-based approach
7. Mixed Integer Programming (MIP)
8. Genetic Algorithm (GA)

9. Constraint Programming (CP)
10. Double Round Robin Table (DRRT)
11. Binary Integer Programming (BIP)
12. Turkish Football Federation (TFF)
13. Heuristic
14. Metaheuristic
15. Nonlinear Binary Integer Programming (NLBIP)
16. Mixed Integer Quadratic Programming (MIQP)
17. Mirrored scheduling

(References) مراجع

1. Fani Sadrabadi, Z. and Alinaghian, M., 2025. An integrated problem of handling equipment scheduling and storage space allocation for inbound containers at container terminals. *Sharif Journal of Industrial Engineering & Management* [In Persian]. <https://doi.org/10.24200/j65.2025.65278.2413>.
2. Mehrabi, M. and Pourseyed, A.M., 2023. maintenance scheduling of metro trains for maximizing the availability of trains (case study of tehran metro line 2). *Sharif Journal of Industrial Engineering & Management* [In Persian]. <https://doi.org/10.24200/j65.2022.57195.2185>.
3. Khamne Bagheri, M. and Barzinpour, F., 2021. a bi-objective mathematical model for nurse scheduling problem considering nurse's preferences based on dea approach. *Sharif Journal of Industrial Engineering & Management*, 36(2.2), pp.15-25 [In Persian]. <https://doi.org/10.24200/j65.2020.53511.2004>.
4. Yavuz, M., İnan, U.H. and Fırlalı, A.F., 2008. Fair referee assignments for professional football leagues. *Computers & Operations Research*, 35, pp.2937–2951. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2007.01.004>.
2. Costa, F.N., Urrutia, S. and Ribeiro, C.C., 2010. An ILS heuristic for the traveling tournament problem with predefined venues. *Annals of Operations Research*, 194, pp.137–150. <http://doi.org/10.1007/s10479-010-0719-9>.
3. Ribeiro, C.C. and Urrutia, S., 2012. Scheduling the Brazilian soccer tournament: solution approach and practice. *Interfaces*, 42(3), pp.260–272. <http://doi.org/10.2307/23254865>.
4. Alarcón, F., Durán, G. and Guajardo, M., 2014. Referee assignment in the Chilean football league using integer programming and patterns. *International Transactions in Operational Research*, 21, pp.415–438. <http://doi.org/10.1111/itor.12049>.
5. Recalde, D., Torres, R. and Vaca, P., 2013. Scheduling the professional Ecuadorian football league by integer programming. *Computers & Operations Research*, 40, pp.2478–2484. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.12.017>.
6. Mancini, S., 2014. Fair referee assignment for the Italian soccer Serie A. *Journal of Sports Analytics*, 10, pp.112–128. <http://doi.org/10.1515/jgas-2013-0108>.
7. Reis, A., 2015. Scheduling the games of the Portuguese major football league and referee assignment based on integer programming. *European Journal of Operational Research*, 210(3), pp.697–707. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.10.021>.
8. Atan, T. and Hüseyinoğlu, Ö.P., 2015. Simultaneous scheduling of football games and referees using Turkish league data. *International Transactions in Operational Research*, 24(3), pp.1–20. <http://doi.org/10.1111/itor.12201>.
9. Durán, G., Guajardo, M. and Sauré, D., 2017. Scheduling the South American Qualifiers to the 2018 FIFA World Cup by integer programming. *European Journal of Operational Research*, 262(3), pp.1109–1115. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.04.043>.
10. Raknes, M. and Pettersen, K.H., 2018. Optimizing sports scheduling: mathematical and constraint programming to minimize traveled distance with benchmark from the Norwegian professional league. *Master Thesis, BI Norwegian Business School*, Oslo, Norway. <http://hdl.handle.net/11250/2579166>.
11. Durán, G., Durán, S. and Marengo, J., 2019. Scheduling Argentina's professional basketball leagues: A variation on the Traveling Tournament Problem. *European Journal of Operational Research*, 275, pp.1126–1138. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.12.018>.
12. Van Bulck, D. and Goossens, D., 2020. Handling fairness issues in time-relaxed tournaments with availability constraints. *Computers & Operations Research*, 115, pp. 104856. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.104856>.
13. Durán, G., Guajardo, M. and Gutiérrez, F., 2021. Efficient referee assignment in Argentinean professional basketball leagues using operations research methods. *Annals of Operations Research, Springer*, vol. 316(2), pp.1121–1139. <https://doi.org/10.1007/s10479-020-03897-x>.

14. Bakır, N.O. and Göçgün, Y., 2022. Optimal matchday schedule for Turkish professional soccer league using nonlinear binary integer programming. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, 12(2), pp.113–127. <http://doi.org/10.11121/ijocta.2022.1161>.
15. Goossens, D. and Beliën, J., 2022. Teaching integer programming by scheduling the Belgian soccer league. *Informatics Transactions on Education*, 23(3), pp.164–172. <http://doi.org/10.1287/ited.2022.0269>.
16. Csato, L., 2022. What is the optimal schedule for the UEFA Champions League groups? *International Transactions in Operational Research*, 31(3), pp 1486–1514. <https://doi.org/10.1111/itor.13391>.
17. Iranpoor, M., 2023. Integrated scheduling of sports events: a macroscopic perspective. *International Journal of Supply and Operation Management*, 10(2), pp 174-186. <https://doi.org/10.22034/ijsum.2022.108533.1765>.
18. Göçgün, Y., 2023. Fair assignment of matchdays in the Turkish super league under a rest mismatch minimization objective. *The 6th Industrial Engineering and Operations Management (IEOM) Bangladesh Conference, Dhaka, Bangladesh*, pp. 1–8. <http://doi.org/10.46254/BA06.20230038>.
19. Fujii, K. and Matsui, T., 2023. Solving break minimization problems in mirrored double round-robin tournament with QUBO solver. *arXiv preprint arXiv:2307.00263*. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0266846>
20. Subba, E. and Stordal, O. J. L. 2021. Scheduling Sports Tournaments by Mixed-Integer Linear Programming and a Cluster Pattern Approach: Computational Implementation Using Data from the International Timetabling Competition 2021 [Master's thesis, Norwegian School of Economics]. NHH Open Access. Available at: <https://openaccess.nhh.no/nhh-xmlui/handle/11250/2766790>
21. Rasmussen, R. V., and Trick, M. A., 2017. A Benders approach for the constrained minimum break problem. *Computers & Operations Research*, 78, 451–460. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2016.10.015>