



Sharif University of Technology

<https://sjie.journals.sharif.edu/>



Research Article

Modeling and Solving Dynamic Maximal Covering Location Problem Considering Backup Services; Case Study of a Crisis Event in District 3 of Tehran

Hanieh Sabiza¹, Jafar Bagherinejad^{1*} and Roghayyeh Alizadeh²

¹Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering Alzahra University, Tehran, Iran.

²Department of Industrial Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

* corresponding author: (jbagheri@alzahra.ac.ir)

Article Info

Article history:

Received:18 February 2025

Revised:12 May 2025

Accepted:30 June 2025

Keywords:

Backup service,
benders decomposition
algorithm,
capacitated modules,
dynamic maximal covering
location problem,
MCLP,
modular facilities.

Abstract

In this research, we look at a dynamic maximal covering location problem, where the structure of the service-providing facilities consists of independent units that have the ability to move, and these units are called modules. The main goal of the problem is to provide maximum service to people who are in crisis and need basic help. The model of this problem first determines the location of the facilities, and with the occurrence of each crisis, according to the needs that are created in each demand area, the modules responding to the same needs are sent to the facilities of those areas and are deployed in the location, from which they are moved away after the task of delivering service ends. The innovation in this paper is that the modules may become unavailable for any reason and cannot cover the demand assigned to them. For this reason, modules, in addition to providing main services to demand points, in case of failure of some of these modules and their unavailability, the surrounding modules can cover the demand of points that have been neglected by providing backup service and compensate for this deficiency, where the amount of main and backup demand that each module responds to is determined by the model. The main goal of this research is to assign the maximum amount of main and backup service to people who are in crisis, which is of utmost importance to the livelihood of these people. In this research, we first created a mathematical model of mixed integer linear programming. Afterwards, we conducted a case study on Tehran's third district, where all the factors and parameters related to the model were considered with special attention to the real conditions of the studied area. After introducing the model and parameters related to district three, we solved the model using GAMS software. Furthermore, we implemented Bender's decomposition algorithm as an ultimate solution to the model. Finally, we performed a sensitivity analysis on some parameters of the model. We observed that the changes in the parameters affect the backup service more than the base service.

Funding: This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions: All authors contributed to the reported work for conceptualization, methodology, validation, writing-review and editing, and supervision.

To Cite this article:

Sabiza, H., Bagherinejad, J. and Alizadeh, R. 2026. Modeling and solving dynamic maximal covering location problem considering backup services; case study of a crisis event in district 3 of tehran , Sharif Industrial Engineering and Management Journal, 41(2), pp.93-110. <https://doi.org/10.24200/ij65.2025.65842.2423>



مدل سازی و حل مسئله مکان یابی پیشینه پوشش دهی پویا با در نظر گرفتن خدمت پشتیبان: مطالعه موردی رخدادهای بحرانی در منطقه سه تهران

هانیه سابی^۱، جعفر باقری نژاد^{۱*} و رقیه عالی زاده^۲

^۱گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران.

^۲گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران.

*نویسنده مسئول (jbagheri@alzahra.ac.ir)

چکیده

در پژوهش حاضر به مدل سازی و حل مسئله مکان یابی پیشینه پوشش دهی پویا پرداخته شده است، که در آن تسهیلات از واحدهای مستقل با قابلیت جابجایی تشکیل شده است، که مازول نامیده می شوند. مازول ها ممکن است به هر دلیلی از دسترس خارج شوند و نتوانند تقاضای انتصاب شده به خود را پوشش دهند. لذا هدف اصلی مسئله، تخصیص پیشینه خدمت به افراد بحرانی زده توسط تسهیلات مازول دار به گونه ای است که علاوه بر پوشش خدمت پایه، مازول های مستقر در تسهیلات اطراف با ارائه خدمت پشتیبان بتوانند تقاضای نقاطی که مورد غفلت قرار گرفته اند، را پوشش بدهند و این کمبود را جبران کنند. مدل ریاضی از نوع عدد صحیح مختلط بوده و یک مطالعه موردی بر روی منطقه سه تهران انجام شده است، که تمامی عوامل و پارامترهای مربوط به آن با توجه ویژه به شرایط واقعی در نظر گرفته شده اند. مدل مذکور، ابتدا توسط نرم افزار گمز حل و سپس راه حلی در غالب الگوریتم تجزیه بندرز ارائه شده است. در نهایت، نیز بر روی برخی پارامترهای مدل، تحلیل حساسیت صورت گرفته و مشاهده شده است که تغییرات در پارامترها در خدمت پشتیبان تأثیر بیشتری می گذارند، تا خدمت پایه و در نظر گرفتن مقدار مناسب برای پارامترها بتوانند در پوشش بیشتر خدمت پشتیبان مازول ها مؤثرتر واقع شوند. بازه ی مقادیر خاص مذکور برای پارامترها تحت آزمایش قرار گرفته است.

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۳۰

تاریخ اصلاحیه: ۱۴۰۴/۰۲/۲۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۰۹

واژگان کلیدی:

مکان یابی پیشینه پوشش دهی پویا، تسهیلات مازول دار، خدمات پشتیبان، مازول های ظرفیت دار، الگوریتم تجزیه بندرز.

۱. مقدمه

تعیین می شود؛ یعنی یک تسهیل هر گره، تقاضایی را می تواند پوشش دهد که در فاصله ای مشخص از محدوده ی آن تسهیل ایجاد شود. این آستانه ی از پیش تعریف شده اغلب شعاع پوشش نامیده می شود.^[۱]

در گذر زمان و بسته به نوع استفاده در شرایط خاص یا افزودن شرایط واقعی مختلف که بدان پرداخته نشده است، مدل های مختلفی از مدل اصلی مسئله مکان یابی پیشینه پوشش ایجاد شده است. در برخی فرمولاسیون های مکان یابی، برای تسهیلات، هیچ گونه ظرفیتی در نظر گرفته نمی شود؛ با این حال، این فرض از بسیاری جهات مشکل ساز است. بیشتر تسهیلات به دلایل فیزیکی، سیاسی، ساختاری، منطقه ای، و غیره با محدودیت هایی در قابلیت های خدماتی، که توانایی ارائه شان را دارند، مواجه هستند. رویکرد برجسته برای برخورد با فرض قابلیت های خدمات نامحدود، محدود کردن کل خدمات ارائه شده توسط هر یک از تسهیلات است، یعنی محدودیت های ظرفیت باید به مدل اضافه شوند.^[۲]

مکان یابی تسهیلات، بیش از یک قرن، موضوعی اساسی در دسته ای از پژوهش ها بوده است، که نقش تعیین کننده ای در موفقیت زنجیره های تأمین با هدف یافتن مکان مناسب جهت ارائه ی محصول ها و خدمات داشته و یک مؤلفه ی مهم برنامه ریزی راهبردی برای طیف گسترده ای از شرکت های دولتی و خصوصی بوده است. یک مسئله مکان یابی که از همان ابتدا مطالعه شده است، مسئله مکان یابی پیشینه پوشش بوده است. در یک مسئله مکان یابی پیشینه پوشش کلاسیک، فرد به دنبال مکان تعدادی از تسهیلات در یک شبکه به گونه ای است که جمعیت تحت پوشش، به میزان پیشینه برسد؛ یعنی تقاضای پاسخ داده شده را با نوع و تعداد چیدمان تسهیلات به میزان پیشینه رساند.^[۱] در این نوع مسائل تعدادی مکان کاندید برای تسهیلات در نظر گرفته می شود و از بین مکان های مذکور، آنجهایی انتخاب می شوند که با توجه به محل بتوانند به بیشترین تقاضا پاسخ دهند و آنجا را پوشش دهی کنند. پوشش هر نقطه ی تقاضا توسط تسهیلات به واسطه ی فاصله ی آن دو از یکدیگر

استناد به این مقاله:

سابی، هانیه، باقری نژاد، جعفر و عالی زاده، رقیه، ۱۴۰۴. مدل سازی و حل مسئله مکان یابی پیشینه پوشش دهی پویا با در نظر گرفتن خدمت پشتیبان: مطالعه موردی رخدادهای بحرانی در منطقه سه تهران. مهندسی صنایع و مدیریت شریف، ۴۱(۲)، صص. ۹۳-۱۱۰. <https://doi.org/10.24200/j65.2025.65842.2423>



ماژول‌ها در تسهیلات مستقر می‌شوند و نقاط تقاضا را نیز بر همین اساس پوشش می‌دهند.

به‌طور خلاصه در مدل پیشنهادی، این موارد به‌دست آمده‌اند:^[۲]

- مکان تسهیلاتی که تعدادشان از قبل تعیین شده است؛
- تعداد و نوع ماژول‌های اختصاص داده‌شده در هر دوره‌ی زمانی در طول افق برنامه‌ریزی؛
- درصد تخصیص تقاضای نقاط به ماژول‌های اختصاصی در هر دوره‌ی زمانی.

زمانی که بحرانی رخ می‌دهد و افرادی به یک‌سری خدمات به گونه‌ای نیاز دارند که مسئله‌ی مرگ و زندگی‌شان در میان است، اطمینان حاصل کردن از اینکه نیازهای آن‌ها به پیشینه‌ی میزان ممکن پاسخ داده شود، اهمیت بسزایی دارد. و اما سؤالی که پیش می‌آید این است: در صورتی که شرایطی ایجاد شود که به دلایلی، ماژول‌هایی در میان تأسیسات ارائه‌دهنده‌ی خدمت از دسترس‌مان خارج شوند، چه می‌شود؟ و تکلیف بخشی از تقاضا که سابقاً تحت پوشش آن‌ها بوده است، به‌دلیل از دسترس خارج شدن‌شان، حالا بی پاسخ مانده‌اند، چه می‌شود؟

نوآوری پژوهش حاضر، توسعه‌ی مدل نوشتار پایه به‌صورت ارائه‌ی خدمت پشتیبان توسط ماژول‌هاست، که حتی‌الامکان از طریق خدمت مذکور، نقاط تقاضایی که توسط ماژول‌های ارائه‌دهنده‌ی خدمت نادیده گرفته شده‌اند، نیز تحت پوشش قرار گیرند و خدمت دریافت کنند. به این ترتیب، در پژوهش حاضر، دو نوع خدمت توسط ماژول‌ها ارائه شده است: پایه و پشتیبان. بنابراین، مدل ریاضی پژوهش حاضر مشخص می‌کند چه مقدار از ظرفیت هر ماژول به ارائه‌ی خدمات پایه و پشتیبان تخصیص یابد. با توجه به موضوع ارائه‌ی خدمت پشتیبان، تغییراتی در ساختار کل مدل نوشتار پایه و اجزاء تشکیل‌دهنده‌ی آن ایجاد شده است، که مدل اخیر را به مسئله‌ی موردنظر ما با توجه به اهداف و نیازهایی که وجود دارد، تبدیل می‌کند.

به همین ترتیب در مدل مکان‌یابی پژوهش حاضر خدمت هر ماژول به دو نوع خدمت تقسیم می‌شود: خدمت پایه^۴ و خدمت پشتیبان^۵. مدل توسعه داده‌شده با توجه به پارامترهای تعریف‌شده، اولویت پوشش را به خدمات پایه توسط ماژول می‌دهد. اما اگر شرایطی صورت دهد که ماژول بتواند بخشی از ظرفیت باقی‌مانده‌ی خود را در اختیار نقاط تقاضاهای تحت پوشش تسهیلات اطراف قرار دهد، که از دریافت خدمت بی‌بهره مانده‌اند، می‌تواند پژوهشگران حاضر را به هدف پوشش پیشینه‌ی نقاط نزدیک‌تر کند. بنابراین، در مدل پیشنهادی یک شعاع جدید معرفی شده است، که شعاع خدمت پشتیبان نام دارد و نواحی گسترده‌تری را نسبت به شعاع خدمت پایه در بر می‌گیرد. به طوری که نقاط تقاضایی که در اصل به تسهیلات مجاور تخصیص یافته‌اند، را نیز می‌تواند پوشش دهد. بنابراین، بخشی از ظرفیت ماژول‌ها به ارائه‌ی خدمت پشتیبان تعلق گرفته است، که البته این مقدار توسط مدل تعیین شده است.

مدل پیشنهادی نیز همانند نوشتار پایه برای خدمت‌رسانی به افرادی طراحی

گاهی اوقات نیاز است برای اینکه مدل به شرایط واقعی نزدیک‌تر شود، به جای یک دوره در چند دوره، برنامه‌ریزی شود. در کل، موارد و موقعیت‌هایی وجود دارند که باعث ایجاد نوسان‌هایی در در بازار تقاضا می‌شوند. یکی از مؤثرترین راه‌های ایجاد آمادگی در برابر نوسان‌های تقاضای ایجادشده در بازار این است که افق برنامه‌ریزی به چند دوره تقسیم‌بندی شود. این ساختار چنددوره‌ای مدل کلاسیک، مکان‌یابی پیشینه پوشش‌دهی را به یک مدل چنددوره‌ای یا پویا^۱ تبدیل می‌کند، که یک شاخه‌ی مهم از این مسائل به حساب می‌آید. برای مسائل پویا باید تعیین کرد که چه زمانی هر یک از تأسیسات باز، بسته یا جابجا شوند.^[۳]

تقریباً همه‌ی تسهیلات، که نوع خاصی از خدمات یا محصولات را ارائه می‌دهند، از واحدها و بخش‌های مختلفی تشکیل شده‌اند؛ که آن‌ها را ماژول می‌نامند. ماژول‌ها مجزا از یکدیگرند و مستقل از هم کار می‌کنند. آن‌ها می‌توانند واحدهایی سیار باشند، که در بین تسهیلات مختلف در طول افق برنامه‌ریزی در حرکت و جابجایی هستند. نوع و تعداد ماژول‌هایی که کنار یکدیگر قرار می‌گیرند، پیکربندی هر تسهیل مشغول به کار درون شبکه را تشکیل می‌دهد.^[۴] در امکانات و تسهیلات ماژولی، سازه‌های سیار می‌توانند پس از اتمام مأموریت خود به مناطق دیگر منتقل شوند. همان‌طور که گفته شد، در طول افق برنامه‌ریزی در یک شبکه، تقاضای نقاط مختلف به دلایل متعددی می‌تواند تغییر پیدا کند. در این گونه مسائل، تسهیلات اصلی در کل شبکه در مکان‌های متعدد بنا شده‌اند و با توجه با تغییراتی که در تقاضا ایجاد می‌شود، ماژول‌ها می‌توانند در بین تأسیسات بناشده‌ی مذکور در طول دوره‌های مختلف جابجا شوند تا بتوانند به تقاضایی که در هر دوره ایجاد شده‌اند، پاسخ دهند. جابجایی اخیر ماژول‌ها در میان تأسیسات، پیکربندی تسهیل را عوض می‌کند و باعث تغییر در ظرفیت و نحوه‌ی پاسخ‌دهی به تقاضا می‌شود.

ماژول‌بودن خصوصاً در تسهیلاتی که در شرایط بحرانی پس از حوادث و بلایای طبیعی خدمات ارائه می‌دهند، می‌تواند مفید باشد؛ زیرا با اختصاص دادن ماژول‌های مختلف با اندازه‌های متفاوت در محل‌های کاندید، که برای بازگشایی تسهیلات انتخاب شده‌اند، متناسب با نوع و مقدار تقاضاهایی که در آن محل‌ها وجود دارد، می‌توان تسهیلات را با چیدمان‌های متفاوت ماژول‌های مذکور فراهم ساخت. همچنین، در دوره‌های مختلف افق برنامه‌ریزی، زمانی که حوادث متفاوت در مکان‌های نقاط تقاضا رخ می‌دهد، می‌توان ماژول‌های اخیر را در میان مکان‌های از پیش تعیین‌شده‌ی تسهیلات جابجا کرد و متناسب با نیازها خدمات ارائه داد. به همین ترتیب، تسهیلات ماژول‌دار یک مبحث پرطرفدار در مسائل مکان‌یابی تسهیلات به حساب می‌آیند و یک شاخه‌ی مهم به نام مسائل مکان‌یابی پیشینه پوشش‌دهی تسهیلات ماژولار^۲ را ایجاد کرده است.

پژوهش حاضر توسعه‌ای بر مدل نوشتار عالی‌زاده و همکاران (۲۰۲۱) است، که در مورد مکان‌یابی تسهیلاتی که از ماژول‌هایی تشکیل شده‌اند که نوع خاصی از خدمات یا محصولات را ارائه می‌دهند، انجام شده است.^۳ هدف اصلی مدل اخیر، خدمت‌رسانی به افرادی است که پس از رخداد یک بحران یا فاجعه‌ی طبیعی، متقاضی یک سری کمک‌های اولیه هستند. تسهیلات در مدل ریاضی پیشنهادی در نوشتار حاضر، ظرفیتی معین دارند و با توجه به ظرفیت ذکرشده،

⁴ Main Service

⁵ Backup Service

¹ Dynamic Maximal Covering Location Problem

² Maximal Covering Location Problem of Modular Facilities

³ Multi-Period Maximal Covering Location Problem with Capacitated Facilities and Modules for Natural Disaster Relief Services

در ادامه‌ی نوشتار حاضر، ابتدا به مرور ادبیات نوشتارهای مرتبط به موضوعات پژوهش حاضر پرداخته شده و موارد مختلف استفاده‌شده در مدل پیشنهادی بررسی شده است. در بخش ۳، مدل ریاضی نوشتار حاضر، معرفی شده است. همچنین، در بخش ۴ مدل مذکور روی یک مثال واقعی شامل مطالعه‌ی موردی روی منطقه‌ی سه تهران آزمایش شده است. در بخش ۵، مدل ریاضی با استفاده از روش الگوریتم تجزیه‌ی بندرز حل شده و در بخش ۶، روش مذکور برای حل مسائل بزرگ‌تر با داده‌های عدد تصادفی به کار رفته است. در بخش ۷، نیز به تحلیل حساسیت برخی پارامترهای مدل در مثال‌های موجود پرداخته شده و در بخش ۸ به نتیجه‌گیری‌های مرتبط و پایان پژوهش پرداخته شده است.

۲. مرور ادبیات

۲.۱. مسائل مکان‌یابی بیشینه‌ی پوشش‌دهی

مدل اولیه‌ی مسئله‌ی حاضر، توسط چرچ و رول^{۱۱} (۱۹۷۴) معرفی شده است. با قراردادن تعداد مشخصی از تسهیلات، میزان پوشش (جمعیت قرارگرفته تحت پوشش) در فاصله‌ی خدمات بیشینه‌ی موردنظر و مسئله‌ی حاضر را به‌عنوان مسئله‌ی مدل‌سازی مکان‌یابی بیشینه‌ی پوشش‌دهی (MCLP)^{۱۲} تعریف کرده‌اند.^{۱۱}

عطا و همکاران (۲۰۱۸)، با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل MCLP، الگوریتم پیشنهادی را در چند نمونه‌ی MCLP از ادبیات اعمال کرده و نشان داده‌اند که الگوریتم ژنتیک پیشنهادی با پالایش محلی از نظر درصد پوشش و زمان محاسبه، نتایج بهتری می‌دهد؛ تا تقریباً در همه‌ی موارد، راه‌حل‌ها را پیدا کند. استفاده از راهبرد مذکور، پالایش محلی از سایر روش‌های موجود برای بیشتر مثال‌های کوچک و بزرگ MCLP بهتر عمل می‌کند و میزان کلی همگرایی مدل را بهبود می‌بخشد.^{۱۵}

پوراس^{۱۳} و همکاران (۲۰۲۱)، در نوشتار خود مدل MCLP را برای مکان‌یابی خدمات اورژانسی با استفاده از توابع جانشین، که یک نوع روش فراابتکاری است، حل کرده‌اند. دو رویکرد برای به‌دست‌آوردن نسخه‌های معادل (تقریبی) از توابع هدف عبارت‌اند از: ارزیابی جزئی^{۱۴} و دورانداختن کارآمد^{۱۵}. ارزیابی جزئی، تأثیر اپراتورها در کیفیت راه‌حل‌ها را در نظر می‌گیرد. این فقط بخشی از عملکرد هدف را که با عمل اپراتورها اصلاح شده است، ارزیابی می‌کند. از طرف دیگر، دورانداختن کارآمد، شامل متوقف‌کردن ارزیابی است، که مشخص شود قسمت باقی‌مانده از راه‌حل در مقدار نهایی تابع هدف تأثیر نمی‌گذارد. روش‌های ابتکاری (مانند الگوریتم حریص^{۱۶} و آزادسازی لاگرانژ) و فراابتکاری (مانند الگوریتم‌های ژنتیک، GRASP، الگوریتم انجماد تدریجی^{۱۷}، و جستجوی تابو^{۱۸}) و رویکردهای ترکیبی برای حل MCLP به روشی تقریبی استفاده شده‌اند.^{۱۶}

در نوشتار اخیر، اصول دورانداختن کارآمد و ارزیابی جزئی برای به‌دست‌آوردن نسخه‌های کارآمدتر از تابع هدف مسئله‌ی مذکور، یعنی تابع هدف جانبی جانشین، اعمال شده است. سه تابع جانشین پیشنهاد شده است، و در نتیجه‌ی

شده است، که به‌دلیل رویداد یک فاجعه در وضعیت بحرانی قرار گرفته‌اند و به کمک نیاز دارند. این کمک‌ها و خدمت‌رسانی‌ها توسط ماژول‌ها و کاراوان‌های متحرکی که قابلیت جابجایی و استفاده‌ی مجدد دارند، انجام می‌شود. در نوشتار حاضر، چهار نوع خدمت در شرایط بحرانی توسط ماژول‌ها ارائه شده‌اند، که شامل: کمک‌های اولیه، ارائه‌ی آب و غذا، استحمام، و خواب و استراحت هستند.

اجرای مدل پژوهش حاضر به کمک یک مطالعه‌ی موردی با داده‌های واقعی مرتبط در منطقه‌ی سه تهران انجام شده است. شهرداری تهران در سطح شهر، مناطقی را به‌عنوان محل‌های تخلیه‌ی اضطراری تعیین کرده است، که عمدتاً شامل بوستان‌ها، پارک‌ها، فضای سبز، و فضای باز هستند و به‌منزله‌ی مکان‌های بالقوه‌ی تسهیلات در نظر گرفته شده‌اند. نقاط تقاضا نیز محله‌های منطقه‌ی سه تهران هستند. مطالعه‌ی موردی در دو دوره‌ی زمانی با فرض رخداد بحران در دو نقطه‌ی متفاوت منطقه اجرا شده است. مطالعه‌ی حاضر، ساز و کار مدل طراحی‌شده را به خوبی نشان می‌دهد و ارائه‌ی خدمت پشتیبان به نقاط تقاضای مجاور را نمایان می‌سازد.

جهت حل مدل ارائه‌شده در نوشتار حاضر در مقیاس بزرگ از الگوریتم تجزیه‌ی بندرز^۶ استفاده شده است؛ که یک نوع روش حل دقیق به حساب می‌آید و به افتخار ژاک اف. بندرز^۷ نام‌گذاری شده است. در تجزیه‌ی بندرز، متغیرهای مسئله به دو زیرمجموعه تقسیم می‌شوند، به طوری که یک مسئله‌ی اصلی ایجاد می‌شود؛ که در مرحله‌ی اول بر روی اولین مجموعه از متغیرها حل می‌شود و جواب‌های به‌دست‌آمده برای پیدا کردن مقادیر مجموعه‌ی دوم متغیرها در یک زیرمسئله‌ی فرعی استفاده می‌شود. مسئله‌ی اصلی، تسهیل و آزادشدن مسئله‌ی پایه است، که زیرمجموعه‌ای از متغیرها را در آن به‌دست می‌آورد و سپس به کمک آن تخمینی از مقدار تابع هدف بهینه‌ی مسئله‌ی فرعی را پیدا می‌کند. حل مسئله‌ی اصلی، یک کران دوگانه بر روی مقدار تابع هدف بهینه‌ی مسئله‌ی اصلی و مقادیر متغیری، که برای فرمول‌بندی زیرمسئله، که مقادیر متغیرهای باقی‌مانده را تعیین می‌کند، به‌دست می‌آورد. هنگامی که زیرمسئله شدنی باشد، می‌توان یک راه‌حل عملی برای مسئله‌ی اصلی ایجاد کرد؛ که یک کران اولیه در مقدار تابع هدف بهینه‌ی مسئله‌ی اصلی به‌وجود می‌آورد.

زمانی که مقدار تابع هدف زیرمسئله با برآورد در مسئله‌ی اصلی مطابقت نداشته باشد و الگوریتم به انتهای خود نرسیده باشد، یک برش بندرز، که به‌عنوان برش بهینگی^۸ شناخته می‌شود، ایجاد می‌شود؛ که معمولاً از یک نقطه در محدوده‌ی جواب‌های شدنی از چندوجهی دوگان مرتبط با زیرمسئله ایجاد می‌شود. هنگامی که زیرمسئله شدنی نباشد، یک برش بندرز که به‌عنوان برش شدنی^۹ شناخته می‌شود، ایجاد می‌شود؛ که معمولاً از یک جهت راسی^{۱۰} از دوگان زیرمسئله ایجاد می‌شود. برش‌های ایجادشده به مسئله‌ی اصلی اضافه می‌شوند و سپس دوباره حل می‌شوند. این فرآیند تا زمانی تکرار می‌شود که کران‌های اولیه و دوگان در محدوده‌ی تحمل بهینه‌ی از پیش تعریف‌شده قرار گیرند، یا هیچ برش بندرزی ایجاد نشود.

¹³ Porras

¹⁴ Partial evaluation

¹⁵ Efficient discarding

¹⁶ Greedy-add

¹⁷ Simulated annealing

¹⁸ Tabu search

⁶ Benders' Decomposition

⁷ Jacques F. Benders

⁸ Optimality Cut

⁹ Feasibility Cut

¹⁰ Extreme Ray

¹¹ Church & Velle

¹² Maximal Covering Location Problem

آزمایش‌های انجام شده، این موارد تأیید شده است: سه تابع جانشین، تعداد مقایسه‌ی فاصله را با توجه به عملکرد هدف اصلی کاهش داده است، توابع با ارزیابی جزئی باعث شده‌اند بیش از ۸۰٪ از زمان اصلی ذخیره شود؛ آزمایش‌های آماری ثابت کرده‌اند که بین توابع، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.^[۶]

زرنی و همکاران (۲۰۱۱)، در نوشتار خود با استفاده از روش‌های ابتکاری و فراابتکاری به منظور حل MCLP در اندازه‌های بزرگ‌تر، مسائل با پیشینه‌ی ۲۵۰۰ گره را حل کرده و عملکرد الگوریتم ژنتیک پیشنهادی را بر روی مجموعه‌ای از مسائل آزمایشی نشان داده‌اند. در آزمایش‌های انجام‌شده مشخص شده است که الگوریتم ژنتیک قادر به حل مسائل در مقیاس بزرگ با خطاهای ناچیز در مدت زمان معقول است.^[۷]

در نوشتار جیا و همکاران (۲۰۰۷)، بحران‌های با مقیاس بزرگ به عنوان رویدادهای نادری تعریف شده‌اند، که پاسخ‌دهندگان اورژانس محلی را تحت تأثیر قرار داده و به کمک منطقه‌ای و یا ملی نیاز داشته‌اند، مانند بلایای طبیعی (مثل زلزله و طوفان) و حملات تروریستی مانند ۱۱ سپتامبر. هدف ایشان، تعیین مکان‌های بهینه‌ی خدمات پزشکی اورژانس برای رفع نیازهای ایجادشده توسط بحران‌های بزرگ بوده است. اگرچه مدل‌های مکان‌یابی تأسیسات برای قراردادن هر نوع خدمات در یک شبکه، از بیمارستان‌ها گرفته تا ایستگاه‌های آتش‌نشانی و مناطق تریاژ استفاده می‌شوند، ولی در پژوهش مذکور فقط بر روی مسائل مکان‌یابی تجهیزات پزشکی برای موارد اضطراری در مقیاس بزرگ بحث و بررسی صورت گرفته است.^[۸]

۲.۲. مدل‌های ظرفیت‌دار

یک فرض اساسی مهم در MCLP این است که تأسیسات مستقرشده، ظرفیت‌های نامحدودی دارند. با این حال، این فرض از بسیاری جهات مشکل‌ساز است. بیشتر امکانات به دلایل فیزیکی، سیاسی، ساختاری، منطقه‌ای، و غیره، محدودیت‌هایی در قابلیت‌های خدماتی دارند. رویکرد برجسته برای برخورد با فرض قابلیت‌های خدمات نامحدود، محدودکردن کل خدمات ارائه‌شده توسط هر یک از تسهیلات است. یعنی محدودیت‌های ظرفیت باید به مدل اضافه شوند.^[۹] به همین ترتیب، مسئله‌ی مکان‌یابی پیشینه پوشش‌دهی ظرفیت دار (CMCLP)^[۹] با استفاده از محدودیت‌هایی برای ردیابی و جلوگیری از بار کاری (کل خدمات) برای هر تسهیل از بیش از حد تعیین‌شده معرفی شده است.^[۱۰]

شو و همکاران (۲۰۲۰)، در بررسی مسائل و چالش‌های مرتبط با کاربرد مدل‌های پوشش ظرفیتی به مطالعات موردی شامل ارائه‌ی خدمات در دو شهر سن‌خوزه و سانتا باربارا پرداخته‌اند، که در مجموع شامل ۱۸۰ نمونه‌ی کاربردی برای برجسته‌کردن مسائل و موارد مرتبط با تسهیلات ظرفیت‌دار در عمل بوده است. مدل مذکور در نرم‌افزار GIS تجاری ساختار یافته و حل شده است، که امکان ساختاردهی و حل یک مسئله‌ی پوشش‌دهی با تسهیلات ظرفیت‌دار را برای کاربران عمومی فراهم ساخته است. سیستم اخیر یک محیط یکپارچه برای کسب، مدیریت، دستکاری، تجزیه و تحلیل، و نمایش داده‌ها فراهم کرده است، که عموماً برای رویکردهای دقیق حل امکان‌پذیر نبوده است. یافته‌ها نشان داده‌اند که اعمال محدودیت‌های ظرفیت، پیچیدگی محاسباتی برای حل

مسئله‌ی پیشینه پوشش‌دهی با تسهیلات ظرفیت‌دار را افزایش داده است؛ و بنابراین، باید ارتباط نتایج به‌دست‌آمده به صورت ابتکاری بهبود یابد. از لحاظ تئوری، محدودیت‌های ظرفیت، حد بالای محدودتری را برای محدوده‌ی حجم کار تسهیلات اعمال می‌کنند. از لحاظ تجربی، بدون محدودیت ظرفیت، محدوده‌ی حجم کار تسهیلات ممکن است به‌طور قابل توجهی متفاوت باشد. به این ترتیب ممکن است مقداری از تقاضا برای ارائه‌ی خدمات اختصاص داده نشود، اما در استاندارد خدمت‌دهی باقی بماند. و همچنین، مقداری تقاضا ممکن است به یک تسهیل دورتر اختصاص داده شود، که منجر به تلاش‌های بیشتر ارائه‌دهندگان خدمات در سفر به نقاط تقاضا بشود.^[۱۱]

حاتمی و همکاران (۲۰۲۱)، در بررسی ناوگان ناهمگونی از وسائط نقلیه با ظرفیت‌های حمل متفاوت، هدف‌شان تعیین تعداد و انواع وسائط نقلیه‌ی موردنیاز علاوه بر مکان‌یابی تسهیلات جدید بوده است، تا تقاضای تحت پوشش به میزان پیشینه برسد. بنابراین، یک روش ابتکاری و یک الگوریتم فراابتکاری مبتنی بر الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله به صورت ابتکاری پیشنهاد شده است. برای یافتن مؤثرترین روش راه‌حل، مجموعه‌ای از مسائل با اندازه‌های مختلف به‌طور تصادفی تولید و با روش‌های پیشنهادی حل شده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده از دو رویه‌ی راه‌حل، عملکرد بهتر رویکرد ابتکاری را بر الگوریتم ژنتیک از نظر کیفیت راه‌حل‌ها و زمان اجرا تأیید کرده است.^[۱۲]

واستا و جایاسوال^{۲۰} (۲۰۲۱)، در نوشتار خود با در نظر گرفتن مسئله‌ی مکان‌یابی پیشینه پوشش چند دوره‌ای ظرفیت‌دار با عدم قطعیت سرور، بار دیگر توجه خود را روی حوزه‌ی بهداشت و سلامت گذاشته و به مسئله‌ی انتصاب پزشکان به مراکز بهداشتی اولیه‌ی موجود و غیرفعال پرداخته‌اند. ایشان پروژه‌ی اخیر را با وجود دستورالعمل‌های روشن در مورد پیشینه جمعیت قابل‌ارائه توسط هر مرکز بهداشت و درمان و عدم قطعیت در دسترس بودن پزشکان در افق برنامه‌ریزی انجام داده‌اند. در زمینه‌ی مراکز بهداشتی اولیه، جمعیت (تقاضای کاربر) که نیاز به خدمات‌رسانی تسهیلات را داشته‌اند، در طول زمان تغییر کرده است، و همچنین تعداد پزشکانی که از دوره‌ای به دوره‌ی دیگر در دسترس بوده‌اند، تغییر کرده است. در چنین سناریویی، تصمیم بهینه‌ی مکان تسهیلات در یک دوره ممکن است در دوره‌های آتی کمتر از حد مطلوب باشد و بنابراین ممکن است نیاز به بازبینی مجدد داشته باشد؛ که منجر به یک مسئله‌ی مکان‌یابی تسهیلات چنددوره‌ای (MFLP)^{۲۱} می‌شود، که در آن پارامترهای مسئله (مانند تقاضا، تعداد تسهیلات برای بازشدن) با زمان تغییر می‌کنند.

لذا، ایشان یک روش حل دقیق مبتنی بر تجزیه‌ی بندرز همراه با چندین اصلاح، که از ساختار اساسی مسئله برای حل بسیار کارآمد نمونه‌هایی با اندازه‌های عملی بهره‌برداری می‌کند، ارائه کرده‌اند.^[۱۳]

۳.۲. مدل‌های پویا

در نسخه‌ی پویا یا چند دوره‌ای مسئله‌ی مکان‌یابی تسهیلات، فرض بر این است که تقاضای گره‌ها با زمان تغییر می‌کند و در نتیجه، تسهیلات می‌توانند در بین دوره‌ها باز یا بسته شوند.^[۱۴]

واستا و جایاسوال^{۲۲} (۲۰۱۶)، در نوشتار خود به مسئله‌ی مکان‌یابی تسهیلات (FLP)^{۲۳}، که مسئله‌ی یافتن زیرمجموعه‌ی بهینه در مجموعه‌ی مشخصی از

²² Vatsa & Jayaswal

²³ Facility Location Problem

¹⁹ Capacitated Maximal Covering Location Problem

²⁰ Vatsa & Jayaswal

²¹ Multi-period Facility Location Problem

استفاده شده در مسائل مکان‌یابی پوشش‌دهی گسسته، دو ویژگی (به تنهایی یا ترکیبی) مرتبط عملی را به تصویر کشیده است: وابستگی زمانی جنبه‌هایی مانند تقاضا و هزینه‌ها، به اضافه‌ی عدم قطعیتی که اغلب زیربنای پارامترهای مسئله است. مدل مذکور با یک روش ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ حل شده است.^[۱۸]

۴.۲. مدل‌های ماژول‌دار

تقریباً همه‌ی تسهیلات از واحدها و بخش‌های مختلف تشکیل شده‌اند، که با نام ماژول شناخته می‌شوند. در نمونه‌های واقعی، مثل بیمارستان، محل بیمارستان جزء تسهیلات است و ماژول‌ها شامل آمبولانس‌ها، اتاق‌های عمل، و کارمندان در طول افق زمانی هستند. در مراکز امداد رسانی در برابر فاجعه، محل مراکز، تسهیلات و ماژول‌ها شامل چادرها، واحدهای ارائه‌ی آب و غذا، و غیره هستند. در سوپرمارکت‌ها، تسهیلات محل سوپرمارکت‌ها و ماژول‌ها شامل قفسه‌هایی مواد غذایی گرم، نوشیدنی، محصولات سرد، و غیره هستند.^[۱۹]

در تسهیلات ماژولی، سازه‌های سیار می‌توانند پس از اتمام مأموریت خود به مناطق دیگر منتقل شوند و به دلیل قابلیت استفاده‌ی مجدد ماژول‌ها در سایر شرایط، می‌توانند منجر به کاهش کل هزینه شوند. ماژول‌ها می‌توانند برای ارتقاء قابلیت بازیافت و استفاده‌ی مجدد از قطعات محصول به جای افزایش طول عمر محصول مفید باشد. علاوه بر این، زمانی که کاربر می‌تواند ماژول‌هایی را برای ارتقا یا افزایش طول عمر محصولی که مالک آن است، خریداری کند، مفید است. همچنین می‌تواند آثار مخرب زیست‌محیطی برخی محصولات را به دلیل منسوخ‌شدن سریع کاهش دهد. چنین راهبردهایی، ارتقاء در معرفی و جایگزینی ماژول‌ها می‌تواند توسط شرکت‌ها برای افزایش سود اتخاذ شود.^[۱۹]

آلمن و ژانگ^{۲۸} (۲۰۲۰)، در مقاله خود به بازارهای نوسانی امروزی و چالش‌های تولیدکنندگان که تقاضای محصول توزیع‌شده و نوسانی را برآورده می‌کنند، پرداخته‌اند. یک نوع جدید از مسئله‌ی مکان‌یابی تسهیلات پویا معرفی شده است، که از آن به‌عنوان مسئله‌ی مکان‌یابی تسهیلات پویا و سیار (DMMFLP)^{۲۹} یاد می‌شود. در پژوهش اخیر، تأسیسات از ماژول‌ها تشکیل شده‌اند و ظرفیت تولید آن‌ها بستگی به این دارد که کدام ماژول و چند واحد از هر ماژول در محل تأسیسات باشد. هدف DMMFLP این است که بشود تصمیم گرفت کجا و در چه زمانی ماژول‌ها را در بازه‌های زمانی متعدد با کمترین هزینه قرار داد و جابجا و در عین حال تقاضای معین را برآورده ساخت. در نوشتار مذکور از الگوریتم شاخه و قیمت برای حل مدل استفاده شده است.^[۴]

سیلوا^{۳۰} و همکاران (۲۰۲۱) مسئله‌ی مکان‌یابی پویا با ظرفیت‌های ماژولی (DFLPM)^{۳۱} را بررسی کرده‌اند. DFLPM با استفاده از روش‌های ابتکاری متناسب با سناریوهای مختلف و ساختارهای هزینه حل می‌شود. نویسندگان سه روش ابتکاری مبتنی بر آزادسازی خطی (LRH) و یک روش ابتکاری تکاملی را پیشنهاد کرده‌اند، که یک الگوریتم ژنتیک را با یک نزول همسایگی متغیر (GA + VND)^{۳۲} ترکیب می‌کند. آزمایش‌هایی گزارش شده‌اند که روش‌های ابتکاری را با فرمول‌بندی پیشرفته‌ی برنامه‌نویسی عدد صحیح مختلط (MIP) برای مسئله مقایسه می‌کنند. همچنین نشان داده شده است که

مکان‌های نامزد تسهیلات در چندین دوره‌ی برنامه‌ریزی است، پرداخته‌اند. مدل اخیر برای مکان‌یابی مراکز بهداشت اولیه ایجاد شده است، که با توجه به اینکه مکان‌های مذکور در دوره‌های مختلف به تعداد متفاوتی از پزشکان دسترسی دارند، به صورت چند دوره‌ای یا پویا طراحی شده است. ایشان با استفاده از روش راه‌حل دقیق مبتنی بر تجزیه‌ی بندرز^{۳۴}، اصلاحاتی برای حل نمونه‌های واقعی مسئله ارائه کرده‌اند، که شامل روش‌های ابتکاری برای زیرمسئله‌ها و روش‌های تقویت بوده است، که باعث کاهش چشمگیر زمان محاسباتی لازم برای حل نمونه‌های مسئله با بیشینه‌ی ۲۰ تسهیلات، ۵۰۰ گره‌ی تقاضا، و ۵ دوره شده است.^[۳]

در میان روش‌های فراابتکاری ترکیبی که تا کنون پیشنهاد شده‌اند، کالدین^{۲۵} و همکاران (۲۰۱۷)، در نوشتارشان در یک مدل‌سازی مکان‌یابی تسهیلات پویا بر روی مجموعه‌ی پورتفولیو الگوریتم‌ها تمرکز کرده‌اند، که به‌عنوان مجموعه‌ای از الگوریتم‌های مختلف (یا همان الگوریتم با تنظیمات مختلف) تعریف می‌شوند؛ که به‌طور موازی اجرا می‌شوند و اطلاعات مربوط به فرآیند جستجوی خود را به اشتراک می‌گذارند. همچنین مجموعه‌ی اخیر الگوریتم، شامل: سازگاری، همکاری، و یادگیری است. این نمونه کارها از یک راهبرد تکاملی و سه روش مختلف شبیه‌سازی تبرید‌شده تشکیل شده است. مجموعه‌ی الگوریتم، همه‌ی الگوریتم‌های فردی را به‌طور قابل توجهی بهبود بخشیده و نتایج در تمام موارد در نظر گرفته شده است.^[۱۵]

همچنین، حاجی پور و همکاران (۲۰۲۲)، یک فرمول ریاضی برای مکان‌یابی ایستگاه‌های آتش‌نشانی و تسهیلات اختصاص‌یافته به ایستگاه‌ها در دوره‌های مختلف و شرایط اضطراری (جنگ‌ها و بلایای طبیعی) ارائه کرده‌اند، که هدف اصلی آن، تعیین موقعیت جایگاه ایستگاه و تعداد خودروهای خدماتی در هر ایستگاه در دوره‌های مختلف برای داشتن بیشینه‌ی پوشش و بهترین استفاده از ماشین‌آلات خدماتی بوده است. برای حل مدل اخیر، دو الگوریتم فراابتکاری شامل بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)^{۲۶} و الگوریتم کلونی مصنوعی زنبورها (ABC)^{۲۷} با تلفیقی کروموزوم کارآمد اجرا شده‌اند.^[۱۶]

زرنندی و همکاران (۲۰۱۳)، نیز یک نسخه‌ی پویای چنددوره‌ای از MCLP را برای زنجیره‌ی تأمین در محدوده‌ی بزرگ پیشنهاد کرده‌اند. به‌منظور ارائه‌ی خدمات به مردم در صورت وقوع حوادث احتمالی در جاده و براساس ترافیک روزانه، تعطیلات، شرایط آب‌وهوایی، و بسیاری عوامل دیگر، ممکن است تعداد تسهیلاتی که قرار است در آن قرار گیرد در بازه‌های زمانی مختلف در نوسان باشد. نوشتار اخیر با پیشنهاد یک الگوریتم انجاماد تدریجی کارآمد به مطالعاتی کمک می‌کند که قادر به حل MCLP های پویا با بیشینه‌ی ۲۵۰۰ گره و ۲۰۰ مکان بالقوه است. آزمایش‌ها نشان داده‌اند که رویکرد پیشنهادی، راه‌حل‌هایی با خطای کمتر از ۱٪ پیدا می‌کند.^[۱۷]

مارین و همکاران (۲۰۱۸)، یک مدل مکان‌یابی پوشش گسسته‌ی بسیار کلی را معرفی کرده‌اند، که جنبه‌های عدم قطعیت وابسته به زمان را در مقدار لازم پوشش خدمت و مقدار خدمت قابل ارائه توسط تسهیلات را نشان می‌دهد. مدل مذکور در چندین دوره با هدف جامعیت‌بخشی مدل‌های بهینه‌سازی

²⁹ Dynamic Modular and Mobile Facility Location Problem
³⁰ Silva

³¹ Dynamic Facility Location Problem with Modular Capacities

³² Variable Neighborhood Descent

²⁴ Benders decomposition

²⁵ Calderín

²⁶ Particle Swarm Optimization

²⁷ Artificial Bee Colony

²⁸ Allman & Zhang

"مجموعه‌ها"

$i \in I$	مکان تسهیلات
$j \in J$	نقاط تقاضا
$l \in L$	ماژول
$k \in K$	اندازه‌ی ماژول (تعداد)
$t \in T$	دوره‌ی زمانی
$t' \in T'$	روز

"پارامترها"

S^m	فاصله‌ی پیشینه‌ی پوشش کامل پایه
S^m	فاصله‌ی پیشینه‌ی پوشش جزئی پایه
S^b	فاصله‌ی پیشینه‌ی پوشش کامل پشتیبان
S^b	فاصله‌ی پیشینه‌ی پوشش جزئی پشتیبان
d_{ij}	فاصله‌ی بین مکان بالقوه‌ی تسهیل i و نقطه‌ی تقاضا j
g_{ij}^m	مقدار پوشش پایه، که تسهیل i برای نقطه‌ی تقاضا j ارائه می‌کند
$g_{ij}^m = \begin{cases} 1 & \text{if } d_{ij} \leq S^m \\ f(d_{ij}) & \text{if } S^m < d_{ij} \leq S^m \\ 0 & \text{if } S^m < d_{ij} \end{cases}$	
g_{ij}^b	مقدار پوشش پشتیبان که تسهیل i برای نقطه‌ی تقاضا j ارائه می‌کند
$g_{ij}^b = \begin{cases} 1 & \text{if } d_{ij} \leq S^b \\ f'(d_{ij}) & \text{if } S^b < d_{ij} \leq S^b \\ 0 & \text{if } S^b < d_{ij} \end{cases}$	
$a_{jltt'}^m$	تقاضای موردانتظار از نقطه‌ی j برای ارائه‌ی خدمت پایه توسط ماژول l در دوره‌ی t در روز t'
$a_{jltt'}^b$	تقاضای موردانتظار از نقطه‌ی j برای ارائه‌ی خدمت پشتیبان توسط ماژول l در دوره‌ی t در روز t'
b_{lk}	بیشترین مقدار ظرفیت برای ماژول l با سایز k
b'	کمترین مقدار ظرفیت برای ماژول l با سایز k
c_j^m	درآمد به دست آمده از پوشش پایه‌ی نقطه‌ی تقاضای j
c_j^b	درآمد به دست آمده از پوشش پشتیبان نقطه‌ی تقاضای j
β_i	مساحت کل تسهیل i (یا فضای قابل استفاده در تسهیل i)
R_{lk}	فضای موردنیاز ماژول l با سایز k
$h_{ilkt'}$	هزینه‌ی استقرار ماژول l با سایز k در تسهیل i از دوره‌ی t در روز t'
p	تعداد تسهیلاتی که قرار است مکان‌یابی شوند
e	هزینه‌ی ثابت احداث هر تسهیل در دوره‌ی اول

عملکرد روش‌ها به ویژگی‌های نمونه‌ی حل شده بستگی دارد. برای نمونه‌های معیار، الگوریتم LRH بهبودیافته توسط VND، در کمتر از نصف زمان MIP، راه‌حلی با اختلاف ۰.۲٪ از راه‌حل‌های بهینه پیدا می‌کند. برای سناریوهایی که هزینه‌های ساخت و ساز بالاتر و اندازه‌ی ماژول‌ها کمتر است، GA+VND برای حل مسئله مؤثر بوده و از LRH و MIP عملکرد بهتری داشته است.^[۲۰]

۳. مدل‌سازی ریاضی مسئله‌ی پژوهش

مسئله‌ی مکان‌یابی پیشینه‌ی پوشش در نوشتار پایه با این فرضیات، که فرضیات پایه‌ی نوشتار حاضر هستند، مدل‌سازی شده است:^[۲۱]

- محل‌های هر یک از تسهیلات در ابتدای اولین دوره، تعیین و سپس در ابتدای دوره‌های بعد با توجه به اینکه فرض شده است یک حادثه رخ داده است، ماژول‌ها به محل‌های بالقوه‌ی ذکر شده، اختصاص داده می‌شوند.
- ماژول‌ها، اندازه‌های متنوع و ظرفیت معینی دارند.
- تعداد و اندازه‌ی ماژول‌ها با مدل مشخص می‌شود.
- ماژول‌ها می‌توانند جابجا شوند و در ساختار تسهیلات و کل سیستم تغییر ایجاد کنند، که به تقاضا بستگی دارد.
- به دلیل وجود نوسان‌ها در تقاضای مسئله، مدل‌سازی در چند دوره صورت می‌گیرد.

مفروضات اخیر، همان مفروضات اساسی هستند و در ادامه، به مفروضات مربوط به عدم در دسترس بودن کل ظرفیت برخی ماژول‌ها و ارائه‌ی سرویس پشتیبان پرداخته شده است:

در مسائل مکان‌یابی پیشینه‌ی پوشش کلاسیک، تسهیلات یک شعاع خدمت دارند، که فقط به تقاضای داخل آن شعاع می‌توانند پاسخ دهند. در مدل ذکر شده، هر ماژول دو نوع شعاع خدمت دارد، شعاع خدمت پایه و پشتیبان. شعاع خدمت پایه، شعاعی است که ماژول‌ها در حالت اصلی و پایه به تقاضای آن پاسخ می‌دهند. در صورتی که یک ماژول نتواند با تمام ظرفیت خدمت ارائه کند، ماژول‌های اطراف می‌توانند تقاضای بی‌پاسخی که در شعاع پشتیبان‌شان قرار دارد، را پوشش دهند. متقابلاً دو نوع تقاضا وجود دارد، که به ماژول‌ها اختصاص می‌یابند، تقاضای موردانتظار خدمات پایه و پشتیبان، که هر کدام به ماژول خاص اختصاص داده می‌شود.

تابع هدف مدلی که ساخته می‌شود به دنبال این مقصود است: پیشینه‌سازی پوشش و پاسخ‌دهی به تقاضای پایه و پشتیبان، در حالی که هزینه‌ی اختصاص دادن ماژول‌ها به تسهیلات، کمینه شود.

متغیرهای تصمیم نیز نشانگر این موارد هستند:

- انتخاب محل موردنظر برای بازگشایی تسهیل.
- استقرار ماژول خاص با اندازه‌ی خاص در دوره‌ی خاص در تسهیل خاص.
- تخصیص تقاضای پایه‌ی نقطه در دوره‌ی خاص تحت پوشش ماژولی که به آن اختصاص داده شده است.
- تخصیص تقاضای پشتیبان نقطه در دوره‌ی خاص تحت پوشش ماژولی که به آن اختصاص داده شده است.

در ادامه، به معرفی نمادهای اندیس‌ها و پارامترهای مرتبط به مدل پرداخته شده است.

"متغیرهای تصمیم"

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر تسهیل در نقطه‌ی } i \text{ بنا شود} \\ 0 & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

$$Y_{ilkt} = \begin{cases} 1 & \text{اگر ماژول } l \text{ با سایز } k \text{ در تسهیل } i \text{ در دوره } t \text{ و روز } t' \text{ قرار بگیرد} \\ 0 & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

$$x_{ijlt}^m \quad \text{مقدار پوشش تقاضای پایه‌ی } j \text{ توسط ماژول } l \text{ در تسهیل } i \text{ در دوره‌ی } t \text{ و روز } t'$$

$$x_{ijlt}^b \quad \text{مقدار پوشش تقاضای پشتیبان } j \text{ توسط ماژول } l \text{ در تسهیل } i \text{ در دوره‌ی } t \text{ و روز } t'$$

"مدل"

$$\text{Max} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T} (c_j^m g_{ij}^m a_{jlt}^m x_{ijlt}^m + c_j^b g_{ij}^b a_{jlt}^b x_{ijlt}^b) - \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T} h_{ilkt} Y_{ilkt} - \sum_{i \in I} e v_i \quad (1)$$

"محدودیت‌ها"

$$\sum_{k \in K} Y_{ilkt} \leq V_i \quad \forall i, l, t, t' \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} (x_{ijlt}^m + x_{ijlt}^b) \leq 1 \quad \forall j, l, t, t' \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} (a_{jlt}^m x_{ijlt}^m + a_{jlt}^b x_{ijlt}^b) \leq \sum_{k \in K} b_{lk} Y_{ilkt} \quad \forall i, l, t, t' \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} (a_{jlt}^m x_{ijlt}^m + a_{jlt}^b x_{ijlt}^b) \geq \sum_{k \in K} b'_{lk} Y_{ilkt} \quad \forall i, l, t, t' \quad (5)$$

$$\sum_l \sum_k R_{lk} Y_{ilkt} \leq \beta_i V_i \quad \forall i, t, t' \quad (6)$$

$$\sum_{i \in I} V_i \leq P \quad (7)$$

$$Y_{ilkt} \in \{0, 1\}, V_i \in \{0, 1\}, x_{ijlt}^m \geq 0, x_{ijlt}^b \geq 0, \quad \forall i, j, l, k, t, t' \quad (8)$$

(۶) در هر دوره و روز، فضایی که ماژول‌ها با سایزهای مختلف در تسهیل i اشغال می‌کنند، نباید از فضای کل در دسترس در آن تسهیل بیشتر باشد.

(۷) تعداد کل تسهیلات مکان‌یابی شده از P نباید بیشتر شود.

(۸) دامنه‌ی متغیرهای تصمیم احداث تسهیلات و استقرار ماژول‌ها صفر و یک هستند. همچنین، متغیرهای مقدار پوشش تقاضای پایه و پشتیبان، همواره مثبت هستند.

۴. مطالعه‌ی موردی منطقه‌ی سه تهران

مدل نوشتار حاضر، بر روی داده‌های واقعی مربوط به منطقه‌ی ۳ تهران اجرا شده است. شهرداری تهران در هر ناحیه و منطقه، محل‌هایی را برای زمان‌هایی که بحران رخ می‌دهد، تعیین کرده است، که با عنوان "محل‌های تخلیه‌ی اضطراری" شناخته می‌شوند؛ که غالباً شامل پارک‌ها، بوستان‌ها، زمین‌های خالی، حیاط برخی مدارس، و غیره هستند. در پژوهش کنونی، از مکان‌های اخیر به عنوان محل‌های بالقوه تأسیس تسهیلات جهت ارائه‌ی خدمات استفاده شده است. همان‌طور که در مقدمه ذکر شده است، به‌طور کلی در زمانی که

تابع هدف شامل سه جمله است، که به ترتیب این موارد را نشان می‌دهد: درآمد حاصل از پوشش خدمت پایه و پشتیبان، هزینه‌ی استقرار هر ماژول در هر دوره، هزینه‌ی احداث هر تسهیل در دوره‌ی اول. که در کل، بیشینه‌ساختن سود حاصل از پوشش تقاضای تخصیص داده‌شده‌ی پایه و پشتیبان را نشان می‌دهد، که به واسطه‌ی آن، مکان‌یابی پوشش تقاضای مذکور، به میزان بیشینه می‌رسد.

(۱) یک ماژول وقتی به تسهیل i اختصاص پیدا می‌کند، که تسهیل i بنا شده باشد. همچنین در هر تسهیل از هر نوع ماژول در هر دوره و روزی فقط یک سایز می‌تواند وجود داشته باشد.

(۲) مقدار پوشش پایه و پشتیبان کل هر نقطه‌ی تقاضا (از یک نوع ماژول در هر دوره‌ی زمانی) توسط تمامی تسهیلات، بیشینه‌ی یک است.

(۳ و ۴) اگر ماژول با سایز k در تسهیل i مستقر شد، بیشینه و کمینه‌ی ظرفیت ماژول باید رعایت شوند. همچنین تا زمانی که ماژولی مستقر شود، این حق وجود دارد که به آن تقاضای پایه و پشتیبان اختصاص داده شود.

جدول ۱. اطلاعات مربوط به ماژول‌های ارائه‌ی خدمات مورد نظر.

Module type	Type	Capacity	Size (m)	Price for each individual (Tooman)
Bathing units	1 Toilet + 3 Shower	125	5.5*1.8	36,500
	8 Toilets + 8 showers	750	9.8*2.5	
Sleeping Caravans	One	48	9.5*2.6	15,000
	Two	54	10.4*2.6	
	Three	135	17.2*2.6	
Food & Drinks Supply Units	15.8m ²	300	7.6*2.7	200,000
	25.3m ²	1000	11.6*2.7	
First Aid Units	2 Examination rooms + Reception	240	9.5*2.6	100,000
	3 Examination rooms + Reception	340	12.2*2.6	

است. تسهیلات اطراف نقاط مذکور به ارائه‌ی خدمت می‌پردازند. تقاضاهای پایه و پشتیبان به کمک جمعیت تخمین زده شده در هر نقطه‌ی تقاضا با تابع یکنواخت به دست آمده‌اند. برای ایجاد تقاضای پشتیبان، مقدار ۲۰٪ جمعیت آن نقطه در حد بالای تابع توزیع یکنواخت قرار داده شده‌اند، زیرا در حالت واقعی نیز تقاضای پشتیبان از تقاضای پایه کمتر است. همچنین برای ایجاد تقاضا با افزایش فاصله از محل حادثه نیز حد بالای جمعیت در تابع توزیع یکنواخت کاهش داده شده است. از آنجا که هر دوره در سه روز مطالعه شده است، در روزهای دوم و سوم، مقداری از تقاضای جمعیت اولیه کم شده است.

با توجه به جدول ۱، هزینه‌ی پوشش هر چهار خدمت برای یک نفر مساوی ۳۵۰۰۰ تومان است. با حساب ۳۰٪ سود برای پوشش هر نقطه‌ی تقاضا، درآمد حاصل از پوشش تقاضای پایه‌ی هر کدام از نقاط به دست می‌آید. همچنین درآمد پوشش تقاضای پشتیبان دو برابر تقاضای پایه در نظر گرفته شده است.

وقتی در دو نقطه‌ی ذکر شده در دو دوره، بحران رخ می‌دهد؛ این نقاط تقاضا، که در شکل ۱ مشاهده می‌شوند، نیازمند خدمت‌دهی می‌شوند:

- در دوره‌ی اول، نقاط تقاضا به کدهای ۳۸، ۳۷، ۴۰، ۲۵، ۴۲، ۳۶، ۳۹، ۲۶ هستند.

- در دوره‌ی دوم، نقاط تقاضا به کدهای ۴۷، ۴۶، ۲۷، ۴۹، ۴۸، ۵۱، ۲۸، ۱۵، ۱۴، ۴۵، ۱۷، ۱۸، ۳۰، ۲۹، ۵۰، ۱۶ هستند.

با توجه به اطلاعات به دست آمده‌ی اخیر، کد مدل در برنامه‌ی گمز نسخه‌ی ۲۷.۴ وارد شده و با Cplex Solver حل شده است. لپ‌تاپ استفاده شده با سیستم عامل ۶۴ بیتی ویندوز ۱۰ و حافظه‌ی ۱۶ گیگابایتی و پردازنده‌ی Core i7-1165G7 و 2.80 GHz بوده است.

تعداد تسهیلاتی که هدف، ایجاد آن‌ها بوده است (عدد p)، مساوی ۱۳ بوده است. برنامه در ۱۶ دقیقه و ۴۵ ثانیه به جواب نهایی رسیده است. مقدار تابع هدف برابر ۲۲۵۸۳۲۸/۰۲۹ و مکان‌های ۵۴، ۴۹، ۴۶، ۴۳، ۳۶، ۳۵، ۲۹، ۲۷، ۲۴، ۲۲، ۲۰، ۱۹، ۱۵، برای بنای تسهیلات انتخاب شده‌اند.

بحرانی رخ می‌دهد، مردم تأثیر دیده به ۴ نوع خدمت نیاز پیدا می‌کنند: کمک‌های اولیه، ارائه‌ی آب و غذا، استحمام، و خواب. به همین ترتیب ۴ نوع ماژول برای ارائه‌ی خدمات اخیر در نظر گرفته شده است.

با توجه به هزینه‌های حساب شده و انواع ماژول در دسترس، هر نوع ماژول به ۴ اندازه، دسته‌بندی و هزینه‌ی استقرارشان با توجه به ظرفیت‌شان اندازه گرفته می‌شود. اطلاعات مربوط به هر ماژول در جدول ۱ ارائه شده است. هر دوره در سه روز (t') مطالعه شده است. هزینه‌های روز دوم ۱۰٪ از روز اول کمتر، و هزینه‌های روز سوم ۱۰٪ از روز دوم کمتر هستند.

همچنین فواصل مکان‌های بالقوه با نقاط تقاضا (i و j ها در مدل) و نیز مساحت‌های هر محل تخلیه‌ی اضطراری به کمک گوگل‌مپ به دست آمده‌اند. داده‌های مربوط به جمعیت محل‌هایی، که نقاط تقاضای ما هستند، نیز در دسترس شهرداری تهران است.

توابع g_{ij}^b و g_{ij}^m که مقادیر متنوع برای مقدار پوشش شعاع خدمت‌های متفاوت را معین می‌کنند، مطابق رابطه‌های ۹ و ۱۰ تعریف می‌شوند:

$$g_{ij}^m = \begin{cases} 1 & \text{if } d_{ij} \leq 1200 \\ 0.7 & \text{if } 1200 < d_{ij} \leq 1300 \\ 0.5 & \text{if } 1300 < d_{ij} \leq 1400 \\ 0.3 & \text{if } 1400 < d_{ij} \leq 1500 \\ 0 & \text{if } 1500 < d_{ij} \end{cases} \quad (9)$$

$$g_{ij}^b = \begin{cases} 0.8 & \text{if } d_{ij} \leq 1700 \\ 0.5 & \text{if } 1700 < d_{ij} \leq 1800 \\ 0.3 & \text{if } 1800 < d_{ij} \leq 1900 \\ 0.1 & \text{if } 1900 < d_{ij} \leq 2000 \\ 0 & \text{if } 2000 < d_{ij} \end{cases} \quad (10)$$

در مثال اخیر فرض شده است که در طول ۲ دوره در ۲ نقطه‌ی متفاوت منطقه، بحرانی رخ داده است و محله‌های اطراف به خدمات اولیه نیاز دارند. در دوره‌ی اول، بحران در محله‌ی دروس و در دوره‌ی دوم، در محله کاووسییه رخ داده



شکل ۱. منطقه ۳ و مکان بنای تسهیلات در آن.

جدول ۲. درصد پوشش پایهی نقاط تقاضا.

Main coverage percentage	Deamnd node	Main coverage percentage	Deamnd node
66.6	36	52.2	14
83.3	37	75	15
91.6	38	93.3	16
66.6	39	100	17
83.3	40	100	18.1
83.3	41	75	18.2
91.6	42	83.3	19
50.3	43	75	20
83.3	44	83.3	21
91.3	45	66.6	22
83.3	46	100	25
100	47	33.3	26
91.3	48	70.8	27
35	49	83.3	28
100	50	100	29.1
58.3	51	83.3	29.2
		83.3	30

جدول ۳. درصد پوشش پشتیبان نقاط تقاضایی که پوشش داده شده‌اند.

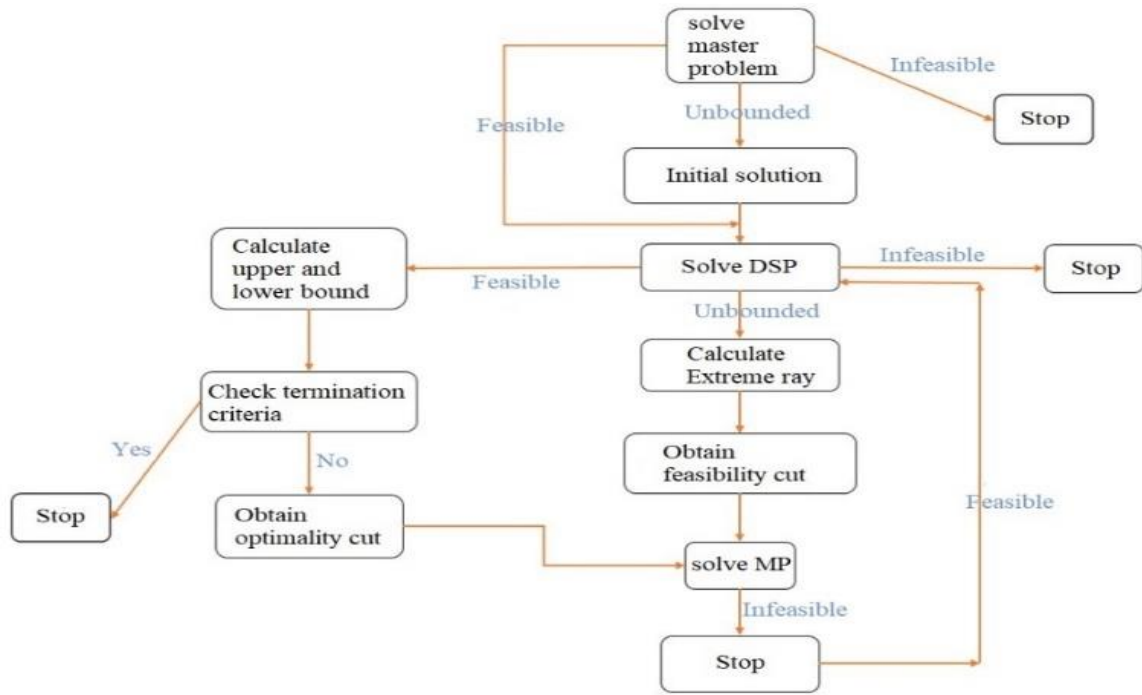
Backup coverage percentage	Deamnd node	Backup coverage percentage	Deamnd node
27	37	18	14
8	38	38	15
47	39	33	18
19	40	42	19
24	41	52	20
10	42	21	21
54	43	34	22
33	44	61	26
17	45	47	27
20	46	40	28
17	48	47	29
78	49	25	30
46	51	40	36

است. متغیرهای سخت، متغیرهایی هستند که از تجزیه‌ی مسئله به مسائل کوچک‌تر جلوگیری می‌کنند. معمولاً، آن‌ها در چندین محدودیت وجود دارند و با ثابت کردن آن‌ها می‌توان مسئله را به دو زیرمسئله تجزیه کرد. مسئله‌ی اصلی^{۳۳}، شامل متغیرهای سخت است و آن‌ها معمولاً از جنس عدد صحیح هستند، که ماهیت پیچیدگی خود را در تجزیه از دست می‌دهند. زیرمسئله،

مقدار پوشش پایه و پشتیبان نقاط تقاضای ایجادشده در هر دوره، در جدول‌های ۲ و ۳ ارائه شده‌اند.

۵. حل مدل با الگوریتم تجزیه‌ی بندرز

در روش مذکور، اولین کاری که انجام می‌شود، شناسایی متغیرهای سخت مدل



شکل ۲. روش کلی الگوریتم تجزیه‌ی بندرز.

S.T.

$$\sum_{i \in I} (x_{ijltt'}^m + x_{ijltt'}^b) \leq 1 \quad \forall j, l, t, t' \quad (18)$$

$$\sum_{j \in J} (a_{jltt'}^m x_{ijltt'}^m + a_{jltt'}^b x_{ijltt'}^b) \leq \sum_{k \in K} b_{lk} Y_{ilkt t'} \quad \forall i, l, t, t' \quad (19)$$

$$\sum_{j \in J} (a_{jltt'}^m x_{ijltt'}^m + a_{jltt'}^b x_{ijltt'}^b) \geq \sum_{k \in K} b'_{lk} Y_{ilkt t'} \quad \forall i, l, t, t' \quad (20)$$

$$x_{ijltt'}^m \geq 0, x_{ijltt'}^b \geq 0 \quad \forall i, j, l, t, t' \quad (21)$$

-Dual Sub Problem

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \gamma_{jltt'} + \\ & \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \lambda_{iltt'} \left(\sum_{k \in K} b_{lk} \bar{y}_{ilkt t'} \right) + \\ & \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \delta_{iltt'} \left(\sum_{k \in K} b_{lk} \bar{y}_{ilkt t'} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

S.T.

$$\gamma_{jltt'} + a_{jltt'}^m \lambda_{iltt'} + a_{jltt'}^b \delta_{iltt'} \geq c_j^m g_{ij}^m a_{jltt'}^m \quad \forall i, j, l, t, t' \quad (23)$$

$$\gamma_{jltt'} + a_{jltt'}^b \lambda_{iltt'} + a_{jltt'}^b \delta_{iltt'} \geq c_j^b g_{ij}^b a_{jltt'}^b \quad \forall i, j, l, t, t' \quad (24)$$

$$\gamma_{jltt'}, \lambda_{iltt'} \geq 0, \delta_{iltt'} \leq 0 \quad \forall i, j, l, t, t' \quad (25)$$

که از جنس برنامه‌ریزی خطی است، با ثابت کردن متغیرهای سخت ایجاد و دوگان آن به دست می‌آید. دوگان زیرمسئله از حل مسئله پیروی می‌کند.

اول، مسئله‌ی اصلی حل می‌شود و نتایج آن به دوگان زیرمسئله منتقل می‌شود. زیرمسئله‌ی دوگان، یک سری صفحات برشی تولید می‌کند و باعث همگرایی متغیرهای سخت به سمت مقدار بهینه می‌شود. مکانیزم عملکرد روش حل مبتنی بر تکرار حل مسائل اخیر، ساده‌تر است. بیشینه‌ی تعداد تکرار صورت گرفته، به تعداد نقاط گوشه‌ای دوگان زیرمسئله و تعداد جهت‌های رأسی دوگان زیرمسئله در بدبینانه‌ترین حالت بستگی دارد.^[۲۴-۲۱] روش اجرای الگوریتم در شکل ۲ مشاهده می‌شود.

در مدل پیشنهادی، متغیرهای سخت به صورت v_i و $Y_{ilkt t'}$ در نظر گرفته شده و به شکل زیرمسئله، تجزیه و فرمول‌بندی شده‌اند.

-Master Problem

$$\text{Max } Z_{upper} \quad (11)$$

$$Z_{upper} \leq - \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} h_{ilkt t'} y_{ilkt t'} - \sum_{i \in I} e v_i \quad (12)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ilkt t'} \leq v_i \quad \forall i, l, t, t' \quad (13)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{k \in K} R_{lk} y_{ilkt t'} \leq \beta_i v_i \quad \forall i, t, t' \quad (14)$$

$$\sum_{i \in I} v_i \leq p \quad (15)$$

$$Y_{ilkt t'} \in \{0, 1\}, v_i \in \{0, 1\} \quad \forall i, l, k, t, t' \quad (16)$$

- Sub Problem

$$\text{Max} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} (c_j^m g_{ij}^m a_{jltt'}^m x_{ijltt'}^m + c_j^b g_{ij}^b a_{jltt'}^b x_{ijltt'}^b) \quad (17)$$

جدول ۴. گروه‌بندی مثال‌ها و مقادیر مربوط به هر کدام.

	Number of demand points	Number of potential facilities	Number of facilities	$t' - t$
Small Samples	100	10	3	3-2
	300	30	10	3-2
Medium Samples	500	50	13	3-2
	700	70	18	3-2
Big Samples	1000	100	20	3-3
	1200	120	24	3-3

جدول ۵. خروجی نرم‌افزار و تجزیه‌ی بندرز به همراه مدت زمان اجرای آن در نرم‌افزار گمز.

Benders Timing (s)	Model Timing (s)	Margin %	Benders OF	Software output	Potential facilities	Demand point number
1	3	0.048	445064.05	445280.08	10	100
6	19	0	1498448.975	1498448.975	30	300
17	84	0.024	1952477.173	1952007.449	50	500
32	469	0.0053	2700344.844	2700202.405	70	700
93	—	—	4389487.04	—	100	1000
134	—	—	5317720.436	—	120	1200

۶. تولید داده برای الگوریتم تجزیه‌ی بندرز

برای شروع کار، ابتدا مقدار نقاط تقاضا و تسهیل را که قرار است هر کدام نمایانگر یک مثال ذکر شده باشد، تعیین می‌شود. این مقادیر به سه گروه مثال‌های کوچک، متوسط و بزرگ تقسیم می‌شوند. تعداد تسهیلاتی که قرار است مکان‌یابی شوند، نیز باید تعیین شوند (مقدار p). همچنین باید تعیین شود که هر مثال در چند دوره (t) و در چند روز (t') اجرا می‌شود. در جدول ۴، هر یک از مقادیر گروه‌بندی اخیر ارائه شده است.

در مرحله‌ی بعد، باید اعداد تصادفی تولید شوند. برای تولید اعداد تصادفی، با استفاده از توزیع یکنواخت برای هر پارامتر موجود در بازه‌ی مناسب به خودش، عدد تولید می‌شود.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تمامی مقادیر بازه‌های مذکور برای تک‌تک مثال‌ها یکسان هستند، به جز بازه‌ی مربوط به فاصله‌ی میان هر مکان بالقوه‌ی تسهیل با هر نقطه‌ی تقاضا. زیرا با رشد تعداد نقاط تقاضا، فاصله‌ی میان هر نقطه با دورترین نقطه‌ی ممکن در همان محدوده افزایش می‌یابد و افزایش فاصله‌ی اخیر باید به درستی در بازه‌ی اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت مربوط به پارامتر d_{ij} منعکس شود. بنابراین، با افزایش تعداد نقاط تقاضا، بازه‌ی اخیر نیز بزرگ‌تر می‌شود. همچنین، در مثال‌های مذکور، مقدار هر کدام از درآمدهای مربوط به پوشش تقاضای پشتیبان با افزودن ۵٪ به درآمد مربوط به پوشش تقاضای پایه به‌دست می‌آید.

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، به‌طور کلی در زمانی که بحرانی رخ می‌دهد، مردم تأثیردیده به ۴ نوع خدمت نیاز پیدا می‌کنند: کمک‌های اولیه، ارائه‌ی آب و غذا، استحمام، و خواب. به همین ترتیب ۴ نوع مازول برای ارائه‌ی خدمات مذکور در نظر گرفته شده است. هزینه‌ی مربوط به هر مازول براساس هزینه‌های واقعی مربوط به هر کدام از چهار خدمت محاسبه شده است. هزینه‌ی استقرار هر مازول نیز با توجه به ظرفیت هر کدام تولید شده است. در جدول ۵، توابع

از آنجا که زیرمسئله سه محدودیت دارد، باید سه متغیر جدید برای مسئله‌ی دوگان معرفی کرد که متغیرهای $\gamma_{jltt'}$ ، $\lambda_{iltt'}$ و $\delta_{iltt'}$ هستند. برش‌های بهینگی و شدنی‌سازی به صورت روابط ۲۶ و ۲۷ نوشته می‌شوند:

- Optimality Cut

$$Z_{upper} \leq \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \gamma_{jltt'} + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \lambda_{iltt'} \left(\sum_{k \in K} b_{lk} y_{ilktt'} \right) + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \delta_{iltt'} \left(\sum_{k \in K} b_{lk} y_{ilktt'} \right) - \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} h_{ilktt'} y_{ilktt'} - \sum_{i \in I} e v_i \quad (26)$$

- Feasibility Cut

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \gamma_{jltt'} + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \lambda_{iltt'} \left(\sum_{k \in K} b_{lk} y_{ilktt'} \right) + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{t' \in T'} \delta_{iltt'} \left(\sum_{k \in K} b_{lk} y_{ilktt'} \right) \leq 0 \quad (27)$$

در هر مرحله‌ی الگوریتم با به‌دست‌آمدن v_i و $y_{ilktt'}$ بهینگی جدید، صفحات برشی مذکور به مسئله‌ی اصلی اضافه می‌شوند. برش بهینگی باعث بهبود مقدار حد بالا در هر تکرار می‌شود و برش شدنی‌سازی از نامتناهی‌شدن جواب زیرمسئله‌ی دوگان جلوگیری می‌کند. حد بالا در هر تکرار، مقدار جواب بهینگی تابع مسئله‌ی اصلی و حد پایین، جواب تابع هدف زیرمسئله‌ی دوگان است (رابطه‌ی ۲۸). (۲۵ و ۲۶)

$$|Z_{upper} - Z_{lower}| \leq \varepsilon \quad (28)$$

بدین صورت کد الگوریتم بندرز در برنامه‌ی گمز نوشته و با داده‌های مربوط به فصل قبل اجرا می‌شود. در این حالت، مقدار تابع هدف برابر $۲۲۵۸۳۸۷/۹۸۳$ شده است، که به مقدار ۹۹/۹۹٪ به مقدار تابع هدفی که در فصل پیش به‌دست آمده بود، شباهت دارد. این کد در ۲۳ ثانیه و ۹ تکرار اجرا شده است.

در آن اجرا می‌شود، توسط ماژول‌هایی که در تسهیلات مجاور مستقر شده‌اند، پوشش داده می‌شود. به عبارت دیگر، شاخص PTM از میانگین جمع مقدار پوششی که تمام نقاط تقاضا در همه‌ی دوره‌ها از تمامی ماژول‌های مستقر در تسهیلات گوناگون اطراف دریافت می‌کنند، به دست می‌آید.

• **شاخص دوم (PTB):** مشابه شاخص اول است، منتهی برای تقاضای پشتیبان تمام نقاط تقاضا در همه‌ی دوره‌هایی است که مدل در آن اجرا می‌شود. به همان ترتیب، شعاع پوشش مربوط به هر کدام از ماژول‌هایی که به هر نقطه‌ی تقاضا خدمت ارائه می‌دهند، شعاع خدمت بزرگ‌تر، پوشش تقاضای پشتیبان محسوب می‌شود.

• **شاخص سوم (MC):** مربوط به میانگین مجموع مقدار پوششی است که هر ماژول در هر تسهیل به تمامی نقاط تقاضای اختصاص یافته به خود ارائه می‌دهد. این مقدار از مجموع درصد پوشش هر دو خدمت پایه و پشتیبان از سوی ماژول‌های مستقر در هر کدام از تسهیلات تأسیس شده به دست می‌آید؛ که هدف آن به دست آوردن مقدار خدمت‌دهی هر کدام از ماژول‌های استقرار یافته است، تا به نوعی بتوان ماژول‌ها را از نظر مقدار مشغولیت در خدمت‌دهی با یکدیگر مقایسه کرد.

۱.۷. افزایش و کاهش درآمد

ابتدا بر روی هر کدام از مثال‌های ذکر شده، درآمد حاصل از استقرار هر ماژول کم و زیاد شده و مقایسه‌ی نتایج با درآمد اصلی صورت گرفته است (مطابق جدول‌های ۸ و ۹).

در جدول ۸ مشاهده می‌شود که تابع هدف مدل‌ها به طبع تغییر درآمد حاصل از استقرار ماژول‌ها در هر تسهیل افزایش یا کاهش یافته‌اند. همچنین مطابق جدول ۹، نتیجه گرفته می‌شود که افزایش یا کاهش درآمد، تغییری در تعداد نقاط تقاضای پوشش داده شده توسط ماژول‌های مستقر در تسهیلات ندارد.

همان‌طور که در نمودارهای شکل‌های ۱ الی ۸ مشاهده می‌شود، با افزایش درآمد حاصل از استقرار ماژول‌ها در هر تسهیل، میانگین پوشش هر نقطه‌ی

جدول ۸. تفاوت ایجاد شده در توابع هدف مدل اصلی و مدل بندرز با

تغییر در درآمد.

Income Increase	Primary Income	Income Reduction	Deamnd Points
10	10	10	100
24	24	25	300
40	37	37	500
45	46	46	700

هدف مربوط به مدل و الگوریتم تجزیه‌ی بندرز برای هر کدام از مثال‌ها ارائه شده است.

همان‌طور که قبلاً گفته شده است، مدل به همراه الگوریتم تجزیه‌ی بندرز در برنامه‌ی گمز نسخه‌ی ۲۷.۴ وارد و با Cplex Solver حل شده است. لپ‌تاپ استفاده شده با سیستم عامل ۶۴ بیتی ویندوز ۱۰ و حافظه‌ی ۱۶ گیگابایتی عمل کرده و پردازنده‌ی آن Core i7-1165G7 و 2.80 GHz بوده است. با توجه با ویژگی‌های دستگاه ذکر شده‌ی در دسترس، مقادیر توابع هدف مربوط به مدل و الگوریتم تجزیه‌ی بندرز برای هر کدام از مثال‌ها در مدت زمان مشخص خود به دست آمده‌اند.

همچنین مشاهده شده است که برای مثال‌ها با مقادیر بزرگ (مثال‌های با ۱۰۰۰ و ۱۲۰۰ نقطه‌ی تقاضا و ۳ دوره در ۳ روز)، مدل اصلی مسئله قادر به حل مسئله نبوده و مقدار تابع هدف فقط از طریق الگوریتم تجزیه‌ی بندرز به دست آمده است. در جدول‌های ۶ و ۷، میانگین مقدار پوشش‌های پایه و پشتیبان نقاط تقاضا در هر چهار مثال ارائه شده است. در مسائلی از این گونه، با افزایش ابعاد مسئله، مدت زمان رسیدن مدل به جواب آخر به صورت تصاعدی رشد می‌کند. در جدول‌های مذکور به وضوح مشخص است که مدت زمان رسیدن الگوریتم تجزیه‌ی بندرز به جواب پایانی کران بالای خود و تحویل تابع هدف، به مراتب کمتر از مدل اصلی مسئله است.

۷. تحلیل حساسیت برخی پارامترها

هدف در بخش حاضر این است که با مشاهده‌ی افزایش و کاهش برخی پارامترها، به بررسی تغییرات در جواب‌های به دست آمده پرداخته شود. برای تحلیل و بررسی جواب‌ها به یک سری شاخص نیاز است؛ که نشان می‌دهند تغییرات اخیر، چگونه و به چه مقدار در نحوه‌ی پاسخ‌دهی و پوشش تقاضای پایه و پشتیبان ماژول‌ها تأثیر می‌گذارند.

• **شاخص اول (PTM):** مربوط به میانگین مجموع کل درصد تقاضای پایه‌ای است که در هر کدام از نقاط تقاضای موجود، به ازاء هر دوره‌ای که مدل

جدول ۶. میانگین مقدار پوشش پایه‌ی نقاط تقاضا در هر چهار مثال.

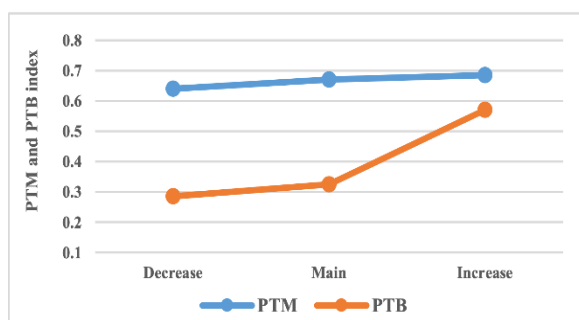
Second period	First period	Demand point
0.6	0.58	100
0.8	0.83	300
0.663	0.677	500
0.74	0.75	700

جدول ۷. میانگین مقدار پوشش پشتیبان نقاط تقاضا در هر چهار مثال.

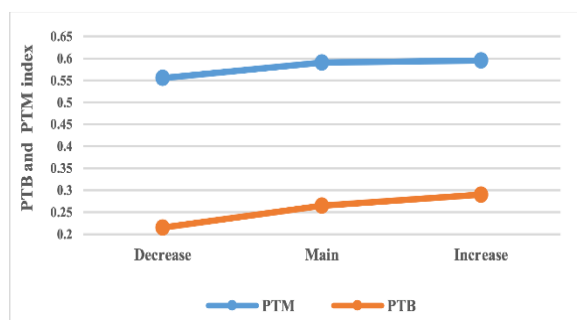
First period	First period	Demand poin
0.27	0.26	100
0.15	0.3	300
0.335	0.315	500
0.36	0.37	700

جدول ۹. تعداد نقاط تقاضای پوشش داده شده در هر حالت درآمد.

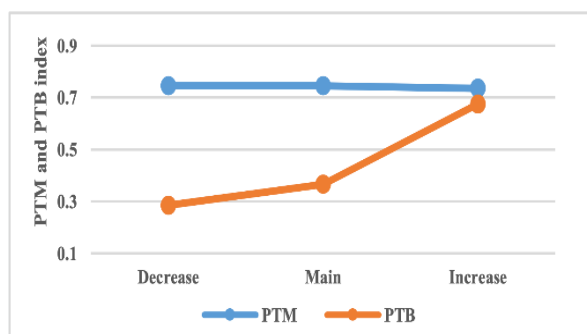
Income Increase		Primary Income		Income Reduction		
Benders	Main Model	Benders	Main Model	Benders	Main Model	
903794.05	903793.74	445064.05	445063.74	131590.49	131590.37	100
3027856.45	3027856.45	1498448.97	1498448.97	444575.66	444575.66	300
3931507.98	3931507.98	1952477.17	1952477.17	580682.21	580682.21	500
5453830.56	5453528.96	2700344.84	2700202.40	801458.82	801410.63	700



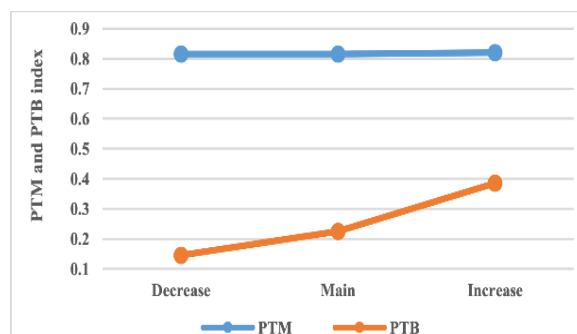
شکل ۲. نمودار شاخص‌های پوشش تقاضا در هر وضعیت درآمد در ۳۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



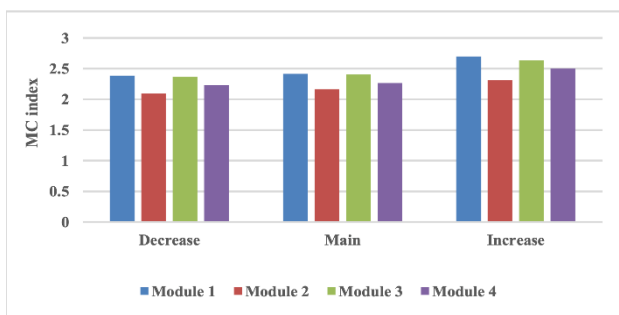
شکل ۱. نمودار شاخص‌های پوشش تقاضا در هر وضعیت درآمد در ۱۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



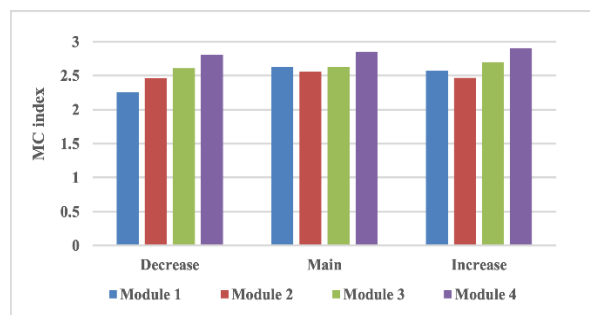
شکل ۴. نمودار شاخص‌های پوشش تقاضا در هر وضعیت درآمد در ۷۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



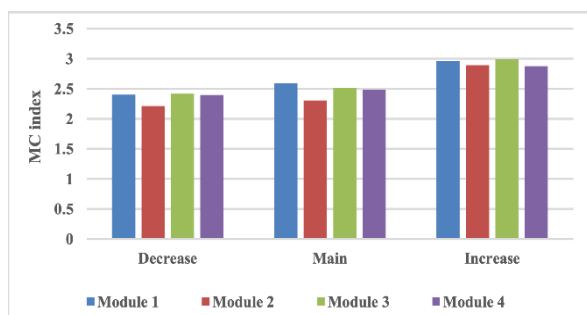
شکل ۳. نمودار شاخص‌های پوشش تقاضا در هر وضعیت درآمد در ۵۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



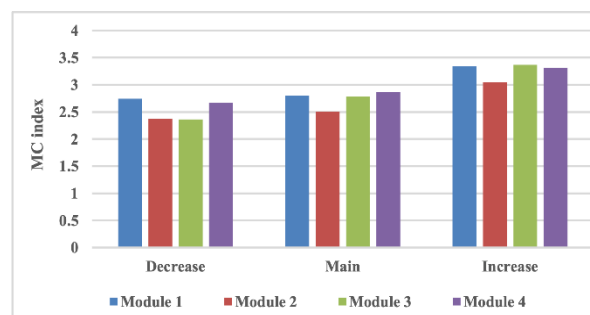
شکل ۶. نمودارهای شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول در هر وضعیت درآمد در ۳۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



شکل ۵. نمودارهای شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول در هر وضعیت درآمد در ۱۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



شکل ۸. نمودارهای شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول در هر وضعیت درآمد در ۷۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



شکل ۷. نمودارهای شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول در هر وضعیت درآمد در ۵۰۰ نقطه‌ی تقاضا.

است، گرچه تغییر اخیر در مثال‌های گروه متوسط بیشتر از مثال‌های گروه کوچک بوده و با افزایش درآمد، مقدارش اندکی زیاد شده است. دلیل تغییر اندک مذکور، ثابت ماندن تعداد نقاط تقاضای پوشیده شده است؛ به بیانی، ایجاد تغییر در درآمد، تفاوتی در تعداد نقاط پوشیده شده به وجود نمی‌آورد و فقط همان نقاط تقاضای سابق را بهتر پوشش می‌دهد.

تقاضا نیز مطابق نمودارهای مذکور افزایش یافته است. این افزایش در تقاضای پشتیبان بیشتر از تقاضای پایه دیده شده است. در هنگام کاهش درآمد، میانگین پوشش تقاضای پشتیبان نیز کاهش یافته است، ولی میانگین پوشش تقاضای پایه تغییر چندانی نکرده است. شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول مستقر در تسهیلات نیز با کاهش و افزایش درآمد تغییر اندکی کرده

۲.۷. افزایش و کاهش شعاع پوشش

در ادامه، شعاع خدمت در هر کدام از مثال‌ها افزایش و کاهش یافته و میزان تغییرات در شاخص‌های مذکور بررسی شده است.

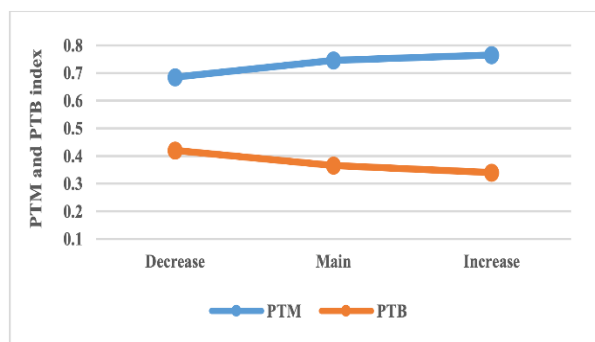
همان‌طور که در جدول ۱۰ دیده می‌شود، افزایش یا کاهش شعاع پوشش، تغییر اندکی را در توابع هدف به همراه داشته است؛ اما با کاهش شعاع پوشش، مطابق جدول ۱۱ مشاهده می‌شود که در تعداد نقاط تقاضای پوشش داده‌شده، افزایش چشمگیری رخ داده است.

جدول ۱۰. تفاوت ایجادشده در توابع هدف مدل اصلی و مدل بندرز با تغییر در شعاع خدمت.

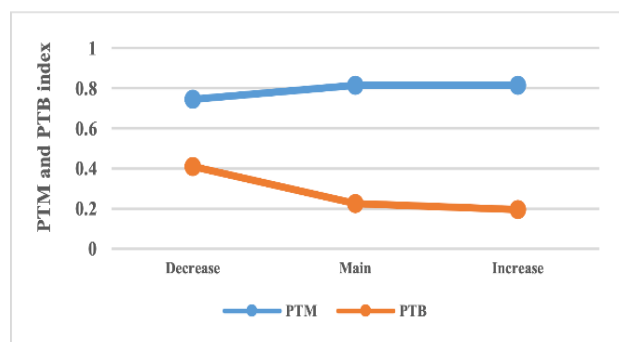
	Coverage Radius Reduction		Primary Coverage Radius		Coverage Radius Increase	
	Main Model	Benders	Main Model	Benders	Main Model	Benders
100	440709.54	440709.54	445063.74	445064.05	448172.87	448172.87
300	1486524.36	1486524.36	1498448.97	1498448.97	1498461.79	1498461.79
500	1929030.23	1929030.23	1952477.17	1952477.17	1954352.16	1954352.16
700	2677350.69	2686835.00	2700202.40	2700344.84	2701095.19	2701095.19

جدول ۱۱. تعداد نقاط تقاضای پوشش داده شده در هر حالت شعاع پوشش.

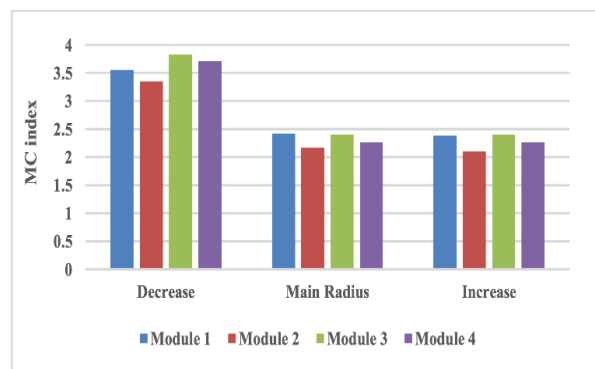
Demand Points	Coverage Radius Reduction	Primary Coverage Radius	Coverage Radius Increase
100	12	10	10
300	46	24	24
500	75	37	30
700	72	46	45



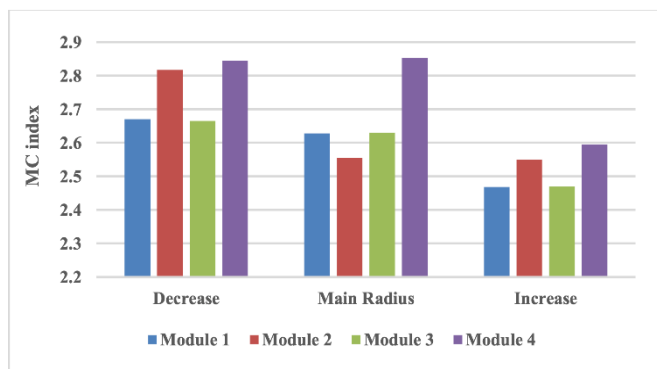
شکل ۱۲. نمودار شاخص‌های پوشش تقاضا برای هر شعاع پوشش در ۷۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



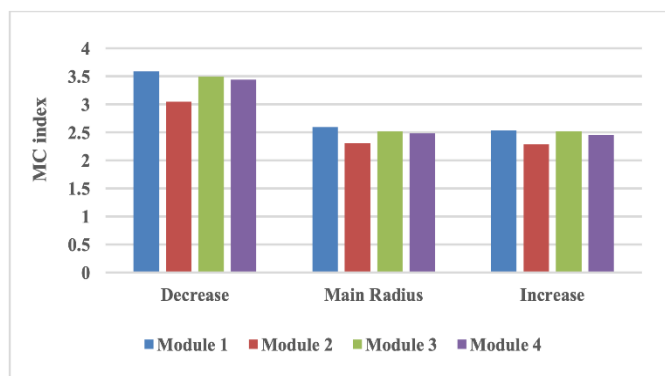
شکل ۱۱. نمودار شاخص‌های پوشش تقاضا برای هر شعاع پوشش در ۵۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



شکل ۱۴. نمودار شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول در هر شعاع پوشش در ۳۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



شکل ۱۳. نمودار شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول در هر شعاع پوشش در ۱۰۰ نقطه‌ی تقاضا.



شکل ۱۶. نمودار شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول در هر شعاع پوشش در ۷۰۰ نقطه‌ی تقاضا.

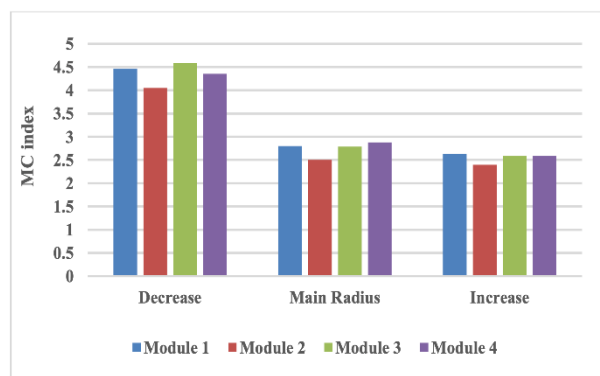
بندرز نه فقط جواب‌هایی بسیار نزدیک به جواب اصلی می‌دهند، بلکه مدل را در مدت زمان کوتاه‌تری حل می‌کند. همچنین الگوریتم تجزیه‌ی بندرز، مثال‌های بزرگ را که مدل اصلی قادر به یافتن پاسخی برایشان نیست، را نیز می‌تواند حل کند.

در ادامه، با ایجاد تغییراتی در پارامترهای مسئله و بررسی جواب‌هایی که از هر حالت به‌دست آمده‌اند، این نتیجه به‌دست آمده است که با افزایش درآمد حاصل از استقرار ماژول‌ها در محل تسهیلات و همچنین کاهش شعاع پوشش ماژول‌های ذکرشده، بیشترین افزایش در مقدار تابع هدف مدل وجود خواهد داشت. همچنین پوشش خدمت پشتیبان نسبت به تغییرات پارامترها در مقایسه با خدمت پایه، حساسیت بیشتری دارد. هنگام طراحی یک مسئله باید به مقادیر مذکور و تعادلی که در مدل ایجاد می‌کنند، توجه بسیاری شود و آن‌ها را به‌گونه‌ای در مدل قرار داد، که علاوه بر رفع نیازها و رعایت محدودیت‌های موجود، بتوانند بهترین جواب‌های ممکن را ارائه دهند.

همان‌طور که ذکرشده است، مدل پیشنهادی جهت ارائه‌ی خدمت به افراد بحران‌زده در زمان رویداد حوادث ایجاد شده است. ماهیت و ساختار آن به دلیل اینکه تسهیلات از ماژول‌هایی با قابلیت جابجایی تشکیل شده‌اند، انعطاف‌پذیر است؛ یعنی هنگام وقوع هر حادثه با توجه به نیازهایی که در هر ناحیه‌ی تقاضا ایجاد می‌شود، ماژول‌های پاسخ‌دهنده به همان نیازهای تسهیلات مرتبط به آن نواحی اعزام می‌شوند و بعد از پایان کار خدمت‌رسانی از آن ناحیه خارج می‌شوند. بنابراین، سازمان‌های دولتی و ارگان‌های خصوصی (همانند سازمان‌های مدیریت بحران شهری و سازمان‌های برنامه‌ریزی سیاست‌گذار) که

در زمینه‌ی امداد رسانی هنگام رخداد سیل، زلزله، و یا حتی جنگ فعالیت دارند، می‌توانند از مدل پیشنهادی استفاده کنند و برای این کار نیازمند دسترسی به ماژول‌های با قابلیت جابجایی هستند.

در پژوهش حاضر، احتمال خرابی برای ماژول‌ها در نظر گرفته نشده است و جا دارد در مطالعات آینده، مدل ریاضی حاضر با لحاظ توابع احتمالی و سناریو بندی برای خرابی ماژول‌ها توسعه یابد. همچنین در مدل پیشنهادی جای دارد بررسی‌های بیشتری بر روی مقادیر پارامترها و تحلیل حساسیت بهتری بر روی آن‌ها انجام شود. و در آخر می‌توان در روش حل مدل تغییراتی ایجاد کرد؛ برای مثال مدل را در برنامه‌ی گمز با یک Solver دیگر اجرا کرد و یا به جای روش حل دقیق به کار برده‌شده در پژوهش حاضر (الگوریتم تجزیه‌ی بندرز)، از یک روش فراابتکاری برای حل مدل استفاده و پاسخ‌ها را با هم مقایسه کرد.



شکل ۱۵. نمودار شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول در هر شعاع پوشش در ۵۰۰ نقطه‌ی تقاضا.

داشتن نواحی پوشش محدودتر توانسته‌اند نقاط تقاضا داخل شعاع پوشش خود را بهتر پوشش دهند. از طرفی دیگر، با افزایش شعاع پوشش ماژول‌های مستقر در تسهیلات، افزایش اندک میانگین پوشش تقاضای پایه مشاهده می‌شود؛ اما میانگین پوشش تقاضای پشتیبان کاهش قابل توجهی داشته است. از آنجا که تعداد نقاط تقاضای پوشش داده‌شده در این حالت تغییری نکرده است، طبیعی است که شاخص جمع پوشش‌های تقاضا برای هر ماژول مستقر در تسهیلات نیز تغییر چندانی نداشته باشد.

به‌صورت کلی مشاهده می‌شود تغییراتی که در مقادیر پارامترها به وجود آورده شده است، بر روی پوشش خدمت پشتیبان تأثیر بیشتری گذاشته است؛ به‌عبارتی دیگر، پوشش کل خدمت پشتیبان در مقابل تغییرات پارامترها، حساسیت بالاتری نسبت به پوشش کل خدمت پایه از خود نشان داده است. وجود این حساسیت‌ها و درک‌شان برای تصمیم‌گیری که قصد پیاده‌سازی مدل مذکور را برای سازمان و تسهیلات خود دارند، حائز اهمیت بسیار هستند و مقادیر پارامترهای مدل باید با دقت فراوان و بررسی‌های دقیق انتخاب شوند تا بیشترین مقدار پوشش پایه و پشتیبان به نقاط تقاضا، عرضه و به بهترین نحو ممکن از مدل بهره‌برداری شود.

۸. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، به یک مسئله‌ی مدل‌سازی مکان‌یابی بیشینه‌ی پوشش‌دهی پویا پرداخته شده است، که در ضمن خدمت‌رسانی اصلی و پایه‌ی ماژول‌ها به نقاط تقاضا، در مواقع عدم در دسترس بودن کل ظرفیت برخی از ماژول‌های مذکور، ماژول‌های اطراف با ارائه‌ی خدمت پشتیبان بتوانند تقاضای نقاطی که مورد غفلت قرار گرفته‌اند، را پوشش دهند و این کمبود را جبران کنند. هدف پژوهش کنونی، ارائه‌ی بیشینه‌ی خدمت به افرادی است که طی حادثه‌ای، بحران‌زده شوند و به خدمات اولیه نیازمند باشند. مدل ریاضی مسئله‌ی مذکور، ایجاد و برای نشان دادن کارایی آن، روی یک مطالعه‌ی موردی پیاده‌سازی و اجرا شده است. مطالعه‌ی حاضر، در منطقه‌ی سه تهران انجام شده و تمامی عوامل و پارامترهای مربوط به مدل با توجه ویژه به شرایط واقعی ناحیه‌ی مطالعه‌شده در نظر گرفته شده‌اند. برای حل مدل مذکور، یک بار آن را با نرم‌افزار گمز اجرا کرده و بار دیگر از الگوریتم تجزیه‌ی بندرز استفاده شده است، که جواب هر دو بسیار نزدیک به یکدیگر بوده است.

در مرحله‌ی بعد، برای تعمیم و گسترش مدل، مثال‌های دیگری زده شده است، که با اعداد تصادفی تولید شده‌اند. مثال‌های اخیر نیز با کمک مدل اصلی و مدل الگوریتم تجزیه‌ی بندرز حل و مشاهده شده است که الگوریتم تجزیه‌ی

References – منابع

1. Church, R. and Velle, C.R., 1974. The maximal covering location problem. *Papers In Regional science*, 32(1), pp.101-118. <https://doi.org/10.1111/j.1435-5597.1974.tb00902.x>
2. Alizadeh, R., Nishi, T., Bagherinejad, J. and Bashiri, M., 2021. Multi-period maximal covering location problem with capacitated facilities and modules for natural disaster relief services. *Applied Sciences*, 11(1), p.397. <https://doi.org/10.3390/app11010397>
3. Vatsa, A.K. and Jayaswal, S., 2016. A new formulation and Benders decomposition for the multi-period maximal covering facility location problem with server uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 251(2), pp.404-418. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.11.025>
4. Allman, A. and Zhang, Q., 2020. Dynamic location of modular manufacturing facilities with relocation of individual modules. *European Journal of Operational Research*, 286(2), pp.494-507. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.03.045>
5. Atta, S., Sinha Mahapatra, P.R. and Mukhopadhyay, A., 2018. Solving maximal covering location problem using genetic algorithm with local refinement. *Soft Computing*, 22, pp.3891-3906. <https://doi.org/10.1007/s00500-017-2598-3>
6. Porras, C., Fajardo, J., Rosete, A. and Masegosa, A.D., 2021. Partial evaluation and efficient discarding for the maximal covering location problem. *IEEE Access*, 9, pp.20542-20556. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3055295>
7. Zarandi, M.H.F., Davari, S. and Sisakht, S.A.H., 2013. The large-scale dynamic maximal covering location problem. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(3-4), pp.710-719. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2012.07.028>
8. Jia, H., Ordóñez, F. and Dessouky, M., 2007. A modeling framework for facility location of medical services for large-scale emergencies. *IEEE Transactions*, 39(1), pp.41-55. <https://doi.org/10.1080/07408170500539113>
9. Ala, A., Deveci, M., Bani, E.A. and Sadeghi, A.H., 2024. Dynamic capacitated facility location problem in mobile renewable energy charging stations under sustainability consideration. *Sustainable Computing: Informatics and Systems*, 41, p.100954. <https://doi.org/10.1016/j.suscom.2023.100954>
10. ElKady, S.K. and Abdelsalam, H.M., 2016. A modified particle swarm optimization algorithm for solving capacitated maximal covering location problem in healthcare systems. *Applications of Intelligent Optimization in Biology and Medicine: Current Trends and Open Problems*, pp.117-133. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21212-8_5
11. Xu, J., Murray, A., Wang, Z. and Church, R., 2020. Challenges in applying capacitated covering models. *Transactions in GIS*, 24(2), pp.268-290. <https://doi.org/10.1111/tgis.12608>
12. Gazani, M. and Niaki, S., 2021. The capacitated maximal covering location problem with heterogeneous facilities and vehicles and different setup costs: An effective heuristic approach. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 12(1), pp.79-90. <https://doi.org/10.5267/j.ijiec.2020.9.002>
13. Vatsa, A.K. and Jayaswal, S., 2021. Capacitated multi-period maximal covering location problem with server uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 289(3), pp.1107-1126. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.07.061>
14. Zhang, G., Ma, R., Kong, Y., Lian, C., Guo, H. and Zhai, S., 2024. A multi-period capacitated facility location problem with maximum travel time and backup service for locating and sizing EMS stations. *Computational Urban Science*, 4(1), pp.1-14. <https://doi.org/10.1007/s43762-024-00143-z>
15. Calderín, J.F., Masegosa, A.D. and Pelta, D.A., 2017. An algorithm portfolio for the dynamic maximal covering location problem. *Memetic Computing*, 9(2), pp.141-151. <https://doi.org/10.1007/s12293-016-0210-5>
16. Hajipour, V., Fattahi, P., Bagheri, H. and Babaei Morad, S., 2022. Dynamic maximal covering location problem for fire stations under uncertainty: soft-computing approaches. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 13(1), pp.90-112. <https://doi.org/10.1007/s13198-021-01109-8>
17. Zarandi, M.H.F., Davari, S. and Sisakht, S.A.H., 2013. The large-scale dynamic maximal covering location problem. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(3-4), pp.710-719. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2012.07.028>
18. Marín, A., Martínez-Merino, L.I., Rodríguez-Chía, A.M. and Saldanha-da-Gama, F., 2018. Multi-period stochastic covering location problems: Modeling framework and solution approach. *European Journal of Operational Research*, 268(2), pp.432-449. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.040>
19. Sonogo, M., Echeveste, M.E.S. and Debarba, H.G., 2018. The role of modularity in sustainable design: A systematic review. *Journal of Cleaner Production*, 176, pp.196-209. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.12.106>
20. Silva, A., Aloise, D., Coelho, L.C. and Rocha, C., 2021. Heuristics for the dynamic facility location problem with modular capacities. *European Journal of Operational Research*, 290(2), pp.435-452. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.08.018>
21. Belieres, S., Hewitt, M., Jozefowicz, N., Semet, F. and Van Woensel, T., 2020. A Benders decomposition-based approach for logistics service network design. *European Journal of Operational Research*, 286(2), pp.523-537. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.03.056>
22. Bucarey, V., Fortz, B., González-Blanco, N., Labbé, M. and Mesa, J.A., 2022. Benders decomposition for network

- design covering problems. *Computers & Operations Research*, 137, p.105417. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105417>
23. Liu, B., Bissuel, C., Courtot, F., Gicquel, C. and Quadri, D., 2024. A generalized Benders decomposition approach for the optimal design of a local multi-energy system. *European Journal of Operational Research*. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.05.013>
24. Weng, W., Chu, C. and Wu, P., 2024. A Benders decomposition algorithm for resource allocation with multi-resource operations. *International Journal of Production Research*, pp.1-17. <https://doi.org/10.1080/00207543.2024.2334419>
25. Cordeau, J.F., Furini, F. and Ljubić, I., 2019. Benders decomposition for very large scale partial set covering and maximal covering location problems. *European Journal of Operational Research*, 275(3), pp.882-896. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.12.021>.
26. Azad, N. and Hassini, E., 2019. A benders decomposition method for designing reliable supply chain networks accounting for multimitigation strategies and demand losses. *Transportation Science*, 53(5), pp.1287-1312. <https://doi.org/10.1287/trsc.2018.0875>
27. Sabiza, H., 2024. Modeling of dynamic maximal covering location problem considering module breakdown. Unpublished master's thesis. Faculty of Engineering Alzahra University. Tehran, Iran. [In Persian].