

پایش فرآیندهای چندمتغیره نرمال با روش‌های نمونه‌گیری مجموعه‌ی مرتب‌شده در حضور خطاهای اندازه‌گیری

عبدالرضا کاظم‌نژاد

فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، واحد تهران غرب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

rz.kazemnejad@gmail.com

مونا ایوبی

استادیار، گروه مهندسی صنایع، واحد تهران غرب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

mona.ayoubi@iau.ac.ir

نویسنده مسئول: مونا ایوبی (mona.ayoubi@iau.ac.ir)

چکیده

در فرآیندهای تولیدی و خدماتی اغلب برای پایش فرآیند، نیاز به اندازه‌گیری است. هر نوع اندازه‌گیری ممکن است با خطا همراه باشد و اگر در پایش فرآیند این خطاها در نظر گرفته نشوند، می‌تواند منجر به خسارات زیادی شود. بنابراین، بررسی و کنترل خطاهای اندازه‌گیری اجتناب‌ناپذیر است. در این مقاله، ابتدا عملکرد نمودار کنترل T^2 برای پایش فرآیندهای نرمال چندمتغیره در حضور خطای اندازه‌گیری با استفاده از مدل جمع‌پذیر کلاسیک و نمونه‌گیری ساده‌ی تصادفی (SRS^1) در فاز ۲ بررسی می‌شود. سپس برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری، استفاده از رویکردهای نمونه‌گیری مجموعه‌ی مرتب‌شده‌ی استاندارد (RSS^2 استاندارد) و $NRSS^3$ پیشنهاد می‌شوند و مرتب‌سازی براساس مقادیر امتیازات مولفه‌های اصلی صورت می‌گیرد. عملکرد رویکردهای پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی و معیارهای سنجش عملکرد متوسط طول دنباله (ARL^4) و انحراف معیار طول دنباله ($SDRL^5$) مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. نتایج حکایت از تاثیر نامطلوب خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل T^2 دارد و تاثیر بسزای نمونه‌گیری مبتنی بر RSS را بر بهبود عملکرد نمودار کنترل T^2 با وجود خطای اندازه‌گیری تایید می‌کنند. نکته حائز اهمیت که نتایج آن را گزارش می‌کنند این است که در روش‌های مبتنی بر RSS در فرآیندهای چندمتغیره، برای مرتب‌سازی متغیرها اگر مرتب‌سازی بر اساس مولفه اصلی اول انجام شود، نتایج مطلوب‌تری حاصل خواهد شد.

کلمات کلیدی: خطای اندازه‌گیری، فرآیندهای چندمتغیره، نمونه‌گیری مجموعه‌ی مرتب‌شده، کنترل فرآیند آماری.

¹ Simple Random Sampling

² Standard Ranked Set Sampling

³ Neoteric Ranked Set Sampling

⁴ Average Run Length

⁵ Standard Deviation of Run Length

Monitoring Multivariate Normal Processes with Ranked Set Sampling Methods in the Presence of Measurement Error

Abdolreza Kazemnejad

M.Sc. graduated, Department of Industrial Engineering, WT.C., Islamic Azad University, Tehran, Iran
rz.kazemnejad@gmail.com

Mona Ayoubi

Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, WT.C., Islamic Azad University, Tehran, Iran
mona.ayoubi@iau.ac.ir

Corresponding author: Mona Ayoubi (mona.ayoubi@iau.ac.ir)

Abstract

In production and service processes, measurement is often required for process monitoring. Any type of measurement may involve errors, and if these errors are not taken into account during process monitoring, they can lead to significant losses. Therefore, examining and controlling measurement errors is unavoidable. In this paper, the performance of the control chart for monitoring multivariate normal processes in the presence of measurement error is first investigated using the classical additive model and simple random sampling (SRS) in Phase II. Then, to reduce the effect of measurement error, the use of standard ordered set sampling (standard RSS) and NRSS approaches is proposed, with ranking based on principal component scores.

The performance of the proposed approaches is evaluated using simulation and performance criteria including the average run length (ARL) and the standard deviation of run length (SDRL). The results indicate the adverse impact of measurement error on the performance of the control chart and confirm the significant effect of RSS-based sampling on improving the control chart's performance despite measurement error. An important point reported in the results is that in RSS-based methods for multivariate processes, ranking the variables based on the first principal component yields better outcomes.

Keywords: Measurement error, Multivariate processes, Ranked set sampling (RSS), Statistical process control.

Introduction

In the monitoring of manufacturing and service processes, it is sometimes necessary to measure the parameters of interest. One critical and often overlooked issue is the presence of measurement error. The importance of this issue stems from the fact that, for instance, in certain industries such as pharmaceutical and military sectors, the existence of such errors can lead to loss of life, while in other fields, it may result in significant financial damages and losses. Therefore, employing methods capable of mitigating the adverse effects of measurement error is essential. Measurement error can originate from various sources, including operator mistakes, uncalibrated measurement instruments, rounding errors, and others. Generally, in the context of measurement error, it is assumed that the true value of the variable is unobservable and cannot be directly measured, and that the observed value is a distorted version influenced by measurement error. Examining and controlling measurement errors is inevitable. In statistical process control, control charts are used to detect variations in the process. If the measurements have large errors, the actual changes in the process may not be correctly identified. Large measurement errors can lead to wrong decisions, such as unnecessary stoppage of the production line or ignoring real problems.

Methodology

In this study, we propose the application of sampling methods based on Ranked Set Sampling (RSS) to mitigate the impact of measurement error. Ranked Set Sampling is a statistical sampling technique designed to improve the efficiency and accuracy of parameter estimation. RSS has since found wide

applications in various fields such as agriculture, environmental studies, industrial quality control, and more. In Simple Random Sampling (SRS), samples are selected entirely at random without any prior information about their values. Although straightforward and widely used, SRS is not always the most efficient method in terms of precision and cost. RSS aims to improve estimation accuracy by incorporating ranking information into the sampling process.

Ranked Set Sampling provides a smart and effective approach to statistical sampling, improving precision while potentially reducing measurement costs. By leveraging ranking information, RSS achieves better representation of the population without increasing sample sizes. Recent developments and variations in RSS methodology have further expanded its applicability and efficiency across diverse fields.

RSS has found applications across numerous domains, including Agriculture (Estimating average crop yield, seed quality, or livestock weight), Environmental Science (Sampling pollutant concentrations or wildlife populations), Industrial Quality Control (Monitoring production lines and reducing measurement errors) and Medical Statistics (Conducting studies where precise measurement is costly or invasive).

In statistical process control, the models used to account for measurement error include the additive model, multiplicative model, mixed model, four-component model, and two-component model.

In this paper, the performance of the T^2 -Hotelling's control chart for monitoring multivariate normal processes in the presence of measurement error is initially investigated using the classical additive model in Phase II. Subsequently, to mitigate the effect of measurement error in multivariate processes, novel sampling approaches based on Ranked Set Sampling (RSS) are proposed. The methods employed include standard RSS and Neoteric RSS (NRSS), which are extended to multivariate processes in this study, with ranking performed based on principal component scores.

Results

The performance of the proposed approaches is evaluated through simulation using the performance metrics of Average Run Length (ARL) and Standard Deviation of Run Length (SDRL). The results indicate that the presence of measurement error significantly deteriorates the performance of the control chart due to a substantial increase in both the average run length (ARL) and the standard deviation of the run length (SDRL). Overall, the results demonstrate that the performance of the control chart using the proposed method based on standard RSS and NRSS is superior, due to lower ARL and SDRL values under out-of-control conditions, compared to the T^2 control chart performance in the presence of measurement error using simple random sampling. Furthermore, the performance of the proposed standard RSS and NRSS method improves with increasing sample size n as well as increasing the correlation coefficient between variables. Considering that the process is multivariate and there is correlation among the variables, this study proposes the use of principal component scores for ranking the correlated variables when applying the proposed RSS-based methods. The results also show that ranking based on the first principal component generally leads to better outcomes, as evidenced by lower ARL and SDRL values, compared to ranking based on the second principal component. Therefore, it is recommended that, in the proposed approaches, ranking be performed according to the first principal component.

Conclusion

In this paper, to reduce the effect of measurement error in multivariate processes, the use of standard ranked set sampling and NRSS methods was proposed with ranking performed based on principal component scores. Simulation results showed that using the proposed RSS-based sampling approaches has a favorable impact on reducing the effect of measurement error. Moreover, the NRSS method yielded better results compared to the standard RSS method. Regarding variable ranking, performing the ranking based on the first principal component produces better outcomes. Using an auxiliary variable for ranking could be a subject for future research in this area.

۱. مقدمه

برای کنترل فرآیندهای تولیدی و خدماتی، گاهی به اندازه‌گیری پارامترهای موردنظر نیاز است. یکی از موارد مهم و حساس که بعضاً به آن توجهی نمی‌شود، وجود خطای اندازه‌گیری است. اهمیت این موضوع به این دلیل است که به عنوان مثال در بعضی از صنایع (مانند صنایع دارویی، نظامی) وجود این خطاها می‌تواند منجر به خسارات جانی و در سایر فعالیت‌ها خسارات مالی و زیان فراوان شود. لذا استفاده از روشی که بتواند اثر نامطلوب وجود خطای اندازه‌گیری را کاهش دهد، ضروری است. بروز خطای اندازه‌گیری می‌تواند ناشی از عوامل متعددی نظیر خطای اپراتور، کالیبره نبودن تجهیزات اندازه‌گیری و خطای گرد کردن و غیره باشد. به طور کلی در بحث خطای اندازه‌گیری فرض می‌شود مقدار واقعی متغیر قابل مشاهده و محاسبه نبوده و مقدار مشاهده شده، مقداری اشتباه است که از تأثیر خطای اندازه‌گیری بر مقدار واقعی حاصل شده است. در کنترل فرآیند آماری، مدل‌هایی که برای در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری استفاده شده‌اند، عبارتند از مدل جمع پذیر، مدل ضرب‌شونده، مدل آمیخته یا ترکیبی، مدل چهار عضوی و مدل دوعضوی. ملکی و همکاران [۱] مروری جامع بر حوزه خطای اندازه‌گیری در کنترل فرآیند آماری انجام داده‌اند. شی و همکاران [۲] تأثیر خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی یک‌طرفه کوتاه‌شده (TEWMA) را با استفاده از مدل جمع‌شونده خطی بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که اگرچه خطای اندازه‌گیری بر عملکرد این نمودار کنترل تأثیر دارد، اما عملکرد آن نسبت به سایر نمودارهای کنترل مشابه بهتر است. منیر و همکاران [۳] قدرت نمودارهای ترکیبی Shewhart-CUSUM، Shewhart-EWMA و Shewhart-Crosier's CUSUM را در حضور خطای اندازه‌گیری با استفاده از مدل جمع‌شونده ارزیابی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که خطای اندازه‌گیری قدرت این نمودارهای کنترلی را کاهش می‌دهد. همچنین، آن‌ها استفاده از روش چندبار اندازه‌گیری را به عنوان یک راهکار اصلاحی پیشنهاد کردند. نورالامین و همکاران [۴] گزارش کردند که نمودار کنترل حداکثر میانگین متحرک موزون نمایی با خطای اندازه‌گیری و استفاده از اطلاعات کمکی (Max-EWMAMEAI) نیز تحت تأثیر خطای اندازه‌گیری قرار دارد. آن‌ها با در نظر گرفتن مدل جمع‌شونده خطی، فرض کردند که واریانس خطا به صورت خطی افزایش می‌یابد و استفاده از رویکرد اندازه‌گیری‌های متعدد را برای کاهش اثرات خطای اندازه‌گیری پیشنهاد دادند. زیدی و همکاران [۵] عملکرد نمودار کنترل MEWMA-Compositional Data (MEWMA-CoDa) را در حضور خطای اندازه‌گیری با استفاده از مدل جمع‌شونده بررسی کردند. آن‌ها از چندبار اندازه‌گیری برای کاهش اثرات نامطلوب خطای اندازه‌گیری استفاده کردند. زیدی و همکاران [۶] اثرات خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل هتلینگ برای داده‌های ترکیبی را بررسی کردند و همچنین از یک مثال واقعی در تولید برای نشان دادن عملکرد این نمودار کنترل استفاده کردند. نگوین و همکاران [۷] تأثیرات خطای اندازه‌گیری را بر عملکرد نمودارهای کنترل Shewhart t و EWMA t ارزیابی کردند. آن‌ها از مثال‌هایی در صنایع شیمیایی و غذایی برای نمایش کاربرد این نمودارهای کنترل استفاده

کردند. لی و همکاران [۸] روش میانگین متحرک موزون کلی (GWMA) را برای توزیع نمایی دو پارامتری توسعه دادند و اثر خطای اندازه‌گیری را با استفاده از تعدیل حدود کنترل و مدل جمع‌شونده، در نظر گرفتند. آن‌ها نمودار کنترل پیشنهادی خود را در دو مثال شامل داده‌های سیلاب و ترانزیستورهای فلز-اکسید نیمه‌هادی با ولتاژ بالا به کار بردند. آن‌ها تمرکز صرف بر توزیع نمایی داشتند و فرایندهای چندمتغیره‌ی نرمال را بررسی نکردند. همچنین، از روش‌های نمونه‌گیری RSS نیز استفاده نکرده‌اند.

صباح‌نو و همکاران [۹] و [۱۰] بر پایش فرآیندهای چندمتغیره‌ی نرمال در حضور خطای اندازه‌گیری تمرکز کردند. آن‌ها همچنین از روش چندبار اندازه‌گیری برای کاهش اثرات خطای اندازه‌گیری بهره بردند. ولی برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری از هیچ نوع روش نمونه‌گیری کارا مانند RSS استفاده نکرده‌اند.

عمران و همکاران [۱۱] عملکرد نمودار کنترل T^2 هتلینگ با فواصل نمونه‌گیری متغیر را برای داده‌های ترکیبی در حضور خطای اندازه‌گیری ارزیابی کردند. آن‌ها نیز برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری از روش‌های ساده‌تری مانند نمونه‌گیری‌های کارای مبتنی بر RSS استفاده نکرده‌اند. تانگ و همکاران [۱۲] تأثیر خطای اندازه‌گیری بر نمودار کنترل EWMA تطبیقی را با استفاده از مدل جمع‌شونده و فرض واریانس خطای افزایشی خطی بررسی کردند. آن‌ها بر فرآیندهای تک‌متغیره تمرکز کرده‌اند و فرآیندهای نرمال چندمتغیره را در نظر نگرفته‌اند و همچنین برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری نیز روش‌های نمونه‌گیری RSS را به کار نبرده‌اند. تران و همکاران [۱۳] یک نمودار کنترل میانه‌ی ترکیبی پیشنهاد دادند و عملکرد آن را تحت خطای اندازه‌گیری با استفاده از مدل جمع‌شونده ارزیابی کردند. عارف و همکاران [۱۴] بر ارزیابی تأثیر خطای اندازه‌گیری بر نمودار کنترل برای پایش همزمان میانگین و واریانس فرآیند تمرکز کردند. آن‌ها از مدل جمع‌شونده و فرض واریانس خطای افزایشی خطی استفاده کردند و روش‌های نمونه‌گیری مجموعه‌های مرتب‌شده (RSS) و نمونه‌گیری مجموعه‌های مرتب‌شده‌ی جفتی (PRSS) را برای کاهش اثرات خطای اندازه‌گیری پیشنهاد کردند.

ملکی و همکاران [۱۵] تأثیر خطای اندازه‌گیری را بر عملکرد نمودار کنترل نمونه‌گیری سه‌گانه بررسی کردند و همچنین استفاده از رویکرد چندبار اندازه‌گیری را برای رفع مشکلات پیشنهاد دادند. هر سه تحقیق فوق‌الذکر، بر فرآیندهای تک‌متغیره تمرکز کرده‌اند و فرآیندهای نرمال چندمتغیره را در نظر نگرفته‌اند و همچنین برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری نیز روش‌های نمونه‌گیری RSS را به کار نبرده‌اند.

در این مقاله، هدف ما کاهش اثر نامطلوب خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل T^2 هتلینگ برای پایش فرآیندهای چندمتغیره‌ی نرمال است که توسط لینا و همکاران [۱۶] در فاز دوم بررسی شده است. لینا و همکاران [۱۶] رویکردی برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری در نمودارهای T^2 ارائه نکردند. ولی ما در این مقاله برای این منظور، پیشنهاد می‌کنیم که به جای نمونه‌گیری تصادفی ساده (SRS)، از روش‌های نمونه‌گیری مجموعه‌های مرتب‌شده (RSS) استفاده شود. از بین روش‌های نمونه‌گیری مجموعه‌های مرتب‌شده، ما از روش‌های RSS استاندارد و NRSS بهره خواهیم برد. محمدخانی و همکاران [۱۷] به‌طور جامع ادبیات مربوط به روش نمونه‌گیری

ابعاد $p \times 1$ شامل مقادیر واقعی p مشخصه‌ی کیفی همبسته در مشاهده‌ی j ام نمونه‌ی i ام دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین مشخص $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_p]'$ به ابعاد $p \times 1$ و ماتریس واریانس-کوواریانس معلوم زیر به ابعاد $p \times p$ است:

$$\Sigma_p = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & K & \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & K & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p \\ M & M & O & M \\ \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p & K & \sigma_p^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

به طوری که $\mathbf{x}_{ij} : MN(\mu, \Sigma_p)$ است. همچنین، ρ_{uv} ضریب همبستگی میان مشخصه‌های کیفی u و v ام است. σ_u نیز مقدار انحراف معیار مشخصه‌ی کیفی u ام را نشان می‌دهد.

آماره‌ی نمودار کنترل T^2 -هتلینگ متناظر برای نمونه‌ی i ام به صورت زیر است:

$$T_i^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_i - \mu)' \Sigma_p^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_i - \mu), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

به طوریکه n اندازه نمونه را نشان می‌دهد و $\bar{\mathbf{x}}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{ij}}{n}$ است. حد کنترل تقریبی نمودار کنترل T^2 -هتلینگ در فاز ۲ به صورت $UCL = \chi_{\alpha, (p)}^2$ است، به طوریکه $(1 - \alpha)$ درصد از توزیع مربع کای با p درجه‌ی آزادی از آن کمتر است. α نیز احتمال هشدار اشتباهی نمودار کنترل است.

برای بررسی عملکرد نمودار کنترل فوق، هنگامی که بردار میانگین مشخصه‌های کیفی از مقدار تحت کنترل μ به مقدار خارج از کنترل (تغییریافته) μ_1 تغییر کند، میزان تغییر با استفاده از پارامتر غیرمرکزی توزیع مربع کای به صورت زیر اعمال خواهد شد:

$$\lambda_{\bar{\mathbf{x}}} = n(\mu_1 - \mu)' \Sigma_p^{-1} (\mu_1 - \mu) \quad (3)$$

۲.۲. فرآیندهای نرمال چندمتغیره در حضور خطای اندازه‌گیری با مدل جمع‌پذیر و نمودار کنترل T^2 -هتلینگ متناظر

در این مقاله، از مدل جمع‌پذیر خطی که توسط لینا و همکاران [۱۶] برای فرآیندهای نرمال چندمتغیره با وجود خطای اندازه‌گیری معرفی شده است، استفاده می‌شود. مدل مذکور به صورت زیر است:

$$\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{x}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \quad (4)$$

به طوریکه، $\mathbf{y}_{ij}$ برداری به ابعاد $p \times 1$ شامل مقادیر اندازه‌گیری شده و $\mathbf{x}_{ij}$ بردار مقادیر واقعی مشخصه‌های کیفی مدنظر هستند. $\mathbf{A}$ یک بردار به ابعاد $p \times 1$ و $\mathbf{B}$ یک ماتریس معکوس‌پذیر به ابعاد $p \times p$ و شامل مقادیر ثابت هستند. $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ نیز به عنوان خطای اندازه‌گیری، یک بردار به ابعاد $p \times 1$ و مستقل از $\mathbf{x}_{ij}$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین $\mathbf{0}$ و ماتریس واریانس-کوواریانس Σ_m است. بدین

مجموعه‌های مرتب‌شده را بررسی کردند. براساس مرور اخیر آنها، هنوز هیچ پژوهشی به کاهش اثر خطای اندازه‌گیری در نمودارهای T^2 با روش‌های مبتنی بر RSS نپرداخته است. علاوه بر این، خان و همکاران [۱۸] و [۱۹] و وانگ و همکاران [۲۰] از روش نمونه‌گیری مجموعه‌های مرتب‌شده برای نمودار کنترل بیزی EWMA استفاده کردند. این سه مقاله پایه مهمی برای حوزه‌ی RSS در نمودارهای کنترل هستند. اما یک نقطه ضعف مشترک دارند که به طور همزمان فرآیندهای نرمال چندمتغیره را در حضور خطای اندازه‌گیری و با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری مبتنی بر RSS بررسی نکرده‌اند.

وودال و همکاران [۲۱] نیز درباره استفاده از نمونه‌گیری مجموعه‌های مرتب‌شده برای پایش میانگین فرآیند بحث کردند. این مقاله نشان می‌دهد که حتی متخصصان نیز معتقدند تحقیقات RSS باید با شرایط واقع‌بینانه‌تر (مثل خطای اندازه‌گیری) ترکیب شود.

در این مقاله پایش فرآیندهای نرمال چندمتغیره در حضور خطای اندازه‌گیری و با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری مبتنی بر RSS مورد تمرکز قرار می‌گیرد. لینا و همکاران [۱۶] نشان دادند که وجود خطای اندازه‌گیری عملکرد نمودار کنترل T^2 در فرآیندهای چندمتغیره را دچار ضعف می‌کند اما رویکردی برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری ارائه نکردند. براساس پژوهش ملکی و همکاران [۱]، در اکثر تحقیقات صورت گرفته در حوزه‌ی خطای اندازه‌گیری در کنترل فرآیند آماری برای کاهش اثر نامطلوب خطای اندازه‌گیری از رویکرد "چندبار اندازه‌گیری" استفاده می‌شود و در برخی تحقیقات هم برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری از رویکردهای نمونه‌گیری مبتنی بر RSS استفاده می‌شود. ولی در ادبیات موضوع برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری در فرآیندهای چندمتغیره تا به حال از روش‌های مبتنی بر RSS استفاده نشده است که این خلأ تحقیقاتی در این مقاله پوشش داده می‌شود. ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش ۲، فرآیندهای چندمتغیره‌ی نرمال با و بدون خطای اندازه‌گیری و نمودارهای کنترل متناظر آن‌ها بررسی می‌شود. بخش ۳ مراحل استفاده از روش‌های پیشنهادی، یعنی روش‌های RSS استاندارد و NRSS، برای فرآیندهای چندمتغیره را توضیح می‌دهد. در بخش ۴، نحوه انجام شبیه‌سازی‌ها برای ارزیابی عملکرد و همچنین نتایج مطالعات شبیه‌سازی ارائه شده است. در نهایت، بخش ۵ به نتیجه‌گیری اختصاص دارد. (این مقاله مستخرج از مرجع [۲۲] است).

۲. فرآیندهای نرمال چندمتغیره

در این بخش به تشریح فرآیندهای نرمال چندمتغیره بدون حضور خطای اندازه‌گیری و با وجود خطای اندازه‌گیری پرداخته می‌شود.

۱.۲. فرآیندهای نرمال چندمتغیره بدون خطای اندازه‌گیری و نمودار کنترل T^2 -هتلینگ متناظر

با در نظر گرفتن p مشخصه‌ی کیفی همبسته، اگر x_{ijk} مقدار واقعی بدون خطای اندازه‌گیری متغیر k ام در مشاهده‌ی j ام نمونه‌ی i ام در فاز ۲ را نشان دهد (برای $k=1, 2, \dots, p$ ، $j=1, 2, \dots, n$ ، $i=1, 2, \dots, L$)، بنابراین $\mathbf{x}_{ij} = [x_{ij1} \ x_{ij2} \ \dots \ x_{ijp}]'$ برداری به

صورت، بردار y_{ij} نیز از توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین $A + B\mu$ و ماتریس واریانس-کوواریانس $B\Sigma_p B' + \Sigma_m$ پیروی می-کند.

بنابراین، آماره‌ی نمودار کنترل T^2 -هتلینگ متناظر برای نمونه‌ی i ام به صورت زیر است:

$$T_i^2 = n(\bar{y}_i - (A + B\mu))'(B\Sigma_p B' + \Sigma_m)^{-1}(\bar{y}_i - (A + B\mu)), \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

به طوری که $\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n}$ است. حد کنترل تقریبی آماره‌ی فوق در فاز ۲ به صورت $UCL = \chi_{\alpha, (p)}^2$ است، به طوریکه $(1-\alpha)$ درصد از توزیع مربع کای با p درجه‌ی آزادی، از آن کمتر است.

برای بررسی عملکرد نمودار کنترل فوق، هنگامی که بردار میانگین مشخصه‌های کیفی از مقدار تحت کنترل μ به مقدار خارج از کنترل μ_1 (تغییر یافته) تغییر کند، میزان تغییر با استفاده از پارامتر غیرمرکزی توزیع مربع کای به صورت زیر اعمال خواهد شد:

$$\lambda_q = n(\mu_1 - \mu)'B'(B\Sigma_p B' + \Sigma_m)^{-1}B(\mu_1 - \mu) \quad (6)$$

زمانی که $A = 0$ و B یک ماتریس همانی به ابعاد $p \times p$ باشد، مدل موجود در رابطه‌ی (۴) به صورت رابطه‌ی (۷) تغییر خواهد کرد که در این تحقیق مورد تمرکز قرار خواهد گرفت:

$$y_{ij} = x_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad (7)$$

۳. رویکردهای پیشنهادی برای کاهش اثر خطای اندازه-

گیری در فرآیندهای نرمال چندمتغیره

از آنجایی که وجود خطای اندازه‌گیری اثر نامطلوبی بر عملکرد نمودار کنترل دارد، بنابراین در این تحقیق برای کاهش اثر نامطلوب وجود خطای اندازه‌گیری، استفاده از روش‌های نمونه‌گیری نوین RSS استاندارد و NRSS پیشنهاد می‌شود.

لازم به ذکر است که برای فرآیندهای چندمتغیره، از آنجایی که در روش‌های نمونه‌گیری مذکور باید مشاهدات هرنمونه به صورت صعودی مرتب شوند، بنابراین در این تحقیق پیشنهاد می‌شود که ابتدا p مولفه‌ی اصلی مرتبط با p مشخصه‌ی کیفی همبسته محاسبه شوند و سپس براساس مقادیر امتیازات مولفه‌های اصلی مرتب‌سازی صورت پذیرد و سپس بردار مشاهدات متناظر به همان ترتیب مرتب شوند. لذا، در ادامه ابتدا به تشریح مولفه‌های اصلی و سپس چگونگی استفاده از روش‌های RSS استاندارد و NRSS در فرآیندهای چندمتغیره پرداخته می‌شود.

۱.۳. تحلیل مولفه‌های اصلی (PCA)

به طور کلی مولفه‌های اصلی متغیرهای جدیدی هستند که از ترکیب-های خطی متعامد متغیرهای موردنظر حاصل می‌شوند. اگر p مشخصه-

ی کیفی (متغیر مورد نظر) همبسته وجود داشته باشد، می‌توان p مولفه‌ی اصلی ناهمبسته با استفاده از ترکیب خطی آنها ایجاد کرد به گونه‌ای که مولفه‌ی اصلی اول بیشترین واریانس داده‌ها، مولفه‌ی اصلی دوم دومین بیشترین واریانس داده‌ها و به همین ترتیب مولفه‌ی اصلی p ام (آخرین مولفه‌ی اصلی) کمترین واریانس داده‌ها را پوشش می-دهند. یکی از روش‌های پرکاربرد برای محاسبه‌ی مولفه‌های اصلی روش بردارهای ویژه^۶ با استفاده از مقادیر ویژه^۷ برپایه‌ی تجزیه‌ی مقادیر منفرد ماتریس است.

اگر در نمونه‌ی i ام تعداد n مشاهده‌ی p -متغیره با خطای اندازه‌گیری حاصل شده باشد و y_{ijk} مقدار اندازه‌گیری شده‌ی متغیر k ام در مشاهده‌ی j ام نمونه‌ی i ام را نشان دهد (برای $k=1,2,\dots,p$ ، $j=1,2,L,n$ و $i=1,2,L$)، بردار y_{ij} به ابعاد $p \times 1$ شامل مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی p مشخصه‌ی کیفی همبسته به صورت $y_{ij} = [y_{ij1} \ y_{ij2} \ \dots \ y_{ijp}]'$ به ازای $j=1,2,L,n$ است که از رابطه‌ی (۷) تبعیت می‌کنند.

$$Y_i = \begin{bmatrix} y'_{i1} \\ y'_{i2} \\ M \\ y'_{in} \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس مشاهدات به صورت یک ماتریس به ابعاد}$$

$n \times p$ است که به صورت زیر نیز قابل نمایش است:

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_{i11} & y_{i12} & L & y_{i1p} \\ y_{i21} & y_{i22} & L & y_{i2p} \\ M & M & O & M \\ y_{in1} & y_{in2} & L & y_{inp} \end{bmatrix} \quad (8)$$

مقادیر امتیازات مولفه‌های اصلی ناهمبسته‌ی حاصل از p مشخصه‌ی کیفی با خطای اندازه‌گیری برای نمونه‌ی i ام مرتبط با ماتریس Y_i با استفاده از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} (PC_1)_{ij} &= W_{i11}y_{ij1} + W_{i12}y_{ij2} + L + W_{i1p}y_{ijp} \\ (PC_2)_{ij} &= W_{i21}y_{ij1} + W_{i22}y_{ij2} + L + W_{i2p}y_{ijp} \\ &\quad M \\ (PC_p)_{ij} &= W_{ip1}y_{ij1} + W_{ip2}y_{ij2} + L + W_{ipp}y_{ijp} \end{aligned} \quad (9)$$

به طوری که ماتریس ضرایب مولفه‌های اصلی (W) براساس رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$W = \begin{bmatrix} W_{i11} & W_{i12} & L & W_{i1p} \\ W_{i21} & W_{i22} & L & W_{i2p} \\ M & M & O & M \\ W_{ip1} & W_{ip2} & L & W_{ppi} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

^۷ Eigen values

^۶ Eigen vectors

$$Y_i = \begin{bmatrix} 14.1007 & 8.5789 \\ 11.2023 & 6.7194 \\ 4.9491 & -0.2059 \end{bmatrix}$$

۲.۳. روش پیشنهادی نمونه‌گیری RSS استاندارد برای

فرآیند نرمال چندمتغیره در حضور خطای اندازه‌گیری

در این بخش، روش RSS استاندارد برای فرآیند چندمتغیره توسعه داده می‌شود. بدین ترتیب، گام‌های انجام این روش برای فرآیندهای چندمتغیره به صورت زیر است:

گام اول: انتخاب یک نمونه n تایی از مشاهدات p -متغیره حاوی

خطای اندازه‌گیری و تشکیل ماتریس Y_i

گام دوم: محاسبه مولفه‌های اصلی ماتریس Y_i حاصل از گام اول و

محاسبه امتیازات مولفه‌های اصلی براساس رابطه (۹)

گام سوم: مرتب‌سازی امتیازات مولفه‌های اصلی اول (ستون اول ماتریس

امتیازات در رابطه (۱۱)) به ترتیب صعودی (از کم به زیاد) و سپس

مرتب‌سازی مشاهدات متناظر در ماتریس Y_i

لازم به ذکر است که در این تحقیق، یک‌بار مرتب‌سازی برحسب امتیازات مولفه اصلی اول، بار دیگر مرتب‌سازی براساس امتیازات مولفه اصلی دوم (ستون دوم ماتریس امتیازات) و به همین ترتیب یک‌بار مرتب‌سازی برپایه امتیازات مولفه اصلی p ام (ستون p ام ماتریس امتیازات) صورت گرفته است ولی نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان دادند که مرتب‌سازی برحسب مولفه اصلی اول نتایج بهتری در پی خواهد داشت.

در این گام به ازای $j=1,2,L,n$ ، امتیازات مولفه اصلی اول به صورت $(PC_1)_{i1}, (PC_1)_{i2}, K, (PC_1)_{in}$ است که پس از مرتب‌سازی به صورت $(PC_1)_{i(1)} < (PC_1)_{i(2)} < K < (PC_1)_{i(n)}$ قابل نمایش است. پس از آن مشاهدات متناظر با امتیازات مولفه‌های اصلی سورت شده، در ماتریس Y_i به همان ترتیب مرتب می‌شوند. به عنوان مثال، اگر امتیازات مولفه‌های اصلی برای $n=3$ مشاهده به صورت $(PC_1)_{i(2)} < (PC_1)_{i(1)} < (PC_1)_{i(3)}$ باشد، برای مرتب‌سازی ماتریس Y_i نیز ابتدا سطر دوم ماتریس، سپس سطر اول ماتریس و در نهایت سطر سوم ماتریس قرار خواهد گرفت. یعنی ماتریس Y_i مرتب شده به

$$\begin{bmatrix} y_{i21} & y_{i22} & L & y_{i2p} \\ y_{i11} & y_{i12} & O & y_{i1p} \\ y_{i31} & y_{i32} & L & y_{i3p} \end{bmatrix} \text{ صورت خواهد بود.}$$

گام چهارم: تکرار گام‌های ۱ تا ۳ به تعداد n بار ($j=1,2,K,n$)، برای حصول n نمونه n تایی

گام پنجم: انتخاب نمونه بدین صورت که از اولین باری که گام‌های ۱ تا ۳ اجرا می‌شوند، سطر اول ماتریس Y_i مرتب شده، از دومین تکرار گام‌های ۱ تا ۳ سطر دوم ماتریس Y_i مرتب شده و به همین ترتیب از n امین تکرار گام‌های ۱ تا ۳ سطر n ام ماتریس Y_i مرتب شده، انتخاب می‌شوند. بنابراین، در این مرحله n سطر p -متغیره انتخاب شده است

هر سطر ماتریس W مقادیر یکی از بردارهای ویژه‌ی ماتریس Y_i را دربردارد که نشان‌دهنده‌ی ضرایب هر یک از مولفه‌های اصلی است. به گونه‌ای که سطر اول ماتریس W مقادیر اولین بردار ویژه‌ی ماتریس Y_i حاصل از بزرگترین مقدار ویژه، سطر دوم آن مقادیر دومین بردار ویژه‌ی ماتریس Y_i حاصل از دومین بزرگترین مقدار ویژه و به همین ترتیب سطر p ام آن مقادیر p امین بردار ویژه‌ی ماتریس Y_i حاصل از کوچکترین مقدار ویژه هستند.

ماتریس مقادیر امتیازات مولفه‌های اصلی نیز به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$PC_{scores} = \begin{bmatrix} (PC_1)_{i1} & (PC_2)_{i1} & L & (PC_p)_{i1} \\ (PC_1)_{i2} & (PC_2)_{i2} & L & (PC_p)_{i2} \\ M & M & O & M \\ (PC_1)_{in} & (PC_2)_{in} & L & (PC_p)_{in} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

ستون اول ماتریس فوق، مقادیر امتیازات مولفه اصلی اول به ازای n مشاهده (هر یک از سطرها‌ی ماتریس Y_i) است. ستون دوم آن مقادیر امتیازات مولفه اصلی دوم به ازای n مشاهده و به همین ترتیب ستون p ام آن مقادیر امتیازات مولفه اصلی p ام به ازای n مشاهده است.

به عنوان مثال، برای $p=2$ و $n=3$ یک نمونه‌ی چندمتغیره به صورت زیر داریم:

$$Y_i = \begin{bmatrix} 11.2023 & 6.7194 \\ 14.1007 & 8.5789 \\ 4.9491 & -0.2059 \end{bmatrix}$$

با محاسبه مولفه‌های اصلی ماتریس فوق، دو مولفه اصلی حاصل به صورت زیر هستند:

$$PC_1 = 0.7107x_1 + 0.7034x_2$$

$$PC_2 = -0.7034x_1 + 0.7107x_2$$

برای محاسبه مقادیر امتیازات مولفه اصلی اول، با جایگذاری مقادیر سطر اول ماتریس Y_i به جای x_1 و x_2 در رابطه PC_1 ، اولین مقدار و با جایگذاری سطر دوم ماتریس Y_i به جای x_1 و x_2 در رابطه PC_1 ، دومین مقدار و با جایگذاری سطر سوم ماتریس Y_i به جای x_1 و x_2 در رابطه PC_1 ، سومین امتیاز به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$PC_1 = 0.7107 \times 11.2023 + 0.7034 \times 6.7194 = 12.6879$$

$$PC_1 = 0.7107 \times 14.1007 + 0.7034 \times 8.5789 = 16.0558$$

$$PC_1 = 0.7107 \times 4.9491 + 0.7034 \times (-0.2059) = 3.3725$$

با توجه به اعداد فوق و مقادیر امتیازات مولفه اصلی اول، سطر دوم ماتریس Y_i بیشترین امتیاز را دارد، پس ابتدا سطر دوم ماتریس Y_i و سپس سطر اول و سپس سطر سوم ماتریس Y_i به صورت زیر مرتب می‌شوند:

که با قرار دادن آنها به ترتیب در یک ماتریس و محاسبه‌ی میانگین هر

ستون ماتریس $\bar{y}_{i(RSS)} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n}$ حاصل خواهد شد. سپس می‌توان با استفاده از رابطه‌ی زیر آماره‌ی نمودار کنترل T^2 -هتلینگ را محاسبه نمود:

$$T_i^2 = (\bar{y}_{i(RSS)} - \mu_{\bar{y}_{i(RSS)}})' \Sigma_{\bar{y}_{i(RSS)}}^{-1} (\bar{y}_{i(RSS)} - \mu_{\bar{y}_{i(RSS)}}) \quad (11)$$

لازم به ذکر است که در این تحقیق، برای محاسبه‌ی بردار میانگین و ماتریس واریانس-کوواریانس $\bar{y}_{i(RSS)}$ (یعنی $\mu_{\bar{y}_{i(RSS)}}$ و $\Sigma_{\bar{y}_{i(RSS)}}$) که در این روش محاسبه شده است، از شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده می‌شود. همچنین حد کنترل بالای نمودار کنترل T^2 -هتلینگ نیز با شبیه‌سازی تا حصول متوسط طول دنباله‌ی مطلوب در حالت تحت کنترل محاسبه می‌شود.

۳.۳. روش پیشنهادی نمونه‌گیری NRSS برای فرآیند چندمتغیره نرمال در حضور خطای اندازه‌گیری

در این بخش، روش NRSS برای فرآیند چندمتغیره توسعه داده می‌شود. بدین ترتیب، گام‌های انجام این روش برای فرآیندهای چندمتغیره به صورت زیر است:

گام اول: انتخاب یک نمونه‌ی n^2 تایی از مشاهدات p -متغیره حاوی خطای اندازه‌گیری و تشکیل ماتریس Y_i

گام دوم: محاسبه‌ی مولفه‌های اصلی ماتریس Y_i حاصل از گام اول و محاسبه‌ی امتیازات مولفه‌های اصلی براساس رابطه‌ی (۹)

گام سوم: مرتب‌سازی امتیازات مولفه‌های اصلی اول (ستون اول ماتریس امتیازات در رابطه‌ی (۱۱)) به ترتیب صعودی (از کم به زیاد) و سپس مرتب‌سازی مشاهدات متناظر در ماتریس Y_i

در این گام به ازای $n, j=1, 2, L$ ، امتیازات مولفه‌ی اصلی اول به صورت $(PC_1)_{i1}, (PC_1)_{i2}, K, (PC_1)_{in}$ است که پس از مرتب‌سازی به صورت $(PC_1)_{i(1)} < (PC_1)_{i(2)} < K < (PC_1)_{i(n)}$ قابل نمایش است. پس از آن مشاهدات متناظر با امتیازات مولفه‌های اصلی سورت

شده، در ماتریس Y_i به همان ترتیب مرتب می‌شوند. به عنوان مثال، اگر امتیازات مولفه‌های اصلی برای $n=3$ مشاهده به صورت $(PC_1)_{i(1)} < (PC_1)_{i(2)} < (PC_1)_{i(3)}$ باشد، برای مرتب‌سازی ماتریس Y_i نیز ابتدا سطر دوم ماتریس، سپس سطر اول ماتریس و در نهایت سطر سوم ماتریس قرار خواهد گرفت. یعنی ماتریس Y_i مرتب شده به

$$\text{صورت} \begin{bmatrix} y_{i21} & y_{i22} & L & y_{i2p} \\ y_{i11} & y_{i12} & O & y_{i1p} \\ y_{i31} & y_{i32} & L & y_{i3p} \end{bmatrix} \text{ خواهد بود.}$$

گام چهارم: انتخاب نمونه بدین صورت که اگر n فرد باشد، به‌ازای $(j=1, 2, K, n)$ سطر $\frac{(n+1)}{2} + (j-1)n$ ام ماتریس Y_i مرتب شده، انتخاب می‌شود.

به عنوان مثال، برای $(j=1)$ سطر $\frac{(n+1)}{2} + (1-1)n = \frac{(n+1)}{2}$ ام ماتریس Y_i مرتب شده، همچنین برای $(j=2)$ سطر $\frac{(n+1)}{2} + (2-1)n = \frac{(n+1)}{2} + n$ ام ماتریس Y_i مرتب شده و به همین ترتیب برای $(j=n)$ سطر $\frac{(n+1)}{2} + (n-1)n$ ام ماتریس Y_i مرتب شده انتخاب خواهند شد.

اما اگر n زوج باشد، به‌ازای $(j=1, 2, K, n)$ سطر $l + (j-1)n$ ام ماتریس Y_i مرتب شده، انتخاب می‌شود. همچنین، مقدار l به ازای j های زوج برابر است با $l = \frac{n}{2}$ و به ازای j های فرد برابر است با

$$l = \frac{n+2}{2}$$

به عنوان مثال، برای $(j=1)$ فرد است، سطر $l + (j-1)n = \frac{n+2}{2} + (1-1)n = \frac{n+2}{2}$ ام ماتریس Y_i مرتب شده، همچنین برای $(j=2)$ زوج است، سطر $l + (j-1)n = \frac{n}{2} + (2-1)n = \frac{n}{2} + n$ و به همین ترتیب برای $(j=n)$ زوج است، سطر $l + (j-1)n = \frac{n}{2} + (n-1)n$ ام ماتریس Y_i مرتب شده انتخاب خواهند شد.

بنابراین، در این مرحله n سطر p -متغیره انتخاب شده است که با قرار دادن آنها به ترتیب در یک ماتریس و محاسبه‌ی میانگین هر ستون

ماتریس $\bar{y}_{i(RSS)} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n}$ حاصل خواهد شد. سپس می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۱۲) آماره‌ی نمودار کنترل T^2 -هتلینگ را محاسبه نمود.

۴. ارزیابی عملکرد نمودار کنترل T^2 -هتلینگ برای پایش فرآیندهای نرمال چندمتغیره

برای ارزیابی عملکرد در فاز ۲، یک فرآیند نرمال دو متغیره ($p=2$) در نظر گرفته می‌شود. همچنین برای تحلیل حساسیت، مقادیر مختلف n مدنظر قرار می‌گیرد که عبارتند از $n=3, n=4$ و $n=5$. تحلیل حساسیت برای مقادیر مختلف ضریب همبستگی میان متغیرها نیز انجام می‌پذیرد و مقادیر مورد بررسی عبارتند از $\rho_{12}=0.1$ ، $\rho_{12}=0.5$ و $\rho_{12}=0.9$. برای فرآیند دومتغیره، بردار میانگین

مشخص $\mu = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ و ماتریس واریانس-کوواریانس میان متغیرها (

Σ_p) و ماتریس واریانس-کوواریانس عناصر خطای اندازه‌گیری (Σ_m) (به صورت زیر مدنظر قرار می‌گیرد:

$$\Sigma_p = \begin{bmatrix} 5 & \rho_{12} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{4} \\ \rho_{12} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{4} & 4 \end{bmatrix}, \Sigma_m = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

همچنین، ماتریس A دارای ابعاد $p \times p$ است که همه عناصر آن صفر فرض می‌شود. ماتریس $B = I_p$ نیز یک ماتریس همانی به ابعاد $p \times p$ است.

۱.۴. مقایسه عملکرد نمودار کنترل T^2 -هتلینگ در پایش فرآیندهای نرمال چندمتغیره بدون خطای اندازه‌گیری و در حضور خطای اندازه‌گیری با مدل جمع‌پذیر

هنگامی که خطای اندازه‌گیری وجود ندارد، آماره‌ی نمودار کنترل T^2 -هتلینگ متناظر برای نمونه‌ی i ام با استفاده از رابطه‌ی (۲) محاسبه می‌شود. برای بررسی عملکرد نمودار کنترل، مقادیر تغییرات با استفاده از رابطه‌ی (۳) اعمال می‌شوند و با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و ۵۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی، عملکرد نمودار کنترل مورد نظر، سنجش

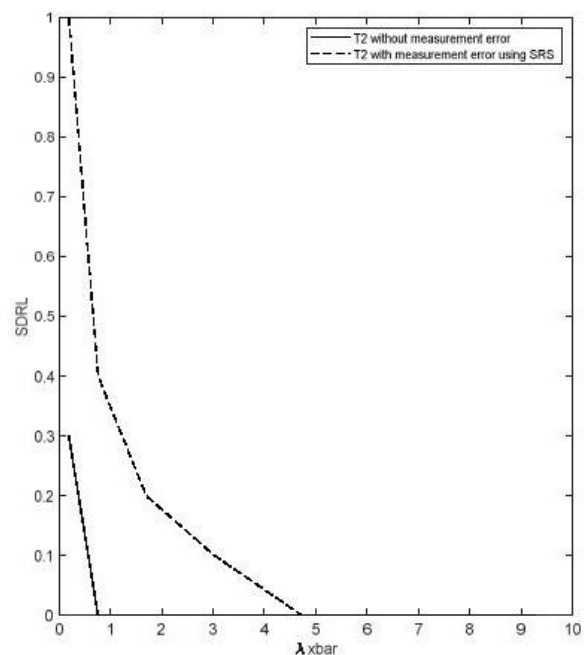
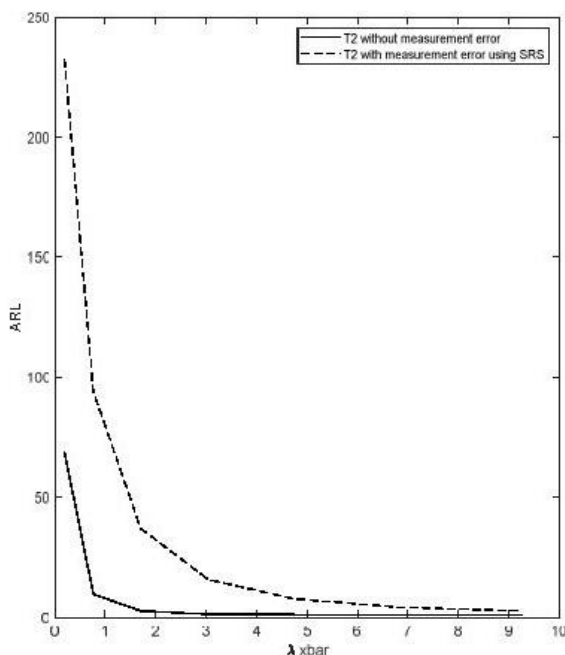
می‌شود. مقدار حد کنترل تقریبی نمودار کنترل T^2 -هتلینگ در فاز ۲ با درنظر گرفتن $\alpha = 0.0027$ برای فرآیند دومتغیره به صورت $UCL = \chi^2_{0.0027, (2)} = 11.829$ و برای فرآیند سه متغیره برابر با $UCL = \chi^2_{0.0027, (3)} = 14.1563$ است.

در حضور خطای اندازه‌گیری و با استفاده از نمونه‌گیری ساده (SRS) نیز، آماره‌ی نمودار کنترل T^2 -هتلینگ متناظر برای نمونه‌ی i ام با استفاده از رابطه‌ی (۵) و مقادیر تغییرات با استفاده از رابطه‌ی (۶) محاسبه می‌شوند و با ۵۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی عملکرد نمودار ارزیابی می‌شود.

شکل ۱ عملکرد نمودار کنترل T^2 بدون حضور خطای اندازه‌گیری و در حضور خطای اندازه‌گیری با استفاده از نمونه‌گیری ساده (SRS) را نشان می‌دهند.

لازم به ذکر است که شبیه‌سازی‌های بسیار زیادی برای مقایسه عملکرد نمودار T^2 بدون حضور خطای اندازه‌گیری و در حضور خطای اندازه‌گیری به ازای مقادیر مختلف n و ρ_{12} و همچنین میزان مختلف تغییرات انجام گرفته است ولی از میان آنها به ذکر نتایج در شکل ۱

پسندیده شده است.



شکل ۱. مقایسه‌ی مقادیر ARL و SDRL نمودار کنترل T^2 بدون حضور خطای اندازه‌گیری و در حضور خطای اندازه‌گیری براساس نمونه‌گیری ساده به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 3$ و $\rho_{12} = 0.9$

Figure ۱. Comparison of ARL and SDRL of T^2 control chart without measurement error and with the presence of measurement error based on simple random sampling (SRS), $n = 3$, $\rho_{12} = 0.9$

همچنین در حضور خطای اندازه‌گیری و با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری پیشنهادی RSS استاندارد و NRSS آماره نمودار کنترل T^2 -هتلینگ به ترتیب با استفاده از رابطه (۱۲) محاسبه می‌شوند. برای ارزیابی عملکرد نمودار کنترل T^2 مبتنی بر RSS، ابتدا بردار

نتایج شکل ۱ نشان می‌دهد که حضور خطای اندازه‌گیری عملکرد نمودار کنترل را به دلیل افزایش چشم‌گیر مقادیر متوسط طول دنباله و انحراف معیار طول دنباله، خیلی ضعیف می‌کند.

میانگین $(\mu_{\bar{y}_{(RSS)}})$ و ماتریس واریانس-کوواریانس $(\Sigma_{\bar{y}_{(RSS)}})$ با

استفاده از ۵۰۰۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه می‌شود.

سپس مقدار حد کنترل بالای نمودار T^2 مبتنی بر RSS، با استفاده از

۵۰۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی برای رسیدن به ARL مطلوب تحت کنترل

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0027} \approx 370$$

به دست می‌آید. (لازم به ذکر است

که در این مقاله برای محاسبه‌ی بردار میانگین و ماتریس واریانس-

کوواریانس روش‌های پیشنهادی مبتنی بر RSS از ۵۰۰۰۰۰ تکرار

شبیه‌سازی، برای محاسبه‌ی حد کنترل بالای نمودار T^2 در روش‌های

پیشنهادی مبتنی بر RSS از ۵۰۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی و برای ارزیابی

عملکرد نمودار T^2 در فاز ۲ و محاسبه‌ی معیارهای ARL و SDRL

هم در روش‌های پیشنهادی و هم در نمودار کنترل T^2 بدون حضور

خطا و با حضور خطا از ۵۰۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی استفاده می‌شود.)

به عنوان مثال، در رویکرد RSS استاندارد، به ازای مقادیر $n=3$ و

$\rho_{12}=0.1$ حد کنترل بالای نمودار، مقدار ۴.۸ و برای مقادیر $n=3$

و $\rho_{12}=0.9$ حد کنترل بالای ۴.۴۵۵۳ حاصل شده است. همچنین،

به ازای مقادیر $n=4$ و $\rho_{12}=0.1$ حد کنترل بالای ۳.۹۲۶۸ و برای

مقادیر $n=4$ و $\rho_{12}=0.9$ حد کنترل بالای ۳.۴۲۳۸ به دست آمده

است. در نهایت، مقادیر $n=5$ و $\rho_{12}=0.1$ حد کنترل بالای

۳.۳۴۳۲، مقادیر $n=5$ و $\rho_{12}=0.5$ حد کنترل بالای ۳.۰۴۲،

مقادیر $n=5$ و $\rho_{12}=0.9$ حد کنترل بالای ۲.۷۱۰۵ را داده‌اند.

برای ارزیابی عملکرد نمودار کنترل تغییرات متفاوت در میانگین فرآیند

اعمال می‌شود و با استفاده از ۵۰۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی مقادیر

معیارهای ARL و SDRL محاسبه می‌شوند. در جداول ۱ تا ۸ عملکرد

نمودار کنترل T^2 در حضور خطای اندازه‌گیری با استفاده از رویکردهای

پیشنهادی مبتنی بر RSS با عملکرد آن در حضور خطای اندازه‌گیری و

با استفاده از نمونه‌گیری ساده (SRS) مقایسه می‌شود و نتایج شبیه-

سازی‌ها به ازای مقادیر مختلف تغییرات در بردار میانگین مشاهدات

نشان داده می‌شود. جداول ۱ تا ۴ مقایسه‌ی نتایج روش RSS استاندارد

را با روش SRS نشان می‌دهند و همچنین جداول ۵ تا ۸ مقایسه‌ی

نتایج روش NRSS را با روش SRS نشان می‌دهند. در این جداول δ

میزان تغییر در عناصر بردار میانگین را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مقادیر ARL و SDRL در روش RSS استاندارد به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 3$ و $\rho_{12} = 0.1$ و مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی اول
 Table ۱. ARL and SDRL values of standard RSS method under shifts in the mean vector of the process, $n = 3$, $\rho_{12} = 0.1$ and sorting based on the first principal component

Shifts	δ	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲	۲.۲۵	۲.۵
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ +\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۴	۲۱۶.۲	۷۷.۹	۲۸.۴	۱۱.۷	۵.۶	۳.۱	۲.۰	۱.۵	۱.۲	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۰	۰.۳	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۴	۱۸۷.۸	۵۵.۳	۱۷.۱	۶.۴	۳.۰	۱.۸	۱.۳	۱.۱	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} -\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۴	۲۱۵.۶	۷۷.۶	۲۸.۵	۱۱.۷	۵.۶	۳.۱	۲.۰	۱.۵	۱.۲	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۰	۰.۳	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۴	۱۸۹.۲	۵۵.۷	۱۶.۹	۶.۴	۳.۰	۱.۸	۱.۳	۱.۱	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۴۲	۱.۶۷	۳.۷۵	۶.۶۷	۱۰.۴۲	۱۵.۰۰	۲۰.۴۲	۲۶.۶۷	۳۳.۷۵	۴۱.۶۷
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۵	۰.۹۹	۲.۲۳	۳.۹۶	۶.۱۸	۸.۹۱	۱۲.۱۲	۱۵.۸۳	۲۰.۰۴	۲۴.۷۴
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۴	۲۰۲.۵	۶۸.۱	۲۳.۹	۹.۶	۴.۶	۲.۶	۱.۷	۱.۳	۱.۱	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۰.۹	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۴	۱۷۱.۷	۵۱.۶	۱۷.۶	۷.۳	۳.۷	۲.۲	۱.۶	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۱۹	۰.۷۶	۱.۷۰	۳.۰۳	۴.۷۳	۶.۸۲	۹.۲۸	۱۲.۱۲	۱۵.۳۴	۱۸.۹۴
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۱۳	۰.۵۰	۱.۱۳	۲.۰۱	۳.۱۴	۴.۵۲	۶.۱۵	۸.۰۳	۱۰.۱۶	۱۲.۵۵
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۴	۲۶۶.۹	۱۲۸.۶	۵۸.۴	۲۷.۶	۱۴.۰	۷.۷	۴.۶	۳.۱	۲.۲	۱.۷
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۲	۰.۶	۰.۳	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۴	۲۲۷.۳	۹۰.۰	۳۶.۱	۱۶.۰	۷.۹	۴.۴	۲.۸	۱.۹	۱.۵	۱.۳
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۱.۰	۰.۴	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

جدول ۲. مقادیر ARL و SDRL در روش RSS استاندارد به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 3$ و $\rho_{12} = 0.9$ و مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی اول
 Table ۲. ARL and SDRL values of standard RSS method under shifts in the mean vector of the process, $n = 3$, $\rho_{12} = 0.9$ and sorting based on the first principal component

Shifts	δ	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲	۲.۲۵	۲.۵
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ +\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۱	۲۵۱.۹	۱۱۱.۹	۴۶.۹	۲۱.۲	۱۰.۵	۵.۸	۳.۵	۲.۳	۱.۷	۱.۴
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۱.۱	۰.۵	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۲	۱۶۰.۴	۴۵.۸	۱۵.۵	۶.۳	۳.۲	۲.۰	۱.۴	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۷	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} -\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۱	۲۵۰.۰	۱۱۱.۶	۴۷.۱	۲۱.۳	۱۰.۵	۵.۷	۳.۵	۲.۴	۱.۷	۱.۴
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۱.۱	۰.۵	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۲	۱۶۰.۴	۴۵.۷	۱۵.۴	۶.۴	۳.۲	۲.۰	۱.۴	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۷	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۴۲	۱.۶۷	۳.۷۵	۶.۶۷	۱۰.۴۲	۱۵.۰۰	۲۰.۴۲	۲۶.۶۷	۳۳.۷۵	۴۱.۶۷
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۵	۰.۹۹	۲.۲۳	۳.۹۶	۶.۱۸	۸.۹۱	۱۲.۱۲	۱۵.۸۳	۲۰.۰۴	۲۴.۷۴
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۱	۱۲۵.۱	۲۶.۲	۷.۲	۲.۹	۱.۶	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۰.۶	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۲	۲۰۷.۱	۵۶.۹	۱۴.۹	۴.۹	۲.۳	۱.۴	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۹	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۱۹	۰.۷۶	۱.۷۰	۳.۰۳	۴.۷۳	۶.۸۲	۹.۲۸	۱۲.۱۲	۱۵.۳۴	۱۸.۹۴
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۱۳	۰.۵۰	۱.۱۳	۲.۰۱	۳.۱۴	۴.۵۲	۶.۱۵	۸.۰۳	۱۰.۱۶	۱۲.۵۵
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۱	۲۳۲.۵	۹۴.۱	۳۷.۰	۱۵.۸	۷.۷	۴.۲	۲.۶	۱.۸	۱.۴	۱.۲
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۱.۰	۰.۴	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۲	۲۲۷.۲	۸۶.۸	۳۲.۹	۱۳.۷	۶.۶	۳.۶	۲.۳	۱.۶	۱.۳	۱.۱
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۱.۰	۰.۴	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

جدول ۳. مقادیر ARL و SDRL در روش RSS استاندارد به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 4$ و $\rho_{12} = 0.1$ و مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی اول
 Table ۳. ARL and SDRL values of standard RSS method under shifts in the mean vector of the process, $n = 4$, $\rho_{12} = 0.1$ and
 sorting based on the first principal component

Shifts	δ	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲	۲.۲۵	۲.۵
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ +\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۸	۱۸۶.۷	۵۵.۹	۱۸.۴	۷.۳	۳.۵	۲.۱	۱.۵	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۲	۱۵۹.۷	۳۷.۵	۱۰.۲	۳.۸	۱.۹	۱.۳	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۷	۰.۲	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} -\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۸	۱۸۷.۵	۵۶.۵	۱۸.۵	۷.۳	۳.۵	۲.۱	۱.۵	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۰.۸	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۲	۱۵۹.۸	۳۷.۷	۱۰.۲	۳.۷	۱.۹	۱.۳	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۷	۰.۲	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۴۲	۱.۶۷	۳.۷۵	۶.۶۷	۱۰.۴۲	۱۵.۰۰	۲۰.۴۲	۲۶.۶۷	۳۳.۷۵	۴۱.۶۷
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۵	۰.۹۹	۲.۲۳	۳.۹۶	۶.۱۸	۸.۹۱	۱۲.۱۲	۱۵.۸۳	۲۰.۰۴	۲۴.۷۴
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۸	۱۷۴.۳	۴۸.۱	۱۵.۴	۵.۹	۲.۹	۱.۸	۱.۳	۱.۱	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۲	۱۳۵.۵	۳۳.۰	۱۰.۵	۴.۴	۲.۴	۱.۶	۱.۲	۱.۱	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۶	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۱۹	۰.۷۶	۱.۷۰	۳.۰۳	۴.۷۳	۶.۸۲	۹.۲۸	۱۲.۱۲	۱۵.۳۴	۱۸.۹۴
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۱۳	۰.۵۰	۱.۱۳	۲.۰۱	۳.۱۴	۴.۵۲	۶.۱۵	۸.۰۳	۱۰.۱۶	۱۲.۵۵
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۸	۲۴۱.۳	۱۰۰.۹	۴۰.۸	۱۸.۰	۸.۷	۴.۸	۲.۹	۲.۰	۱.۵	۱.۳
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۱.۱	۰.۴	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۲	۱۹۴.۳	۶۳.۸	۲۲.۸	۹.۴	۴.۷	۲.۷	۱.۸	۱.۴	۱.۲	۱.۱
	SDRL _{RSS}	۰.۵	۰.۹	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

جدول ۴. مقادیر ARL و SDRL در روش RSS استاندارد به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 4$ و $\rho_{12} = 0.9$ و مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی اول
 Table ۴. ARL and SDRL values of standard RSS method under shifts in the mean vector of the process, $n = 4$, $\rho_{12} = 0.9$ and
 sorting based on the first principal component

Shifts	δ	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲	۲.۲۵	۲.۵
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ +\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۲	۲۲۴.۷	۸۵.۸	۳۲.۲	۱۳.۵	۶.۶	۳.۶	۲.۳	۱.۶	۱.۳	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۰	۰.۴	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۹	۱۱۸.۸	۲۶.۵	۸.۰	۳.۳	۱.۸	۱.۳	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۹	۰.۵	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} -\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۲	۲۲۵.۷	۸۶.۳	۳۲.۱	۱۳.۶	۶.۶	۳.۶	۲.۳	۱.۶	۱.۳	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۰	۰.۴	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۹	۱۱۹.۴	۲۶.۷	۷.۹	۳.۳	۱.۸	۱.۳	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۹	۰.۵	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۴۲	۱.۶۷	۳.۷۵	۶.۶۷	۱۰.۴۲	۱۵.۰۰	۲۰.۴۲	۲۶.۶۷	۳۳.۷۵	۴۱.۶۷
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۵	۰.۹۹	۲.۲۳	۳.۹۶	۶.۱۸	۸.۹۱	۱۲.۱۲	۱۵.۸۳	۲۰.۰۴	۲۴.۷۴
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۲	۹۷.۸	۱۷.۰	۴.۵	۱.۹	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۰.۴	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۹	۱۵۹.۹	۳۲.۰	۷.۶	۲.۷	۱.۵	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۹	۰.۷	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۱۹	۰.۷۶	۱.۷۰	۳.۰۳	۴.۷۳	۶.۸۲	۹.۲۸	۱۲.۱۲	۱۵.۳۴	۱۸.۹۴
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۱۳	۰.۵۰	۱.۱۳	۲.۰۱	۳.۱۴	۴.۵۲	۶.۱۵	۸.۰۳	۱۰.۱۶	۱۲.۵۵
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۲	۲۰۴.۸	۷۰.۲	۲۴.۸	۱۰.۰	۴.۸	۲.۷	۱.۸	۱.۴	۱.۲	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۰.۹	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{RSS}	۳۷۰.۹	۱۸۱.۴	۵۴.۲	۱۷.۸	۷.۱	۳.۴	۲.۰	۱.۴	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{RSS}	۰.۹	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

در حضور خطای اندازه‌گیری و با استفاده از نمونه‌گیری ساده، بهتر است. همچنین، عملکرد روش پیشنهادی مبتنی بر RSS استاندارد با افزایش n و همچنین افزایش ρ_{12} بهبود می‌یابد.

به طور کلی نتایج جداول ۱ تا ۴ نشان می‌دهند که عملکرد نمودار T^2 در روش پیشنهادی مبتنی بر RSS استاندارد به دلیل داشتن ARL و SDRL کمتر در شرایط خارج از کنترل، نسبت به عملکرد نمودار T^2

جدول ۵. مقادیر ARL و SDRL در روش NRSS به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 3$ و $\rho_{12} = 0.1$ و مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی اول
Table ۵. ARL and SDRL values of NRSS method under shifts in the mean vector of the process, $n = 3$, $\rho_{12} = 0.1$ and sorting based on the first principal component

Shifts	δ	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲	۲.۲۵	۲.۵
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ +\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۴	۲۱۶.۲	۷۷.۹	۲۸.۴	۱۱.۷	۵.۶	۳.۱	۲.۰	۱.۵	۱.۲	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۰	۰.۳	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۴	۱۷۶.۰	۴۸.۰	۱۴.۴	۵.۲	۲.۵	۱.۵	۱.۲	۱.۱	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} -\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۴	۲۱۵.۶	۷۷.۶	۲۸.۵	۱۱.۷	۵.۶	۳.۱	۲.۰	۱.۵	۱.۲	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۰	۰.۳	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۴	۱۷۵.۲	۴۷.۷	۱۴.۳	۵.۳	۲.۵	۱.۶	۱.۲	۱.۱	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۴۲	۱.۶۷	۳.۷۵	۶.۶۷	۱۰.۴۲	۱۵.۰۰	۲۰.۴۲	۲۶.۶۷	۳۳.۷۵	۴۱.۶۷
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۵	۰.۹۹	۲.۲۳	۳.۹۶	۶.۱۸	۸.۹۱	۱۲.۱۲	۱۵.۸۳	۲۰.۰۴	۲۴.۷۴
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۴	۲۰۲.۵	۶۸.۱	۲۳.۹	۹.۶	۴.۶	۲.۶	۱.۷	۱.۳	۱.۱	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۰.۹	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۴	۱۷۴.۳	۴۷.۵	۱۴.۳	۵.۳	۲.۵	۱.۵	۱.۲	۱.۱	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۱۹	۰.۷۶	۱.۷۰	۳.۰۳	۴.۷۳	۶.۸۲	۹.۲۸	۱۲.۱۲	۱۵.۳۴	۱۸.۹۴
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۱۳	۰.۵۰	۱.۱۳	۲.۰۱	۳.۱۴	۴.۵۲	۶.۱۵	۸.۰۳	۱۰.۱۶	۱۲.۵۵
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۴	۲۶۶.۹	۱۲۸.۶	۵۸.۴	۲۷.۶	۱۴.۰	۷.۷	۴.۶	۳.۱	۲.۲	۱.۷
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۲	۰.۶	۰.۳	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۴	۲۲۱.۲	۸۳.۶	۳۱.۳	۱۲.۹	۶.۱	۳.۳	۲.۱	۱.۵	۱.۲	۱.۱
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۱.۰	۰.۴	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

جدول ۶ مقادیر ARL و SDRL در روش NRSS به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 3$ و $\rho_{12} = 0.9$ و مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی اول
 Table ۶. ARL and SDRL values of NRSS method under shifts in the mean vector of the process, $n = 3$, $\rho_{12} = 0.9$ and
 sorting based on the first principal component

Shifts	δ	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲	۲.۲۵	۲.۵
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ +\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۱	۲۵۱.۹	۱۱۱.۹	۴۶.۹	۲۱.۲	۱۰.۵	۵.۸	۳.۵	۲.۳	۱.۷	۱.۴
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۱.۱	۰.۵	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۱	۱۳۴.۰	۳۱.۶	۹.۷	۳.۸	۲.۱	۱.۴	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۶	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} -\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۱	۲۵۰.۰	۱۱۱.۶	۴۷.۱	۲۱.۳	۱۰.۵	۵.۷	۳.۵	۲.۴	۱.۷	۱.۴
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۱.۱	۰.۵	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۱	۱۳۳.۹	۳۱.۵	۹.۶	۳.۹	۲.۱	۱.۴	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۶	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۴۲	۱.۶۷	۳.۷۵	۶.۶۷	۱۰.۴۲	۱۵.۰۰	۲۰.۴۲	۲۶.۶۷	۳۳.۷۵	۴۱.۶۷
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۵	۰.۹۹	۲.۲۳	۳.۹۶	۶.۱۸	۸.۹۱	۱۲.۱۲	۱۵.۸۳	۲۰.۰۴	۲۴.۷۴
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۱	۱۲۵.۱	۲۶.۲	۷.۲	۲.۹	۱.۶	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۰.۶	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۱	۱۶۲.۷	۳۶.۴	۹.۳	۳.۳	۱.۷	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۷	۰.۲	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۱۹	۰.۷۶	۱.۷۰	۳.۰۳	۴.۷۳	۶.۸۲	۹.۲۸	۱۲.۱۲	۱۵.۳۴	۱۸.۹۴
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۱۳	۰.۵۰	۱.۱۳	۲.۰۱	۳.۱۴	۴.۵۲	۶.۱۵	۸.۰۳	۱۰.۱۶	۱۲.۵۵
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۱	۲۳۲.۵	۹۴.۱	۳۷.۰	۱۵.۸	۷.۷	۴.۲	۲.۶	۱.۸	۱.۴	۱.۲
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۱.۰	۰.۴	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۱	۱۹۴.۳	۶۲.۲	۲۱.۴	۸.۶	۴.۱	۲.۳	۱.۶	۱.۳	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۹	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

جدول ۷. مقادیر ARL و SDRL در روش NRSS به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 4$ و $\rho_{12} = 0.1$ و مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی اول
 Table ۷. ARL and SDRL values of NRSS method under shifts in the mean vector of the process, $n = 4$, $\rho_{12} = 0.1$ and
 sorting based on the first principal component

Shifts	δ	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲	۲.۲۵	۲.۵
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ +\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۸	۱۸۶.۷	۵۵.۹	۱۸.۴	۷.۳	۳.۵	۲.۱	۱.۵	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۲	۱۵۴.۴	۳۶.۸	۹.۸	۳.۳	۱.۷	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۷	۰.۲	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} -\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۸	۱۸۷.۵	۵۶.۵	۱۸.۵	۷.۳	۳.۵	۲.۱	۱.۵	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۰.۸	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۲	۱۵۳.۶	۳۶.۶	۹.۷	۳.۳	۱.۷	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۷	۰.۲	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۴۲	۱.۶۷	۳.۷۵	۶.۶۷	۱۰.۴۲	۱۵.۰۰	۲۰.۴۲	۲۶.۶۷	۳۳.۷۵	۴۱.۶۷
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۵	۰.۹۹	۲.۲۳	۳.۹۶	۶.۱۸	۸.۹۱	۱۲.۱۲	۱۵.۸۳	۲۰.۰۴	۲۴.۷۴
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۸	۱۷۴.۳	۴۸.۱	۱۵.۴	۵.۹	۲.۹	۱.۸	۱.۳	۱.۱	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۰.۸	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۲	۱۴۸.۰	۳۵.۳	۹.۷	۳.۴	۱.۷	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۷	۰.۲	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۱۹	۰.۷۶	۱.۷۰	۳.۰۳	۴.۷۳	۶.۸۲	۹.۲۸	۱۲.۱۲	۱۵.۳۴	۱۸.۹۴
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۱۳	۰.۵۰	۱.۱۳	۲.۰۱	۳.۱۴	۴.۵۲	۶.۱۵	۸.۰۳	۱۰.۱۶	۱۲.۵۵
	ARL _{SRS}	۳۶۶.۸	۲۴۱.۳	۱۰۰.۹	۴۰.۸	۱۸.۰	۸.۷	۴.۸	۲.۹	۲.۰	۱.۵	۱.۳
	SDRL _{SRS}	۱.۶	۱.۱	۰.۴	۰.۲	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۷۰.۲	۲۰۱.۳	۶۶.۱	۲۲.۷	۸.۷	۳.۹	۲.۱	۱.۴	۱.۲	۱.۱	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۹	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

جدول ۸. مقادیر ARL و SDRL در روش NRSS به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 4$ و $\rho_{12} = 0.9$ و مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی اول
 Table ۸. ARL and SDRL values of NRSS method under shifts in the mean vector of the process, $n = 4$, $\rho_{12} = 0.9$ and sorting based on the first principal component

Shifts	δ	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲	۲.۲۵	۲.۵
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ +\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۲	۲۲۴.۷	۸۵.۸	۳۲.۲	۱۳.۵	۶.۶	۳.۶	۲.۳	۱.۶	۱.۳	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۰	۰.۴	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۶۹.۴	۹۶.۷	۱۶.۷	۴.۴	۱.۹	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۴	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} -\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۳۴	۱.۳۶	۳.۰۷	۵.۴۵	۸.۵۲	۱۲.۲۷	۱۶.۷۰	۲۱.۸۲	۲۷.۶۱	۳۴.۰۹
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۲	۰.۸۷	۱.۹۷	۳.۵۰	۵.۴۷	۷.۸۷	۱۰.۷۲	۱۴.۰۰	۱۷.۷۱	۲۱.۸۷
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۲	۲۲۵.۷	۸۶.۳	۳۲.۱	۱۳.۶	۶.۶	۳.۶	۲.۳	۱.۶	۱.۳	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۱.۰	۰.۴	۰.۱	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۶۹.۴	۹۶.۰	۱۶.۸	۴.۴	۱.۹	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۴	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۴۲	۱.۶۷	۳.۷۵	۶.۶۷	۱۰.۴۲	۱۵.۰۰	۲۰.۴۲	۲۶.۶۷	۳۳.۷۵	۴۱.۶۷
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۲۵	۰.۹۹	۲.۲۳	۳.۹۶	۶.۱۸	۸.۹۱	۱۲.۱۲	۱۵.۸۳	۲۰.۰۴	۲۴.۷۴
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۲	۹۷.۸	۱۷.۰	۴.۵	۱.۹	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۰.۴	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۶۹.۴	۱۰۰.۹	۱۶.۹	۴.۴	۱.۹	۱.۲	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۴	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
$\mu_1 = \mu_0 + \begin{bmatrix} +\delta\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{\bar{x}}$	۰	۰.۱۹	۰.۷۶	۱.۷۰	۳.۰۳	۴.۷۳	۶.۸۲	۹.۲۸	۱۲.۱۲	۱۵.۳۴	۱۸.۹۴
	$\lambda_{\bar{y}}$	۰	۰.۱۳	۰.۵۰	۱.۱۳	۲.۰۱	۳.۱۴	۴.۵۲	۶.۱۵	۸.۰۳	۱۰.۱۶	۱۲.۵۵
	ARL _{SRS}	۳۷۱.۲	۲۰۴.۸	۷۰.۲	۲۴.۸	۱۰.۰	۴.۸	۲.۷	۱.۸	۱.۴	۱.۲	۱.۱
	SDRL _{SRS}	۱.۷	۰.۹	۰.۳	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰
	ARL _{NRSS}	۳۶۹.۴	۱۴۲.۸	۳۴.۶	۱۰.۳	۴.۱	۲.۱	۱.۴	۱.۱	۱.۰	۱.۰	۱.۰
	SDRL _{NRSS}	۰.۵	۰.۶	۰.۲	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

عملکرد روش پیشنهادی مبتنی بر NRSS با افزایش n و همچنین افزایش ρ_{12} بهبود می‌یابد.

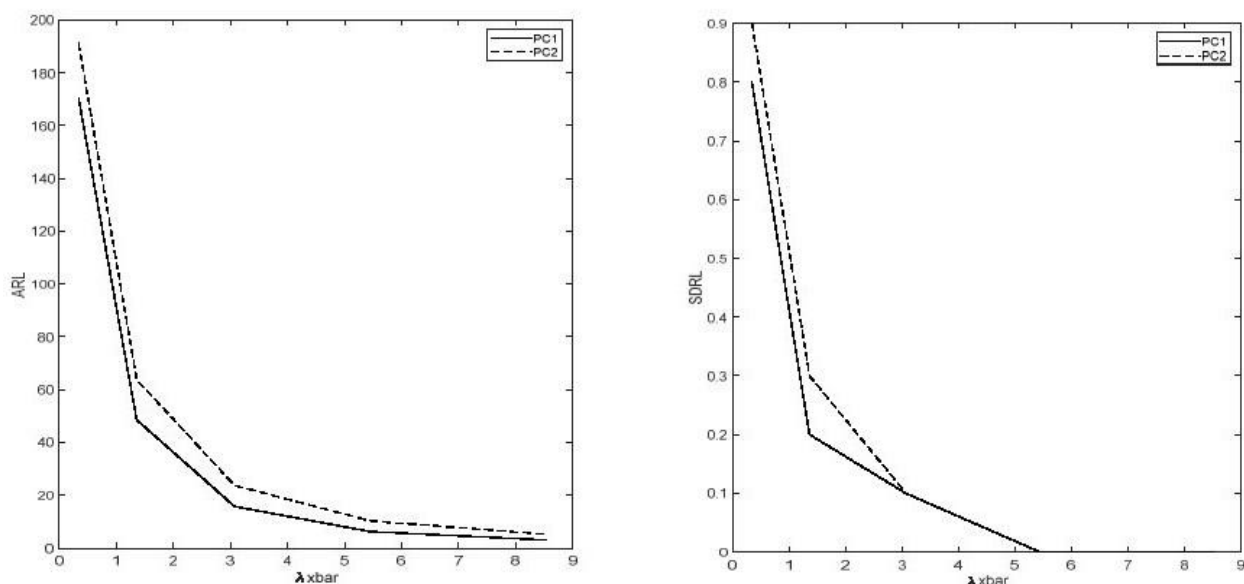
مقایسه‌ی نتایج جداول ۱ تا ۸ نشان می‌دهند که عملکرد نمودار T^2 با استفاده از رویکردهای نمونه‌گیری پیشنهادی مبتنی بر RSS تأثیر بسزایی بر کاهش اثر وجود خطای اندازه‌گیری در عملکرد نمودار مذکور

نتایج جداول ۵ تا ۸ نیز نشان می‌دهند که عملکرد نمودار T^2 در روش پیشنهادی مبتنی بر NRSS به دلیل داشتن ARL و SDRL کمتر در شرایط خارج از کنترل، نسبت به عملکرد نمودار T^2 در حضور خطای اندازه‌گیری و با استفاده از نمونه‌گیری ساده، بهتر است. همچنین،

در پایش فرآیندهای چندمتغیره دارد. همچنین، عملکرد رویکردهای پیشنهادی مبتنی بر RSS با افزایش اندازه نمونه n و همچنین افزایش ضریب همبستگی ρ_{12} بهبود می‌یابند.

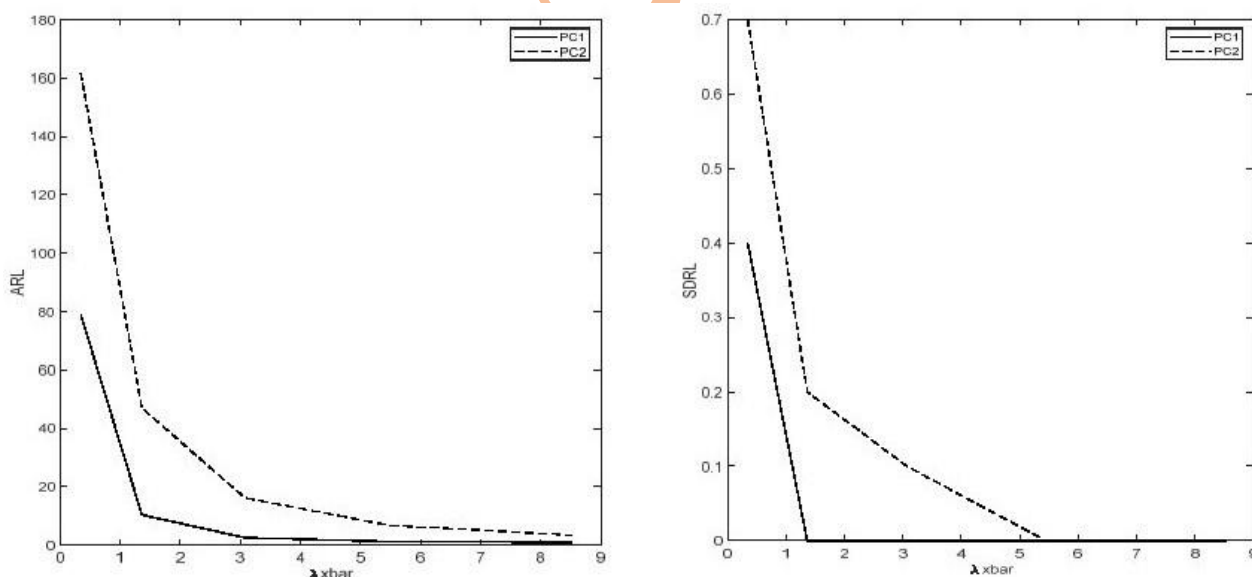
همچنین، در مقایسه‌ی روش‌های پیشنهادی نیز می‌توان گفت که روش NRSS تقریباً عملکرد مطلوب‌تری نسبت به RSS استاندارد به دلیل مقادیر کمتر ARL و SDRL در شرایط خارج از کنترل دارد.

شبیه‌سازی‌های بسیار زیادی نیز با در نظر گرفتن مرتب‌سازی‌ها برحسب مولفه‌ی اصلی دوم به جای مولفه‌ی اصلی اول در روش‌های پیشنهادی مبتنی بر RSS صورت پذیرفته است. ولی از میان انبوه حجم شبیه‌سازی‌ها به ذکر نتایج خلاصه‌شده‌ای در شکل ۲ و ۳ بسنده می‌شود.



شکل ۲. مقایسه‌ی مقادیر ARL و SDRL روش پیشنهادی RSS استاندارد به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 3$ و $\rho_{12} = 0.5$ برحسب مرتب‌سازی مبنی بر مولفه‌ی اصلی اول و مولفه‌ی اصلی دوم

Figure ۲. Comparing ARL and SDRL of the proposed standard RSS method under shifts in the mean vector, $n = 3$, $\rho_{12} = 0.5$ and sorting based on the first and second principal components



شکل ۳. مقایسه‌ی مقادیر ARL و SDRL روش پیشنهادی NRSS به ازای تغییرات در بردار میانگین فرآیند، $n = 5$ و $\rho_{12} = 0.9$ برحسب مرتب‌سازی مبنی بر مولفه‌ی اصلی اول و مولفه‌ی اصلی دوم

Figure ۳. Comparing ARL and SDRL of the proposed NRSS method under shifts in the mean vector, $n = 5$, $\rho_{12} = 0.9$ and sorting based on the first and second principal components

برای خطای اندازه‌گیری مدل جمع‌پذیر خطی بوده است، استفاده از مدل ضربی، مدل دوعضوی و یا چهارعضوی موجود در ادبیات نیز می‌تواند به عنوان توسعه‌ی روش این تحقیق مورد تمرکز قرار بگیرد. در راستای این تحقیق می‌توان، واریانس خطا را نیز برای تحقیقات آتی به صورت خطی افزایشی در نظر گرفت.

پانوش:

^۱ Simple Random Sampling

^۲ Ranked Set Sampling

^۳ Neoteric Ranked Set Sampling

^۴ Average Run Length

^۵ Standard Deviation of Run Length

References:

- Maleki, M.R., Amiri, A. and Castagliola, P., ۲۰۱۷. Measurement errors in statistical process monitoring: A literature review. *Computers & Industrial Engineering*, 103, pp.۳۱۶-۳۲۹. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.10.026>
- Xie, F., Castagliola, P., Tang, A., Hu, X. and Sun, J., ۲۰۲۴. The performance of the one-sided truncated exponentially weighted moving average X control chart in the presence of measurement errors. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 94(۱۰), pp.۲۰۸۹-۲۱۱۳. <https://doi.org/10.1080/00949655.2024.2316722>
- Munir, T., Hu, X., Kauppila, O. and Bergquist, B., ۲۰۲۳. Effect of measurement uncertainty on combined quality control charts. *Computers & Industrial Engineering*, 175, p.۱۰۸۹۰۰. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108900>
- Noor-ul-Amin, M., Javaid, A., Hanif, M. and Dogu, E., ۲۰۲۲. Performance of maximum EWMA control chart in the presence of measurement error using auxiliary information. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 51(۹), pp.۵۴۸۲-۵۵۰۶. <https://doi.org/10.1080/03610918.2020.1772301>
- Zaidi, F.S., Castagliola, P., Tran, K.P. and Khoo, M.B.C., ۲۰۲۰. Performance of the MEWMA-CoDa control chart in the presence of measurement errors. *Quality and Reliability Engineering International*, 36(۷), pp.۲۴۱۱-۲۴۴۰. <https://doi.org/10.1002/qre.2705>
- Zaidi, F.S., Castagliola, P., Tran, K.P. and Khoo, M.B.C., ۲۰۱۹. Performance of the hotelling T^۲ control chart for compositional data in the presence of measurement errors. *Journal of*

نتایج شکل‌های ۲ و ۳ نمایان‌گر این هستند که مرتب‌سازی بر حسب مولفه‌ی اصلی اول در اکثر موارد منجر به نتایج بهتری، به دلیل داشتن ARL و SDRL کمتر، نسبت به مرتب‌سازی برحسب مولفه‌ی اصلی دوم می‌شود. بنابراین، پیشنهاد می‌شود که در رویکردهای پیشنهادی مرتب‌سازی‌ها برحسب مولفه‌ی اصلی اول صورت بگیرند.

۵. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در فرآیندهای گوناگون، زمانی که اندازه‌گیری برای پایش فرآیند وجود دارد، ممکن است به دلایل مختلف اندازه‌گیری‌ها با خطا همراه باشند. وجود خطاهای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودارهای کنترل مورد استفاده در پایش فرآیند، اثر نامطلوب دارد. در این مقاله، برای کاهش اثر نامطلوب خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل T^2 در پایش فرآیندهای نرمال چندمتغیره، استفاده از رویکردهای نمونه‌گیری مبتنی بر نمونه‌گیری مجموعه‌ی مرتب‌شده پیشنهاد شد. اهداف این تحقیق عبارتند از:

- مقایسه‌ی عملکرد نمودار کنترل T^2 زمانی که خطای اندازه‌گیری وجود ندارد با زمانی که خطای اندازه‌گیری وجود دارد و نشان دادن اثر نامطلوب وجود خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل مذکور
- استفاده از روش‌های نمونه‌گیری نوین مبتنی بر RSS برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری و انجام مقایسات عملکرد نمودار کنترل T^2 برای نشان دادن مزیت به‌کارگیری روش‌های پیشنهادی RSS و NRSS
- پیشنهاد روشی برای مرتب‌سازی مشاهدات همبسته‌ی نرمال که در این مقاله رویکرد پیشنهادی استفاده از مقادیر امتیازات مولفه‌های بود.

از آنجایی که مشخصه‌های کیفی چندمتغیره همبسته هستند و باید برای انجام مرتب‌سازی‌ها در روش‌های مبتنی بر RSS، همه‌ی مشخصه‌های همبسته‌ی یک مشاهده با هم مرتب شوند، بنابراین در این مقاله ابتدا مقادیر امتیازات مولفه‌های اصلی مرتبط با هر نمونه محاسبه شدند و مرتب‌سازی‌ها براساس این مقادیر انجام شد و به همین ترتیب مشاهدات متناظر با مقادیر مولفه‌های اصلی مرتب شدند. در این تحقیق برای نمونه‌گیری، دو روش RSS استاندارد و NRSS برای فرآیندهای چندمتغیره توسعه داده شدند و عملکرد نمودار کنترل T^2 با استفاده از این دو روش نمونه‌گیری ارزیابی شد و با عملکرد آن با نمونه‌گیری ساده تصادفی، مقایسه شد. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان دادند که استفاده از رویکردهای پیشنهادی نمونه‌گیری مبتنی بر RSS، تاثیر مطلوبی بر کاهش اثر خطای اندازه‌گیری داشت. همچنین، روش NRSS نتایج مطلوب‌تری نسبت به روش RSS استاندارد داشت. برای مرتب‌سازی متغیرها نیز اگر مرتب‌سازی بر اساس مقادیر امتیازات مولفه‌ی اصلی اول انجام شود، نتایج مطلوب‌تری حاصل خواهد شد. برای علاقمندان پژوهش در این حوزه، استفاده از یک متغیر کمکی که برحسب آن مرتب‌سازی‌ها صورت بگیرد، می‌تواند به عنوان موضوعی برای تحقیقات آتی در این راستا در نظر گرفته شود. همچنین، در این مقاله، داده‌های نرمال مدنظر قرار گرفته‌اند، برای تحقیقات آتی می‌توان رویکردی برای داده‌های غیرنرمال ارائه کرد. مدل موردنظر در این مقاله

١٤. Arif, F., Noor-Ul-Amin, M. and Hanif, M., ٢٠٢١. Joint monitoring of mean and variance using likelihood ratio test statistic with measurement error. *Quality Technology & Quantitative Management*, 18(٢), pp.٢٠٢-٢٢٤. <https://doi.org/10.1080/1684337.2020.1819138>
١٥. Maleki, M.R., Salmasnia, A. and Yarmohammadi Saber, S., ٢٠٢٢. The performance of triple sampling X control chart with measurement errors. *Quality Technology & Quantitative Management*, 19(٥), pp.٥٨٧-٦٠٤. <https://doi.org/10.1080/1684337.2022.204702>
١٦. Linna, K.W., Woodall, W.H. and Busby, K.L., ٢٠٠١. The performance of multivariate control charts in the presence of measurement error. *Journal of Quality Technology*, 33(٣), pp.٣٤٩-٣٥٥. <https://doi.org/10.1080/0022406.2001.11980084>
١٧. Mohammadkhani, A., Amiri, A. and Khoo, M.B., ٢٠٢٢. A review of ranked set sampling and modified methods in designing control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 39(٤), pp.١٤٦٥-١٤٩٣. <https://doi.org/10.1002/qre.3282>
١٨. Khan, I., Noor-ul-Amin, M., Khan, D.M., Ismail, E.A. and Sumelka, W., ٢٠٢٣. Monitoring of manufacturing process using bayesian EWMA control chart under ranked based sampling designs. *Scientific Reports*, 13(١), p.١٨٢٤٠. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-40003-x>
١٩. Khan, I., Noor-ul-Amin, M., Muhammad Khan, D., Khalil, U., Ismail, E.A., Yasmeen, U. and Ahmad, B., ٢٠٢٢. Bayesian AEWMA control chart under ranked set sampling with application to reliability engineering. *Scientific Reports*, 13(١), p.٢٠٠٢٠. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-47324-0>
٢٠. Wang, Y., Khan, I., Noor-ul-Amin, M., AlQahtani, S.A. and Ahmad, B., ٢٠٢٣. Monitoring of semiconductor manufacturing process on Bayesian AEWMA control chart under paired ranked set sampling schemes. *Scientific Reports*, 13(١), p.٢٢٧٠٣. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-49843-2>
٢١. Woodall, W.H., Haq, A., Mahmoud, M.A. and Saleh, N.A., ٢٠٢٤. Reevaluating the performance of control charts based on ranked-
Applied Statistics, 46(١٤), pp.٢٥٨٣-٢٦٠٢. <https://doi.org/10.1080/02664763.2019.160339>
٢٢. Nguyen, H.D., Tran, K.P., Celano, G., Maravelakis, P.E. and Castagliola, P., ٢٠٢٠. On the effect of the measurement error on Shewhart t and EWMA t control charts. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 107(٩), pp.٤٣١٧-٤٣٣٢. <https://doi.org/10.1007/s00170-020-05222-z>
٢٣. Li, Q., Yang, J., Huang, S. and Zhao, Y., ٢٠٢٢. Generally weighted moving average control chart for monitoring two-parameter exponential distribution with measurement errors. *Computers & Industrial Engineering*, 165, p.١٠٧٩٠٢. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107902>
٢٤. Sabahno, H., Amiri, A. and Castagliola, P., ٢٠١٩. Optimal performance of the variable sample sizes Hotelling's T² control chart in the presence of measurement errors. *Quality Technology & Quantitative Management*, 16(٥), pp.٥٨٨-٦١٢. <https://doi.org/10.1080/1684337.2018.1494574>
٢٥. Sabahno, H., Castagliola, P. and Amiri, A., ٢٠٢٠. A variable parameters multivariate control chart for simultaneous monitoring of the process mean and variability with measurement errors. *Quality and Reliability Engineering International*, 36(٤), pp.١١٦١-١١٩٦. <https://doi.org/10.1002/qre.2621>
٢٦. Imran, M., Sun, J., Zaidi, F.S., Abbas, Z. and Nazir, H.Z., ٢٠٢٢. Evaluating the performance of variable sampling interval Hotelling T² charting scheme for compositional data in the presence of measurement error. *Quality and Reliability Engineering International*, 39(٦), pp.٢١٢٥-٢١٥١. <https://doi.org/10.1002/qre.3307>
٢٧. Tang, A., Castagliola, P., Sun, J. and Hu, X., ٢٠١٨. The effect of measurement errors on the adaptive EWMA chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 34(٤), pp.٦٠٩-٦٣٠. <https://doi.org/10.1002/qre.2270>
٢٨. Tran, P.H., Tran, K.P. and Rakitzis, A., ٢٠١٩. A synthetic median control chart for monitoring the process mean with measurement errors. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(٤), pp.١١٠٠-١١١٦. <https://doi.org/10.1002/qre.2447>

set sampling. *Quality Engineering*, 36(۲), pp.۳۶۵-۳۷۰.

<https://doi.org/10.1080/08982112.2023.2212751>

۲۲. Kazemnejad, A., ۲۰۲۴. Monitoring multivariate normal processes with new sampling methods in the presence of measurement errors, West Tehran Branch-Islamic Azad University, M.Sc. thesis. [In Persian]

روز استادی نشسته