

استخراج مکان حسگرها در آرایه‌های با قدرت تفکیک زیاد به کمک

حد کرامر - راو

محمد عسگری (استادیار)
دانشکده‌ی صدا و سیما

امروزه روش‌های متداول در جهت‌یابی رادیویی (DF)^۱ جای خود را به سیستم‌های پردازش آرایه‌یی^۲ داده‌اند که کاربردهای بی‌شماری دارند. گرچه سیستم پردازش آرایه‌یی بر بسیاری از ناتوانی‌های الگوریتم‌های متداول مورد استفاده، فائق آمده اما قابلیت‌های آن از عواملی همچون نویز، عدم اطلاع دقیق از مشخصات سیگنال دریافتی، اثر تزویج متقابل عناصر آرایه و بسیاری از پارامترهای دیگر تأثیر می‌پذیرند. تمامی این عوامل باعث ایجاد خطا در آشکارسازی^۳ و همچنین جداسازی^۴ منابع از یکدیگر می‌شود. در این نوشتار، ضمن بیان حد کرامر - راو و کاربرد آن در سیستم‌های پردازنده‌ی آرایه‌یی، با تجزیه‌ی دقیق و تفکیک کامل آن، طی مراحل محاسباتی کاملی، ارتباط مشخص این حد را با محل حسگرها به دست می‌آوریم. این عبارت که خود مشخصه‌یی از خطای سیستم است به طراحی آرایه کمک خواهد کرد تا به ازای پارامترهای مذکور آرایه طراحی شود. به بیان دیگر، انتخاب بهینه‌ی محل حسگرها یا شکل هندسی آرایه تأثیر به‌سزایی در کاهش خطا خواهد داشت. در پایان نتایج ریاضی به دست آمده بر روی چند آرایه بررسی خواهد شد.

۱. مقدمه

برای شکل‌دهنده‌های پرتو، حصول یک الگوی بهره با گلبرگ اصلی باریک و گلبرگ‌های فرعی کوچک است. این مسئله در نوشتارهای زیادی تحقیق شده است.^[۱]

از طرف دیگر آقای هانگ^[۲] روش طراحی آرایه را با استفاده از تخمین‌زننده‌ی بیشینه‌ی احتمال و براساس کمینه‌سازی مقدار خطای تخمین پیاده‌سازی کرد. او از بسط تیلور استفاده کرد و تنها عبارت درجه اول این خطا را در نظر گرفت که مسلماً این امر برای SNR هایی با مقدار بزرگ صحیح است. او ماتریس کوواریانس را به صورت تابعی از جهات واقعی دریافت، DOA ها، محل حسگرها و مشخصات نویز به دست آورد، به طوری که با مشخص کردن تعداد حسگرها، دهانه‌ی آرایه، جهات واقعی دریافت و ماتریس کوواریانس نویز، توانست محل و موقعیت حسگرها را چنان مشخص سازد که درمیان ماتریس کوواریانس داده‌ها کمینه شود.

در اینجا دانستن این نکته مهم است که فنون طراحی آرایه ذکر شده، تماماً به دنبال مکان‌های منابع از طریق قید مشخصی هستند که عموماً به نوع الگوریتم‌ها وابسته‌اند. به عنوان مثال می‌توان از فنونی نظیر جست‌وجوی ساده^[۳]، برنامه‌ریزی دینامیک^[۴]، استفاده از ژنتیک الگوریتم^[۵]، استفاده از شبیه‌سازی خنک شدن فلزات^[۶] نام برد. اما با بررسی تمامی این روش‌ها به یک نکته‌ی مشترک می‌رسیم و آن پیچیدگی محاسبات در جست‌وجوی پاسخ است.

طی یکی دو دهه‌ی اخیر، تحقیقات ارزشمند زیادی در زمینه‌ی الگوریتم‌های محل‌یابی منابع^۵ بر روی پردازشگرهای سیگنال آرایه صورت گرفته است. این تحقیقات به توسعه‌ی روش‌های مبتنی بر زیرفضای سیگنال انجامیده است که به طور مجانبی دقت جداسازی بی‌نهایت را نشان می‌دهند و از این رو آنها را الگوریتم‌های «تفکیک‌پذیری فوق العاده»^۶ می‌نامند. موضوع مهمی که به آن چندان توجهی نشده است طراحی ساختار آرایه است که تحت شرایط عملی و غیرمجانبی، محدودیت‌هایی اساسی در مشخصات غایی سیستم بر جا می‌گذارد. هدف از این نوشتار، تحقیق در این زمینه و ارائه‌ی روشی جدید در طراحی آرایه است که مشخصات آرایه‌های DF را پوشش دهند.

به طور کلی، فنون سنتز آرایه را که در دسته‌های دیگری از الگوریتم‌های DF مطرح شده‌اند، می‌توان در نوشتارهای زیادی پیدا کرد. روش مشترک این فنون، تعیین عامل محدودکننده در مشخصه‌ی سیستم‌های DF است. مثلاً، طراحی شکل‌دهنده‌ی پرتو^۷ براساس ساختار الگوی بهره‌ی آرایه است، چراکه پهنای گلبرگ اصلی سیگنال اصلی را کنترل می‌کند، و سطح گلبرگ‌های کناری توان نشستی مزاحم را کوچک می‌کند. همچنین به خوبی مشخص است که پهنای پرتو با معکوس دهانه‌ی آرایه متناسب است، اگر چه شکل گلبرگ‌های کناری تابعی از تعداد و موقعیت حسگرها است.^[۱] از این رو هدف طراحی

بعدی شامل بردارهای جهت‌نمای آرایه $\underline{a}_g(\theta, \varphi)$ است.

$$\underline{a}_g(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) \odot \underline{a}(\theta, \varphi)$$

$$\underline{a}(\theta, \varphi) = \exp(-j\pi \underline{R}(\theta) \cos\varphi)$$

$$\underline{R}(\theta) = \underline{r}_x \cdot \cos\theta + \underline{r}_y \cdot \sin\theta$$

که در آن \underline{r}_x و \underline{r}_y بردارهای تصویر مکان حسگرها بر روی دو محور x و y هستند که نسبت به $\lambda/2$ به‌هم‌نجار شده‌اند و $g(\theta, \varphi)$ بردار بهره‌ی حسگرها است. در معادلات فوق \odot نشانه ضرب هادامارد یا عنصر در عنصر است.

CRB عبارت است از: [9]

$$\text{CRB}[\eta] = \frac{\sigma^2}{\nu L} (\text{Re}[\mathbf{H} \mathbf{R}_{SS}^T])^{-1} \odot \in \mathbf{R}^{M \times M}$$

$$\frac{P}{\sigma^2} = \text{SNR}$$

جایی که

$$\begin{cases} H = \dot{A} P_A^\perp \dot{A} \in C^{M \times M} \\ R_{SS} = E\{\underline{s}(t)\underline{s}^H(t)\} \in C^{M \times M} \end{cases}$$

$R^{M \times M}$ فضای حقیقی $M \times M$ بعدی و $C^{M \times M}$ فضای مختلط $M \times M$ هستند.

در اینجا، به‌منظور تمرکز بر عبارات آشکارسازی و جداسازی، و با توجه به تعاریف ارائه شده در این زمینه به محاسبه‌ی حد کرامر - راو به‌طور خاص خواهیم پرداخت.

۱.۲. آشکارسازی، جداسازی و حد کرامر - راو

تعریف ۱: قابلیت آشکارسازی یک سیستم جهت‌یاب، توانایی آن سیستم برای تعیین تعداد منابعی است که در محیط وجود دارند و اثر آنها در خروجی آرایه ظاهر شده است. اگر فرض کنیم که آرایه فقط سیگنالی را که از جهت θ می‌رسد، دریافت می‌کند معادله‌ی CRB آن با قراردادن $A = \underline{a}_1(\theta)$ و $R_{SS} = P_1$ به‌صورت رابطه‌ی ۱ درخواهد آمد.

$$\text{CRB}[\theta] = \frac{\sigma^2}{\nu L P_1} \frac{1}{\underline{a}_1^H P_{a_1}^\perp \underline{a}_1} \quad (1)$$

تعریف ۲: قابلیت جداسازی یک سیستم DF نه‌تنها آشکارسازی سیگنال‌ها و منابع، بلکه تعیین زاویه‌ی هرکدام از منابع به‌تنهایی است - حتی اگر دقیق نباشد.

عبارت کرامر - راو با افزایش تعداد منابع به‌شدت مشکل و حجیم می‌شود، چرا که در این‌صورت دقت آرایه در تخمین η فقط به نویز

در این نوشتار طراحی آرایه‌های DF، که از الگوریتم‌های مبتنی بر زیرفضا استفاده می‌کنند، ارائه شده است که یک فن مناسب در حل مشکل طراحی آرایه است و بر مشکل مراحل پیچیده‌ی جست‌وجو غالب آمده است.

در بخش دوم این نوشتار به توضیح حد کرامر - راو و کاربرد آن در سیستم‌های پردازش آرایه‌ی می‌پردازیم. بسط حد کرامر - راو برای حالت‌های آشکارسازی و جداسازی در بخش سوم ارائه می‌شود. در بخش چهارم با ارائه‌ی چند شکل عملی از آرایه‌ها، نتایج به دست آمده در نظریه‌ها را شبیه‌سازی کرده‌ایم، و در بخش پنجم نیز نتایج آن ارائه شده است.

۲. حد کرامر - راو و نحوه‌ی به‌کارگیری آن در

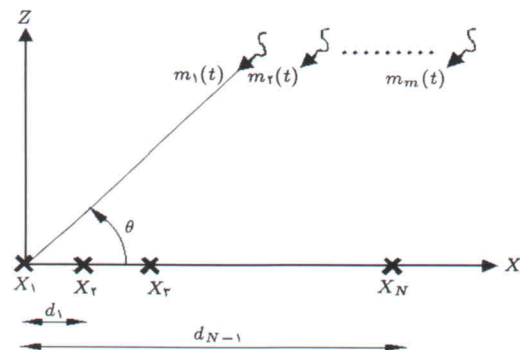
سیستم‌های پردازش آرایه

چنان که پیش‌تر توضیح داده شد، عمومی‌ترین محدودیت موجود در سیستم‌های پردازش آرایه حد پائین کرامر - راو است. این عبارت حد کوچک‌تر از ماتریس کوواریانس تخمین هر پارامتر بایاس نشده‌ی (دارای متوسط صفر) نظیر $\hat{\eta}$ را محاسبه می‌کند. فرض کنید N حسگر در حال دریافت M سیگنال باند باریک به همراه نویز با قدرت σ^2 هستند، و همچنین تعداد نمونه‌های سیگنال دریافتی به قدر کافی بزرگ‌اند ($L \gg 1$). خروجی آرایه (شکل ۱) چنین خواهد بود.

$$\underline{x}(t) = A(\theta, \varphi)\underline{s}(t) + \underline{n}(t)$$

که در آن $x(t)$ بردار N بعدی خروجی حسگرها، $\underline{s}(t)$ بردار M بعدی سیگنال‌های ورودی به آرایه، $\underline{n}(t)$ بردار N بعدی نویز سفید و جمع‌پذیر موجود روی حسگرهای آرایه و

$$N \times M \text{ ماتریس } A(\theta, \varphi) = [\underline{a}_g(\theta_1, \varphi_1), \dots, \underline{a}_g(\theta_M, \varphi_M)]$$



شکل ۱. آرایه‌ی خطی یکنواخت که m سیگنال باند باریک به آن می‌رسد.

هندسی دیده نمی‌شود.^[۱۲] به عبارت دیگر طراح می‌تواند با روشی نظیر الگوریتم ژنتیک از همان ابتدا مسئله را دنبال کند و مکان‌های مناسبی (!) را به منظور به دست آوردن دقت بهتر برای آرایه انتخاب کند بدون آنکه از نحوه‌ی ارتباط شکل هندسی آرایه با این دقت (حد کرامر - راو) اطلاعی داشته باشد. هنر آقای مانی‌کاس را در واقع می‌توان استفاده‌ی وی از عبارت CRB برای رسیدن به این منظور دانست، روشی که هنوز می‌توان آن را شیوه‌ی نوین و منحصر به فرد در انتخاب محل عناصر دانست.

۳. بسط حد کرامر - راو

قبل از ارائه‌ی کامل فرمول‌های لازم، با توجه به روابط ۱ تا ۳، محاسبه‌ی مشتق بردار جهت‌نما در دو بعد θ و φ مورد نیاز است. لذا با در نظر گرفتن تعریف $\underline{a}(\theta, \varphi)$ ارائه شده داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{a}}_{\theta}(\theta, \varphi) &= -j\pi \cos \varphi \underline{R}(\theta) \odot \underline{a}(\theta, \varphi) \\ \dot{\underline{a}}_{\varphi}(\theta, \varphi) &= +j\pi \sin \varphi \underline{R}(\theta) \odot \underline{a}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

همچنین داشتیم:

$$\underline{a}_g(\theta, \varphi) = \underline{g}(\theta, \varphi) \odot \underline{a}(\theta, \varphi)$$

بنابراین روی هر پارامتری

$$\dot{\underline{a}}_g = \dot{\underline{g}} \odot \underline{a} + \underline{g} \odot \dot{\underline{a}}$$

اگر مشتق نسبت به θ گرفته شود

$$\begin{aligned} \dot{\underline{a}}_{g\theta}(\theta, \varphi) &= \dot{\underline{g}}_{\theta}(\theta, \varphi) \odot \underline{a}(\theta, \varphi) - j\pi \cos \varphi \\ &\quad \underline{R}(\theta) \underline{g}(\theta, \varphi) \odot \underline{a}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (۴)$$

برای راحتی از این به بعد عبارت $(\theta$ و $\varphi)$ را نخواهیم نوشت و هر جا که لازم باشد مجدداً در محاسبات آورده و از آن استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$\dot{\underline{a}}_{g\theta} = \left[\dot{\underline{g}}_{\theta} - j\pi \cos \varphi \underline{R} \odot \underline{g} \right] \odot \underline{a}$$

به همین ترتیب می‌توان محاسبات را برای $\dot{\underline{a}}_{g\varphi}$ انجام داد که در این صورت:

$$\dot{\underline{a}}_{g\varphi} = \left[\dot{\underline{g}}_{\varphi} + j\pi \sin \varphi \underline{R} \odot \underline{g} \right] \odot \underline{a}$$

از عبارات فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{a}}_{g\theta}(\theta, \varphi) &= \dot{\underline{G}}_{\theta}(\theta, \varphi) \odot \underline{a}(\theta, \varphi) \\ \dot{\underline{a}}_{g\varphi}(\theta, \varphi) &= \dot{\underline{G}}_{\varphi}(\theta, \varphi) \odot \underline{a}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (۵)$$

جمع‌پذیر حسگرها بستگی ندارد بلکه از عکس‌العمل منابع نسبت به یکدیگر در این دقت تأثیر می‌پذیرد. بنابراین حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن، از M منبع موجود $M - 2$ منبع غیروابسته‌اند، و فقط دو منبع وابسته به یکدیگر در محیط وجود دارند. می‌توان اثبات کرد که اگر این دو منبع وابسته با زوایای θ_1, θ_2 به آرایه برسند و قدرت هر یک از آن‌ها به ترتیب P_1 و P_2 ، و نیز ضریب همبستگی آنها ρ باشد، معادله‌ی CRB را می‌توان چنین نوشت:

$$CRB(\theta_1) = \frac{1}{2LSNR_1} \frac{1}{\underline{a}_1^H P_A^+ \underline{a}_1} \frac{1}{1 - \frac{Re\{\rho \underline{a}_2^H P_A^+ \underline{a}_1\}}{P_1 P_2 \underline{a}_1^H P_A^+ \underline{a}_1 \underline{a}_2^H P_A^+ \underline{a}_2}} \quad (۲)$$

در حالتی که هیچ کدام از منابع به دیگری وابسته نباشد یعنی $\rho = 0$ ، آنگاه معادله‌ی ۲ چنین خواهد بود:

$$CRB[\theta_1] = \frac{1}{2LSNR_1} \frac{1}{\underline{a}_1^H P_A^+ \underline{a}_1} \quad (۳)$$

در هر سه معادله‌ی ۱ تا ۳ باید به این نکته توجه داشت که \underline{a} مشتق بردار جهت‌نما برحسب پارامتر تخمین (در اینجا θ) است و اگر محاسبه‌ی $CRB(\varphi)$ مد نظر باشد این مشتق برحسب φ خواهد بود. نکته دیگری که باید به آن توجه داشت استفاده از عبارت آشکارسازی و عدم بحث از جداسازی در هر دو حالت است. برای آشکارسازی تک تک منابع از حد کرامر - راو برای تک منبع، و برای داشتن یک عبارت در مورد جداسازی از حد کرامر - راو در مورد آشکارسازی یک منبع در حضور منبع دیگر استفاده می‌شود. واضح است که هرچه آشکارسازی یک منبع در حضور منبع دیگر دقیق‌تر انجام شود، جداسازی نیز با دقت بیشتری صورت خواهد گرفت. لذا از این به بعد حد کرامر - راو محاسبه شده برای یک منبع را «عبارت آشکارسازی» آن می‌دانیم و همین عبارت را در حضور دو سیگنال به عنوان «عبارت جداسازی» آن می‌شناسیم. از فرمول‌های CRB به دست آمده می‌توان براحتی نتیجه گرفت که با افزایش تعداد نمونه‌ها یا کاهش نویز (افزایش SNR) دقت آشکارسازی فوق‌العاده بیشتر خواهد شد، اما هیچ راهی برای شناخت چگونگی تأثیرگذاری شکل هندسی آرایه‌ها بر این مقدار در موضوعات اخیر دیده نمی‌شود. در واقع هدف اصلی این نوشتار، به دست آوردن ارتباط بین CRB ها و شکل هندسی آرایه است. ایده‌ی اصلی این موضوع از تحقیقات آقای مانی‌کاس و همکارانش گرفته شده است^[۹-۱۱] که با استفاده از روش هندسه تقاضلی و نیز با استفاده از تقریب‌هایی که به‌کار برده‌اند به روابط ملموسی رسیدند. نکته‌ی دیگر که در مطالعه‌ی بیشتر مقالات تحقیقی، روش‌های اساسی و پایه در تعیین ماهیت شکل

عبارت $\underline{\dot{G}}$ را «بردار مشتق بهره» می‌نامیم، به طوری که

$$\underline{\dot{G}}_\theta = \underline{\dot{g}}_\theta - j\pi \cos \varphi \underline{\dot{R}} \underline{g} \odot \quad (6)$$

$$\underline{\dot{G}}_\varphi = \underline{\dot{g}}_\varphi + j\pi \sin \varphi \underline{\dot{R}} \underline{g} \odot$$

۱.۳. محاسبه CRB_{det}

برای محاسبه CRB_{det} باید عبارت $\underline{\dot{a}}_{\nu g}^H P_{\underline{\dot{a}}_{\nu g}} \underline{\dot{a}}_{\nu g}$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H P_{\underline{\dot{a}}_{\nu g}} \underline{\dot{a}}_{\nu g} &= \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H \left[I - \underline{a}_{\nu g} (\underline{a}_{\nu g}^H \underline{a}_{\nu g})^{-1} \underline{a}_{\nu g}^H \right] \underline{\dot{a}}_{\nu g} \\ &= \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H \underline{\dot{a}}_{\nu g} - \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H \underline{a}_{\nu g} (\underline{a}_{\nu g}^H \underline{a}_{\nu g})^{-1} \underline{a}_{\nu g}^H \underline{\dot{a}}_{\nu g} \end{aligned}$$

الف) محاسبه $\underline{a}_{\nu g}^H \underline{a}_{\nu g}$

$$\underline{a}_{\nu g}^H \underline{a}_{\nu g} = \left(\underline{g}_{\nu} \underline{a}_{\nu} \right)^H \odot \left(\underline{g}_{\nu} \underline{a}_{\nu} \right) = \odot \sum_{i=1}^N |g_{\nu i}|^2 = \|\underline{g}_{\nu}\|^2 \quad (7)$$

ب) محاسبه $\underline{\dot{a}}_{\nu g}^H \underline{a}_{\nu g} \underline{a}_{\nu g}^H \underline{\dot{a}}_{\nu g}$ = $\left| \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H \underline{a}_{\nu g} \right|^2$

$$\underline{\dot{a}}_{\nu g}^H \underline{a}_{\nu g} = \left(\underline{\dot{G}}_{\nu} \underline{a}_{\nu} \right)^H \odot \left(\underline{g}_{\nu} \underline{a}_{\nu} \right) = \odot \sum_{i=1}^N G_{\nu i}^H g_{\nu i} \quad (8)$$

ج) محاسبه $\underline{\dot{a}}_{\nu g}^H \underline{\dot{a}}_{\nu g}$ = $\|\underline{\dot{a}}_{\nu g}\|^2$

$$\|\underline{\dot{a}}_{\nu g}\|^2 = \|\underline{\dot{G}}_{\nu}\|^2 \quad (9)$$

با ترکیب نتایج به دست آمده از سه مرحله فوق:

$$\underline{\dot{a}}_{\nu g}^H P_{\underline{\dot{a}}_{\nu g}} \underline{\dot{a}}_{\nu g} = \|\underline{\dot{G}}_{\nu}\|^2 - \frac{\left| \sum_{i=1}^N \underline{\dot{G}}_{\nu i}^H g_{\nu i} \right|^2}{\|\underline{g}_{\nu}\|^2} \quad (10)$$

در صورت حقیقی بودن بهره خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} CRB_{det}(\varphi_{\nu}) &= \frac{\sigma^2}{2LP_{\nu}} \left[\|\underline{\dot{g}}_{\nu\varphi}\|^2 + \pi^2 \sin^2 \varphi_{\nu} \sum g_{\nu i}^2 R_i^2(\theta_{\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sum^2 \dot{g}_{\nu i\varphi} g_{\nu i} + \pi^2 \sin^2 \varphi_{\nu} \sum^2 |g_{\nu i}|^2 R_i(\theta_{\nu})}{\|\underline{g}_{\nu}\|^2} \right]^{-1} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CRB_{det}(\theta_{\nu}) &= \frac{\sigma^2}{2LP_{\nu}} \left[\|\underline{\dot{g}}_{\nu\theta}\|^2 + \pi^2 \cos^2 \varphi_{\nu} \sum g_{\nu i}^2 R_i^2(\theta_{\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sum^2 \dot{g}_{\nu i\theta} g_{\nu i} + \pi^2 \cos^2 \varphi_{\nu} \sum^2 |g_{\nu i}|^2 R_i(\theta_{\nu})}{\|\underline{g}_{\nu}\|^2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

در حالت‌های عملی‌تر که تمامی عناصر آرایه هم‌شکل (غیرایزوتروپیک) هستند، نتایج فوق چنین تغییر می‌یابند:

$$CRB_{det}(\varphi_{\nu}) = \frac{\sigma^2}{2LP_{\nu} |g_{\nu}|^2 \pi^2 \sin^2 \varphi_{\nu}} \left[\|\underline{\dot{R}}(\theta_{\nu})\|^2 - \frac{1}{N} \sum^2 R_i(\theta_{\nu}) \right]^{-1} \quad (12)$$

$$CRB_{det}(\theta_{\nu}) = \frac{\sigma^2}{2LP_{\nu} |g_{\nu}|^2 \pi^2 \cos^2 \varphi_{\nu}} \left[\|\underline{\dot{R}}(\theta_{\nu})\|^2 - \frac{1}{N} \sum^2 R_i(\theta_{\nu}) \right]^{-1}$$

همچنین برای آرایه‌یی که عناصر ایزوتروپیک را شامل می‌شود، می‌توان در فرمول‌های فوق $|g_{\nu}|^2$ را معادل ۱ قرار داد. در اینجا اگر فرض کنیم که آرایه متقارن طراحی شده یا به عبارت دیگر $\sum R_i(\theta) = \sum \dot{R}_i(\theta) = 0$ آنگاه نتایج حاصله با نتایج به دست آمده توسط آقای مانی‌کاس^[۱۱] یکسان خواهند شد.

$$\begin{aligned} CRB_{det}(\varphi_{\nu}) &= \frac{\sigma^2}{2LP_{\nu} \pi^2 \sin^2 \varphi_{\nu}} \frac{1}{\sum_{R_i(\theta)=0} \|\underline{\dot{R}}(\theta_{\nu})\|^2} \quad (13) \\ CRB_{det}(\theta_{\nu}) &= \frac{\sigma^2}{2LP_{\nu} \pi^2 \cos^2 \varphi_{\nu}} \frac{1}{\sum_{R_i(\theta)=0} \|\underline{\dot{R}}(\theta_{\nu})\|^2} \end{aligned}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود که آرایه‌های متقارن دارای کمترین حد خطا در آشکارسازی هستند، در حالی که مقدار خود خطا (همان عبارت CRB) بستگی معکوس به نرم دهانه‌ی آرایه دارد. به عبارت دیگر با افزایش دهانه‌ی آرایه می‌توان خطای کمتری را به دست آورد و در نتیجه آشکارسازی بهتری داشت؛ این بدان معناست که اثر نویز موجود در روی حسگرها را می‌توان با انتخاب مناسب شکل آرایه محدود ساخت.

۲.۳. محاسبه CRB_{res}

با توجه به رابطه‌ی ۲ محاسبه CRB_{res} از چند جزء — که هر کدام پیچیدگی خود را دارند — تشکیل شده است. لذا برای سادگی ابتدا از رابطه‌ی ۳ شروع می‌کنیم. در این حالت $\rho = 0$ است و فرض شده است که دو سیگنال کاملاً از یکدیگر مستقل اند. بنابراین باید ابتدا عبارت $\underline{\dot{a}}_{\nu g}^H P_{A_g} \underline{\dot{a}}_{\nu g}$ را محاسبه کنیم. از آنجا که فرض شده است که محاسبه فقط بر روی دو سیگنال از محیط انجام می‌گیرد لذا $A_g = [\underline{a}_{\nu g} \underline{a}_{\nu g}]$ خواهد بود، و بنابراین داریم:^[۱۱]

$$\begin{aligned} \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H P_{A_g} \underline{\dot{a}}_{\nu g} &= \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H [P_{\underline{a}_{\nu g}} - P_{\underline{a}_{\nu g}} \underline{a}_{\nu g} (\underline{a}_{\nu g}^H P_{\underline{a}_{\nu g}} \underline{a}_{\nu g})^{-1} \underline{a}_{\nu g}^H] \underline{\dot{a}}_{\nu g} \\ \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H P_{\underline{a}_{\nu g}} \underline{\dot{a}}_{\nu g} &= \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H P_{\underline{a}_{\nu g}} \underline{\dot{a}}_{\nu g} - \underline{\dot{a}}_{\nu g}^H P_{\underline{a}_{\nu g}} \underline{a}_{\nu g} (\underline{a}_{\nu g}^H P_{\underline{a}_{\nu g}} \underline{a}_{\nu g})^{-1} \underline{a}_{\nu g}^H P_{\underline{a}_{\nu g}} \underline{\dot{a}}_{\nu g} \end{aligned}$$

$$CRB_{res}(\theta_1) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{LP_1} |g_1|^2 \pi^2 \cos^2 \varphi_1} \left\{ \left\| \underline{R}^*(\theta_1) \right\|^2 - \frac{\sum^2 \dot{R}_i(\theta_1)}{N} - \frac{\left| \sum R_i(\theta_1) \dot{R}_i(\theta_1) - \frac{\sum R_i(\theta_1) \sum \dot{R}_i(\theta_1)}{N} \right|^2}{\sum^2 R_i(\theta_1)} \right\}^{-1}$$

نتایج این عملیات برای حالتی که

$$\Delta s_i = \pi \cos \varphi_1 [R_i(\theta_2) - R_i(\theta_1)] = \pi \cos \varphi_1 \Delta R_i(\theta)$$

باشد به شکل رابطه‌ی ۱۷ خواهد بود که در این حالت

$$CRB_{res}(\varphi) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{LP_1} |g_1|^2 \pi^2 \sin^2 \varphi_1}$$

$$\left\{ \left\| \underline{R}(\theta_1) \right\|^2 - \frac{\sum^2 R_i(\theta_1)}{N} + \frac{\left| \frac{\sum R_i(\theta_1) \sum \Delta R_i(\theta)}{N} \right|^2}{\sum^2 \Delta R_i(\theta)} - \frac{\left| \sum R_i(\theta_1) \sum R_i(\theta_2) - \left\| \underline{R}(\theta_1) \right\|^2 \right|^2}{\sum^2 \Delta R_i(\theta)} \right\}^{-1} \theta_1 \neq \theta_2, \varphi_1 = \varphi_2 \quad (17)$$

$$CRB_{res}(\theta) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{LP_1} |g_1|^2 \pi^2 \cos^2 \varphi_1}$$

$$\left\{ \left\| \underline{R}(\theta_1) \right\|^2 - \frac{\sum^2 \dot{R}_i(\theta_1)}{N} - \frac{\left| \sum \Delta R_i(\theta) \dot{R}_i(\theta_1) - \frac{\sum \Delta R_i(\theta) \sum \dot{R}_i(\theta_1)}{N} \right|^2}{\sum^2 \Delta R_i(\theta)} \right\}^{-1}$$

در اینجا قبل از آن که نتایج به دست آمده را روی آرایه‌های مختلف بررسی کنیم به مطالبی در زمینه‌ی آرایه‌های متقارن اشاره می‌کنیم. چنانکه از رابطه‌های ۱۶ و ۱۷ کاملاً مشخص است، برای آرایه‌های متقارن عبارت CRB_{res} صفر خواهد شد که این هدفی کاملاً ایده‌آل است. به عبارت دیگر شکل آرایه توانسته است بدون در نظر گرفتن پارامترهایی نظیر نمونه‌های دریافتی یا مقدار نویز (SNR) محدوده‌ی خطا را به حداقل برساند. اما این مقدار (مقدار صفر برای CRB_{res}) از کجا آمده است و آیا این نتیجه یک نتیجه واقعی است؟ جالب است بدانیم که این خطا از بسط درجه اول تابع نمایی حاصل شده است، لذا برای آرایه‌های متقارن فرمول‌های CRB_{res} متفاوت خواهند بود. پس برای محاسبه‌ی فرمول‌های جدید و داشتن دقت بالاتر، از بسط

قسمت اول عبارت فوق، یعنی $\underline{a}_{1g}^H P_{a1g}^\perp \underline{a}_{1g}$ قبلاً محاسبه شده است. با محاسبه‌ی دو عبارت $\underline{a}_{2g}^H P_{a2g}^\perp \underline{a}_{2g}$ و $\underline{a}_{1g}^H P_{a1g}^\perp \underline{a}_{1g}$ خواهیم داشت:

$$\underline{a}_{1g}^H P_{A1g}^\perp \underline{a}_{1g} = \left[\left\| \underline{G} \right\|^2 - \frac{\left| \sum \dot{G}_{1i} g_{1i} \right|^2}{\left\| \underline{g}_1 \right\|^2} - I \right] \quad (14)$$

که در آن

$$I = \frac{\left| \underline{a}_{2g}^H P_{a2g}^\perp \underline{a}_{2g} \right|^2}{\underline{a}_{2g}^H P_{a2g}^\perp \underline{a}_{2g}} = \frac{\left| \sum \dot{G}_{1i} g_{1i}^H \exp(j \Delta s_i) - \frac{\sum g_{1i} g_{1i}^H \exp(j \Delta s_i) \sum \dot{G}_{1i} g_{1i}^H}{\left\| \underline{g}_1 \right\|^2} \right|^2}{\left\| \underline{g}_2 \right\|^2 - \frac{\left| \sum g_{2i}^H g_{2i} \exp(j \Delta s_i) \right|^2}{\left\| \underline{g}_1 \right\|^2}}$$

عبارت $\Delta s_i = \pi (R_i(\theta_2) \cos \varphi_2 - R_i(\theta_1) \cos \varphi_1)$ را که بیانگر فاصله‌ی دو منبع از یکدیگر است، «عبارت جداسازی» دو منبع می‌نامیم. از آنجا که عبارت اول در رابطه‌ی ۱۴ قبلاً به دست آمده است به دنبال محاسبه‌ی عبارت I خواهیم بود. در صورت برداری نبودن بهره و با استفاده از تقریب درجه‌ی اول تابع نمایی $\exp(j \Delta s_i) \cong 1 + j \Delta s_i$ می‌توان به فرمول‌هایی ساده شده رسید.

در اینجا با در نظر گرفتن $\theta_1 = \theta_2$ و $\varphi_1 \neq \varphi_2$ یا $\Delta s_i = \pi R_i(\theta_1) [\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1]$ خواهیم داشت:

$$I(\varphi_1) = -\pi^2 \sin^2 \varphi_1 g_1^2 \left| \frac{\sum^2 R_i(\theta_1) - \left\| \underline{R}(\theta_1) \right\|^2}{\sum^2 R_i(\theta_1)} \right|^2 \quad (15)$$

$$I(\theta_1) = -\pi^2 \cos^2 \varphi_1 g_1^2$$

$$\left| \frac{\sum R_i(\theta_1) \dot{R}_i(\theta_1) - \frac{\sum R_i(\theta_1) \sum \dot{R}_i(\theta_1)}{N}}{\sum^2 R_i(\theta)} \right|^2$$

این عملیات به منظور محاسبه‌ی $I(\theta_1)$ انجام پذیرفته است و نتیجه‌ی محاسبات فوق محاسبه‌ی عبارت CRB_{res} خواهد بود.

$$CRB_{res}(\varphi_1) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{LP_1} |g_1|^2 \pi^2 \sin^2 \varphi_1}$$

$$\left[\left\{ \left\| \underline{R}(\theta_1) \right\|^2 - \frac{\sum^2 R_i(\theta_1)}{N} \right\} \frac{\left\| \underline{R}_i(\theta_1) \right\|^2}{\sum^2 R_i(\theta_1)} \right]^{-1} \quad (16)$$

$$\theta_1 = \theta_2, \varphi_1 \neq \varphi_2$$

۴. دسته‌بندی آرایه‌ها از لحاظ شکل هندسی

آرایه‌ها را عموماً به دو دسته خطی و صفحه‌ای تقسیم‌بندی می‌کنند. اما منظور از دسته‌بندی شکل آرایه‌ها در اینجا مجموعه‌ی خواصی است که هم در آرایه‌های خطی و هم در آرایه‌های صفحه‌ای ممکن است وجود داشته باشند. به‌طور کلی یک آرایه (برای داشتن تمام اشکال آرایه‌ها، آرایه‌ی صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم) توسط بردارهای $\underline{r}_x \in R^{N \times 1}$ و $\underline{r}_y \in R^{N \times 1}$ قابل تعریف است. آنچه که در بیشتر مقالات دیده می‌شود انتخاب مبدأ فازی در مرکز آرایه است. از طرف دیگر مقایسه‌ی روابط فوق با رابطه‌های به دست آمده توسط محققین^[۹] دقت نتایج به‌دست آمده را بخوبی نشان می‌دهد. تعریف ۱: آرایه‌ی متقارن^۱ آرایه‌ی که هر عنصر آن همتایی متقارن نسبت به مرجع فازی آرایه داشته باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\sum_i r_{xi} = \sum_i r_{yi} = 0 \quad \forall_i = \text{فرد}$$

اگر تقارن فقط در جهت x دیده شود آنگاه $\sum_i r_{xi} = 0$ و مشابهاً تقارن روی محور y به معنای $\sum_i r_{yi} = 0$ است.

تعریف ۲: آرایه متعامد^{۱۱} به آرایه‌ی گفته می‌شود که بردارهای r_x و r_y آن متعامد باشند؛ به عبارت دیگر:

$$\underline{r}_x^T \cdot \underline{r}_y = 0 \quad (20)$$

به راحتی می‌توان اثبات کرد که تقارن آرایه برحسب هر دو محور x و y (و یا یکی از آنها) شرط کافی و نه لازم برای تعامد r_x و r_y است. چنین آرایه‌ی دارای بردارهای \underline{r}_x و \underline{r}_y متعامد با دامنه‌های یکسان است یعنی:

$$\underline{r}_x^T \cdot \underline{r}_y = 0, \|\underline{r}_x\| = \|\underline{r}_y\| \quad (21)$$

تساوی نرم‌ها به این معنی است که عناصر در روی محورهای x و y به یک شکل توزیع شده‌اند. بسیاری از ساختارهای آرایه‌های عملی نظیر آرایه‌ی دایره‌ای یکنواخت، آرایه‌ی X شکل، آرایه‌ی Y شکل، آرایه‌ی مربعی و غیره، دارای این خاصیت هستند.

۱.۴. شبیه‌سازی

در این نوشتار و نیز در تحلیل‌های مختلف، با استفاده از مجموعه‌ی آرایه‌ها که نتایج محاسبات آنها در برخی از مقالات دیده می‌شود امکان مقایسه نسبت به نتایج قبلی فراهم شده است. این آرایه‌ها عبارت‌اند از:

۱. یک آرایه‌ی دایره‌ای یکنواخت ۲۴ عنصری؛

۲. آرایه‌ی شامل ۸ حسگر با شکل‌های دوحلزونی^{۱۲}.

درجه دوم تابع نمایی یعنی $\exp(j\Delta s_i) \cong 1 + j\Delta s_i - \frac{(j\Delta s_i)^2}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$CRB_{res}(\varphi_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{R_i(\theta)=0} \sqrt{LP_1} \pi^2 \sin^2 \varphi_1 |g_1|^2 \|\underline{R}(\theta_1)\|^2} \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{N \left[1 - \frac{\pi^2}{\varphi_1^2} \Delta^2 \cos \varphi \|\underline{R}(\theta_1)\|^2 \right]} \right]} \quad (18)$$

$\theta_1 = \theta_2, \varphi_1 \neq \varphi_2$

$$CRB_{res}(\theta_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{\dot{R}(\theta)=0} \sqrt{LP_1} \pi^2 \cos^2 \varphi_1 |g_1|^2 \|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\|^2} \frac{1}{\left[1 - \frac{\cos^2 \varphi_1 \left[\sum_i R_i^*(\theta_1) R_i(\theta_1) \right]}{N \|\underline{R}(\theta_1)\|^2 \|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\|^2 \left[1 - \frac{\pi^2}{\varphi_1^2} \Delta^2 \cos \varphi \|\underline{R}(\theta_1)\|^2 \right]} + \frac{\pi^2}{\varphi_1^2} \Delta^2 \cos \varphi \sum_i R_i^*(\theta_1) R_i^*(\theta_1) \right]} \right]} \quad (19)$$

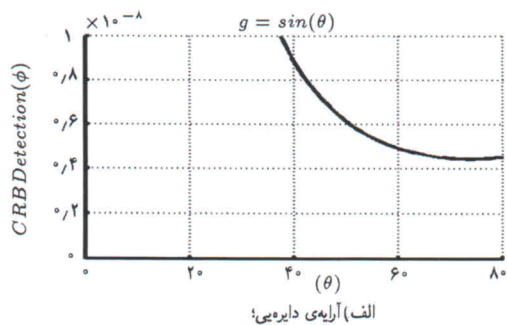
و برای حالتی که $\theta_1 \neq \theta_2, \varphi_1 = \varphi_2$ باشند

$$CRB_{res}(\varphi_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{R_i(\theta)=0} \sqrt{LP_1} \pi^2 \sin^2 \varphi_1 |g_1|^2} \frac{1}{\left[\|\underline{R}(\theta_1)\|^2 - \frac{\|\Delta R(\theta)\|^2}{N \left[1 - \frac{\pi^2}{\varphi_1^2} \cos^2 \varphi \|\Delta R(\theta)\|^2 \right]} \right]} \quad (19)$$

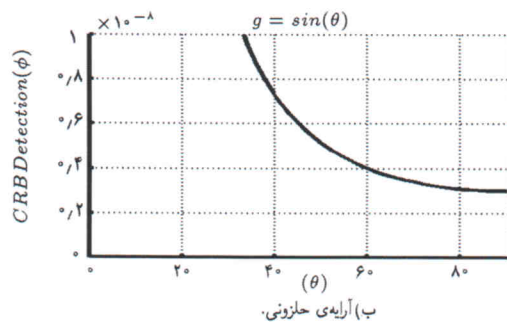
$\theta_1 \neq \theta_2, \varphi_1 = \varphi_2$

$$CRB_{res}(\theta) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{LP_1} \pi^2 \cos^2 \varphi_1 |g_1|^2 \|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\|^2} \frac{1}{\left[1 - \frac{\cos^2 \varphi_1 \left[\sum_i \dot{R}_i(\theta_1) \Delta R_i(\theta) \right]}{N \|\Delta R(\theta)\|^2 \|\dot{\underline{R}}(\theta)\|^2 \left[1 - \frac{\pi^2}{\varphi_1^2} \cos^2 \varphi \|\Delta R(\theta)\|^2 \right]} + \frac{\pi^2}{\varphi_1^2} \cos^2 \varphi_1 \sum_i \dot{R}_i(\theta_1) \Delta^2 R_i(\theta_1) \right]} \right]} \quad (19)$$

جالب توجه است که عبارت‌های به‌دست آمده در حالتی هستند که ضریب همبستگی بین دو منبع را صفر فرض کرده‌ایم. مسلماً در حالتی که این ضریب صفر نباشد، محاسبات به شدت پیچیده‌تر خواهند شد.



الف) آرایه‌ی دایره‌یی؛



ب) آرایه‌ی حلزونی.

شکل ۴. منحنی‌های CRB_{det} بر حسب θ به ازای $\Delta\theta = 1^\circ$ ، $\Delta\varphi = 1^\circ$ و $L = 100$ ، $\varphi = \pi/6$ ، $SNR = 10$.

۴.۲. نتایج معادلات به دست آمده در شرایط ویژه برای بررسی بیشتر، بعضی از نکات قابل استخراج از CRB_{det} ، CRB_{res} را در اینجا یادآور می‌شویم. برای تمامی آرایه‌های صفحه‌یی می‌توان گفت:

$$CRB_{det}(\theta) \propto \frac{1}{\cos^2 \varphi} \quad (22)$$

$$CRB_{det}(\theta) \propto \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

این بدان معناست که دقت تخمین $CRB_{det}(\theta)$ در حوالی $0^\circ \rightarrow \varphi$ و $CRB_{det}(\varphi)$ در حوالی $90^\circ \rightarrow \varphi$ بیشینه می‌شود. از طرفی این تغییرات نسبت به φ کاملاً مستقل از شکل هندسی آرایه است. همچنین با توجه به اینکه

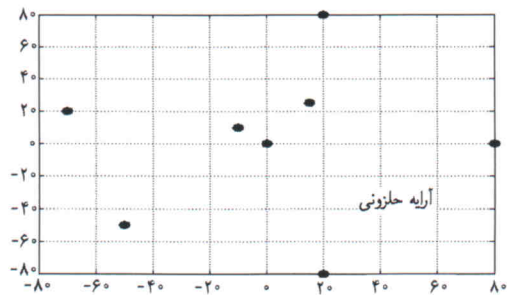
$$\dot{\underline{R}}(\theta) = \underline{R}\left(\theta + \frac{\pi}{\varphi}\right)$$

می‌توان نتیجه گرفت که

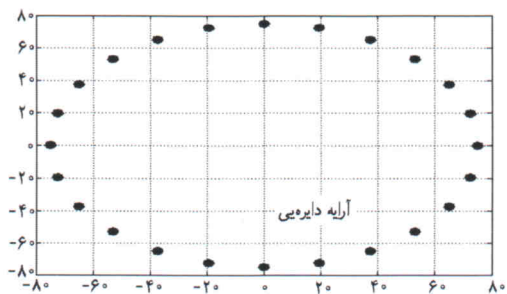
$$CRB_{det}(\theta) |_{\theta_0, \varphi_0} = CRB_{det}(\varphi) |_{\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{\varphi}} \quad (23)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{\varphi} - \varphi_0$$

به عبارت دیگر، حد کرامر - راو در تخمین زاویه‌ی سمت منبعی که در (θ_0, φ_0) قرار گرفته است معادل با حد کرامر - راو در تخمین زاویه‌ی رأس منبع مشابه در زاویه‌ی $(\theta_0 + \frac{\pi}{\varphi}, \frac{\pi}{\varphi} / \varphi_0)$ است. اما تغییرات $CRB_{det}(\varphi)$ ، $CRB_{det}(\theta)$ بر حسب زاویه‌ی سمت (θ) ، هر دو تابعی از شکل هندسی آرایه‌اند.

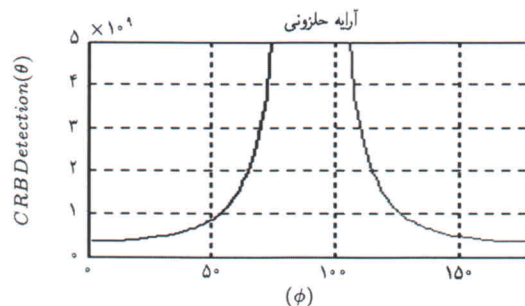


آرایه حلزونی

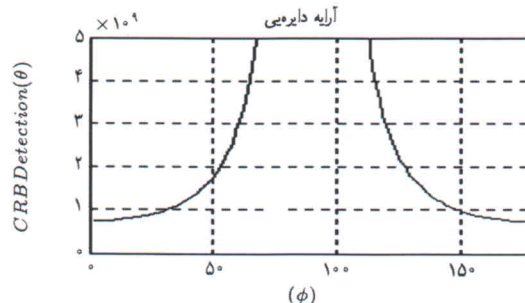


آرایه دایره‌یی

شکل ۲. شکل هندسی آرایه‌های دایره‌یی و حلزونی.



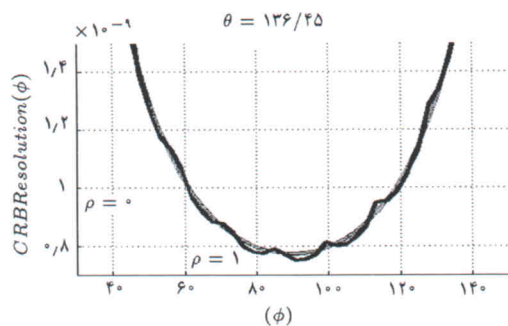
φ)



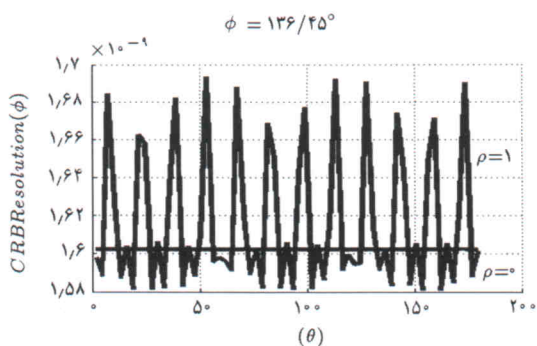
φ)

شکل ۳. منحنی‌های CRB_{det} بر حسب φ به ازای $\Delta\theta = 1^\circ$ ، $\Delta\varphi = 1^\circ$ و $L = 100$ ، $g = 1$ ، $\varphi = \pi/6$ ، $\theta = \pi/3$ ، $SNR = 10$.

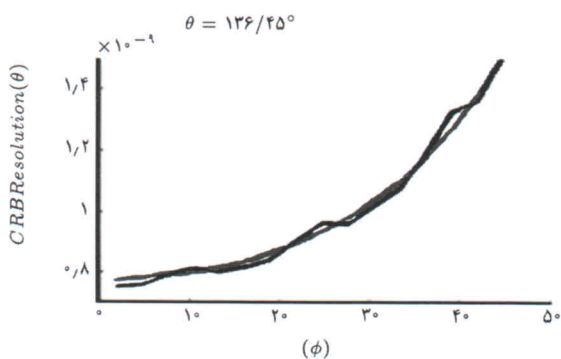
فرکانس عملی برای تمامی آرایه‌های فوق $15MHz$ است. شکل هندسی این آرایه‌ها در شکل ۲ ارائه شده است. در شکل ۳ حد کرامر - راو را در حالت آشکارسازی برای مقداری از آرایه‌های فوق در حالتی که عناصر ایزوتروپیک‌اند و همچنین به صورت مونوپل شکل ۴، یعنی $g(\theta, \varphi) = \text{Sin}\theta$ و $g(\theta, \varphi) = \text{Cos}\theta$ آورده‌ایم. توضیحات بیشتر در شکل‌ها آمده است.



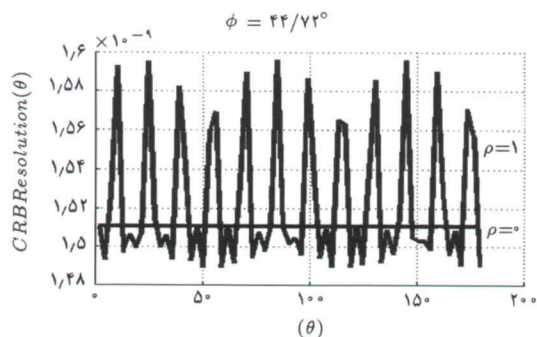
شکل ۵. $CRB_{res}(\varphi)$ برحسب φ به ازای $SNR = 10\text{ db}$, $L = 100$, $\rho = 1/0$.



شکل ۶. $CRB_{res}(\theta)$ برحسب θ به ازای $SNR = 10$, $L = 100$, $\rho = 0$.



شکل ۷. $CRB_{res}(\theta)$ برحسب φ به ازای $SNR = 10$, $L = 100$, $\rho = 0$, $\Delta\varphi = 1^\circ$.



شکل ۸. $CRB_{res}(\theta)$ برحسب θ به ازای $SNR = 10$, $L = 100$, $\rho = 0$.

از طرف دیگر خاصیت آرایه‌های متقارن و متعامد که در آنها تابعی از θ نیستند) باعث می‌شود که

$$CRB_{det}(\theta_1) = \frac{\sigma^2}{2LP_1 |g_1|^2} \frac{1}{\pi^2 \cos^2 \varphi_1} \frac{1}{\|rx\|^2}$$

$$CRB_{det}(\varphi_1) = \frac{\sigma^2}{2LP_1 |g_1|^2} \frac{1}{\pi^2 \sin^2 \varphi_1} \frac{1}{\|rx\|^2} \quad (24)$$

این فرمول توسط آقای مانیکاس به دست آمده است. [۱۴] به عبارت دیگر $CRB_{det}(\theta)$, $CRB_{det}(\varphi)$ هر دو مستقل از θ هستند. از طرفی عبارت فوق نشان می‌دهد که این دقت بستگی به دهانه‌ی آرایه دارد و نحوه‌ی توزیع عناصر روی صفحه یا محورها تأثیر چندانی در رفتار آن ندارند. راجع به CRB_{res} نیز می‌توان نکات مشابهی را استخراج کرد. اولین نتیجه‌ی قابل استخراج عبارت است از:

$$CRB_{res}(\theta) \text{ یا } CRB_{res}(\varphi) \propto \frac{1}{\Delta s^2} \quad (25)$$

این بدان معناست که دقت سیستم در جداسازی دو منبع به شدت با نزدیک شدن منابع به یکدیگر کاهش می‌یابد. همچنین تغییرات $CRB_{det}(\theta)$, $CRB_{det}(\varphi)$ برحسب φ مستقل از شکل آرایه‌اند.

در اینجا پیرامون آرایه‌های خطی که می‌توان آنها را حالت خاصی از آرایه‌های صفحه‌یی فرض کرد، مطالبی می‌آوریم. اگر فرض کنیم فقط عناصر روی محور x توزیع شده باشد آنگاه $R(\theta) = rx \cos \theta + ry \sin \theta = rx \cos \theta$ خواهد شد، لذا

$$CRB_{det}(\varphi_1) = \frac{\sigma^2}{2LP_1 |g_1|^2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \varphi_1} \left[\|rx\|^2 - \sum_i rx_i \right]^{-1}$$

$$CRB_{det}(\theta_1) = \frac{\sigma^2}{2LP_1 |g_1|^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \varphi_1} \left[\|rx\|^2 - \sum_i rx_i \right]^{-1} \quad (26)$$

اگر عناصر به‌طور یکسان توزیع شده باشند و فاصله‌ی بین آنها را با d نشان دهیم یعنی $rx_i = d \cdot i$ آنگاه:

$$CRB_{det}(\theta_1) = \frac{\sigma^2}{2LP_1 |g_1|^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \varphi_1 d^2} \left[\frac{6}{N(N+1)(3N^2 - N - 2)} \right]$$

$$CRB_{det}(\varphi_1) = \frac{\sigma^2}{2LP_1 |g_1|^2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \varphi_1 d^2} \left[\frac{6}{N(N+1)(3N^2 - N - 2)} \right] \quad (27)$$

نتیجه‌گیری

در این نوشتار، نشان داده شد که چگونه مکان حسگرها در خطای آشکارسازی و جداسازی منابع — هم‌بسته یا غیرهم‌بسته — مؤثر است. با بسط فرمول‌های نظری به روشی کاملاً مستقیم به روابط لازم دست یافتیم. حالت‌های خاص اشکال هندسی آرایه نیز تحلیل شد و نشان داده شد که به‌طور کلی آرایه‌های متقارن می‌توانند نقش همبستگی منابع را کاهش دهند یا از بین ببرند که این خود نتیجه‌ی بسیار مهم در طراحی آرایه‌های با دقت تفکیک‌پذیری فوق‌العاده است.

معمولاً در طراحی هر آرایه، آستانه‌ی را برای آشکارسازی یعنی حدی را برای مقادیر CRB_{det} در دو حالت بالا ارائه می‌کنند و شکل آرایه را می‌خواهند. فرمول‌های بالا نشان می‌دهد که اگر نوع آرایه خطی یکنواخت باشد قادر به آوردن هر مقدار دلخواهی از CRB_{det} در هر دو حالت نیست؛ به عبارت دیگر همواره شرط $\cot^2 \theta \tan^2 \varphi_1 = \frac{CRB_{det}(\theta)}{CRB_{det}(\varphi)}$ باید رعایت شود. در محاسبه‌ی CRB_{res} بهتر است از همان عبارات قبلی استفاده شود چرا که با ساده‌سازی به شکل بالا نتیجه‌ی مهمی ارائه نمی‌شود. شکل‌های ۵ تا ۸ بعضی از نتایج محاسبات را برای آرایه‌ی دایره‌ی نشان می‌دهد.

پانویس

1. direction-finding (DF)
2. array processing
3. detection
4. resolution
5. source localization
6. super-resolution
7. beam former
8. hang
9. array manifold
10. symmetric
11. orthogonal
12. dual-spiral

منابع

1. West, J.M. & Antonio, J.K. "A genetic algorithm approach to scheduling communications for a class of parallel space-time adaptive processing algorithms", School of Computer Science University of Oklahoma, {West Antonio}@ou.edu
2. Leahy, R.M. & Jeffs, D.B. "On the design of maximally sparse beamforming arrays", *IEEE Trans. Antennas Propagate*, **39**, pp. 1178-1187 (Aug 1991).
3. Huang, X. Reilly, J.P. & Wong, M. "Optimal design of linear array of sensors", *In Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, pp. 1405-1408 (May 1991).
4. LO, Y.T. "A mathematical theory of antenna arrays with randomly spaced elements", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **12**, pp. 257-268 (1994).
5. Nemhauser, G. Skolnik, M.L. & Sherman, J.W. "Dynamic programming applied to unequally spaced arrays", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **12**, pp. 35-43 (1964).
6. Haupt, R.L. "Thinned arrays using genetic algorithms", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **42**, pp. 993-999 (July 1994).
7. Murino, V. "Simulated annealing approach for the design of unequally spaced arrays", *In Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, pp. 3627-3630 (May 1995).
8. Ruf, C.S. "Numerical annealing of lowredundancy linear arrays", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **41**, pp. 85-90 (Jan 1993).
9. Karimi, H.R. & Manikas, A. "The manifold of a planar array and its effects on the accuracy of direction-finding systems", *IEEE. Proc. Radar, Sonar & Navig.*, **1439**(6), pp.349-337, (Dec 1996).
10. Manikas, A. & Karimi, H.R. & Dacos, I. "Study of the detection and resolution capabilities of a one dimensional array of sensors by using differential geometry", *IEEE. Proc. Radar Navig.*, **141**(2) (April 1994).
11. Dowlut, N.H. & Manikas, A. "Array design for super-resolution direction-finding algorithms", *International Symp. On DSP, ISDSP-96, London*, pp. 38-43.
12. Gershman, A.B. & Bohme, J.F. "A note on most favorable array geometries for doa estimation and array interpolation", *IEEE, Signal proc. LETTER*, **4**(8), pp. 232-235 (August 1997).
13. Dowlut, N. & Manikas, A. "A polynomial rooting approach to super-resolution array design", *IEEE. Trans on Signal Processing*, **48**(6) (June 2000).

