مهندسی صنایع و مدیریت شریف
دوره‌ی ۱ - ۲۷، شماره‌ی ۱، ص. ۱۰۳-۱۱۱

بهینه‌سازی توأمانِ فواصل بازرسی و حد کنترل در نگه‌داری و تعمیر مبتنی بر شرایط

حمیدرضا گل‌مکانی (استادیار)
فهیمه فتاحی‌پور (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه تفرش

در استراتژی نگه‌داری و تعمیر مبتنی بر شرایط دستگاه (CBM)[1]، هدف این است که با انجام بازرسی‌های دوره‌یی و کنترل شرایط دستگاه به عمر واقعی تعویض نزدیک شود. تحقیقات متعددی درخصوص لحاظ تبعاتِ اقتصادی تصمیمات در استراتژی CBM صورت گرفته است. از جمله این تحقیقات، روش حد کنترل است که در آن نرخِ توأم نرخِ خرابی دستگاه[2] و تأثیر مقادیر متغیرهای کنترل شرایط[3]، با استفاده از مدل تلفیقی نرخِ خرابی PHM [4]، و با توجه به سوابق اطلاعاتی دستگاه، تخمین زده می‌شود. سپس، با لحاظ هزینه‌های تعویض، بهترین حد کنترل به‌گونه‌یی که متوسط هزینه‌های مذکور در یک دوره‌ی طولانی کمینه شود، تعیین می‌شود. در مدل ارائه شده در نوشتار حاضر، علاوه بر لحاظ هزینه‌های تعویض در تعیین حد کنترل بهینه، هزینه انجام بازرسی‌ها نیز در نظر گرفته شده است تا بتوان بهترین فواصل بازرسی را به‌گونه‌یی تعیین کرد که متوسط مجموع هزینه‌های تعویض و بازرسی کمینه شود.

واژگان کلیدی: نگه‌داری و تعمیرات براساس شرایط، مدل تلفیقی نرخ خرابی، هزینه‌های بازرسی، بهترین فاصله‌ی زمانی بین بازرسی‌ها، ماتریس احتمال انتقال وضعیت.

golmakni@mie.utoronto.ca
fattahipour@gmail.com

۱. مقدمه

نگه‌داری و تعمیر مبتنی بر شرایط دستگاه (CBM) برنامه‌یی ویژه‌ی برای نگه‌داری و تعمیرات است که تصمیم‌گیری در آن براساس اطلاعات به دست آمده از سنجش وضعیت دستگاه صورت می‌گیرد. هدف CBM جلوگیری از فعالیت‌های نگه‌داری و تعمیرات غیرضروری است. در این استراتژی، تنها درصورت وجود شواهدِ نشان‌گرِ رفتارِ غیرعادیِ دستگاه در اطلاعات حاصل از سنجش وضعیت، اجرای فعالیت‌های نگه‌داری و تعمیرات پیشنهاد می‌شود. بنابراین درصورت طراحی و اجرای مناسب برنامه‌ی CBM، هزینه‌های نگه‌داری و تعمیرات به‌میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد.[۱] قابلیت اطمینان سیستم نیز با اجرای CBM، در مقایسه با اجرای سایر روش‌های نگه‌داری و تعمیرات پیشگیرانه، بیشتر خواهد بود.[۲و۳]

بازرسی و سنجش وضعیت، برحسب نوع و عملکرد دستگاه، ممکن است پیوسته یا دوره‌یی باشد. در «سنجش وضعیت پیوسته»، دستگاه معمولاً توسط حس‌گرهای نصب‌شده روی آن تحت نظارت پیوسته قرار دارد. سیگنال‌های ارسالی از دستگاه، به‌علت پارازیت‌های ناشی از این نوع سنجش، ممکن است اطلاعات تشخیصی غلطی ارائه دهند. وجود این عیب در سنجش وضعیت پیوسته، به‌همراه هزینه‌های بالای اجرای آن، در بسیاری موارد منجر به طراحی و اجرای سنجشِ وضعیت دوره‌یی می‌شود. واضح است که «سنجش وضعیت دوره‌یی» با ریسک از دست‌دادن علائم و هشدارهای مربوط به خرابی‌هایی که ممکن است در فواصل بین بازرسی‌های متوالی رخ دهند، همراه خواهد بود.[۴]

چالش اساسی در CBM توأم با سنجش وضعیت دوره‌یی، تعیین حد کنترل برای تعویض پیشگیرانه و تعیین بهترین فاصله‌ی بین بازرسی‌های متوالی است. دیدگاه‌های مختلفی به‌منظور بهینه‌سازی زمان اجرای بازرسی‌ها مطرح شده است،[۵-۸] در این تحقیقات فرض بر آن است که دستگاه بعد از تعداد متناهی مرحله (وضعیت) دچار خرابی می‌شود و حد کنترل برای تعویض پیشگیرانه، مشاهده‌ی نزدیک‌ترین وضعیت به وضعیت خرابی است. با این فرض که حد کنترل برای تعویض پیشگیرانه یکی از وضعیت‌های دستگاه است، مدل‌هایی به‌منظور بهینه‌سازی توأمانِ حد کنترل و زمان اجرای بازرسی‌ها ارائه شده است.[۹-۱۳]

با درنظرگرفتن هزینه‌های تعویض پیشگیرانه و هزینه‌های تعویض به‌دلیل وقوع خرابی، مدلی ارائه شده که طی آن، حد کنترل برای تعویض پیشگیرانه، علاوه بر وضعیت دستگاه، به مقدار هزینه‌های مذکور نیز وابسته است.[۱۴-۱۹] در این مدل با استفاده از سوابق اطلاعاتی حاصل از بازرسی‌ها و نتایج آنها و نیز وقوع خرابی‌ها، با معیار کمینه‌سازی متوسط مجموعِ هزینه‌های تعویضِ پیشگیرانه و هزینه‌های تعویض به‌دلیل وقوع خرابی در بلندمدت، حد کنترل بهینه برای دستگاه محاسبه می‌شود. یکی

تاریخ: دریافت ۱۳۸۸/۸/۱۶، اصلاحیه ۱۳۸۹/۳/۱۸، پذیرش ۱۳۸۹/۸/۵.

از مفروضات اصلی این مدل ناچیزبودنِ هزینه‌ی انجام بازرسی در مقابل هزینه‌ی تعویض پیشگیرانه و هزینه‌ی‌تعویض به‌دلیل وقوع خرابی است و برهمین اساس، هزینه‌ی بازرسی در محاسبات منظور نشده است.

واضح است که در شرایطی که انجام بازرسی مستلزم صرف هزینه است، کاهش تعداد بازرسی‌ها از یک‌سو موجب کاهش هزینه‌ها خواهد بود و از سویی دیگر این خطر را افزایش می‌دهد که به‌دلیل عدم اطلاع از وضعیت دستگاه، اقدامات پیشگیری به‌موقع صورت نگیرد و درنتیجه تعداد خرابی‌ها و هزینه‌های ناشی از آنها افزایش یابد. به‌عبارت دیگر، به نظر می‌رسد در تعیین حد کنترل برای تعویض پیشگیرانه و تعیین بهترین فاصله‌ی بین بازرسی‌های متوالی، ملحوظ داشتن هزینه‌ی بازرسی نیز علاوه بر وضعیت دستگاه، هزینه‌ی تعویض پیشگیرانه و هزینه‌ی تعویض به‌دلیل وقوع خرابی بسیار ضروری است.

در این نوشتار به‌منظور بهینه‌سازی توأمان فواصل بین بازرسی‌های متوالی و حد کنترل مدلی ارائه شده است که از بسط مدل مطرح شده در سال‌های ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۶ به دست آمده است[۱۴-۱۹] و در آن، علاوه بر حد کنترل بهینه برای تعویض، فاصله‌ی زمانی بهینه بین بازرسی‌های متوالی نیز تعیین می‌شود.

در مدل پیشنهادی، ابتدا فاصله‌ی بین بازرسی‌های متوالی که سوابق اطلاعاتی دستگاه براساس آن جمع‌آوری و توزیع توأمان خرابی برمبنای آن تخمین زده شده است، به‌عنوان فاصله‌ی پایه در نظر گرفته می‌شود. سپس با استفاده از مفهوم احتمالات انتقال وضعیت شرطی، احتمال تعویض دستگاه به‌علت خرابی و نیز متوسط فاصله‌ی زمانی بین تعویض‌های متوالی، برای مجموعه فواصل ممکن بین بازرسی‌های متوالی تخمین زده می‌شود. با این فرض که فواصل ممکن بین بازرسی‌های متوالی مضاربی صحیح از فاصله‌ی پایه است، در مرحله‌ی بعد متوسط کل هزینه‌های تعویض (اعم از تعویض پیشگیرانه یا تعویض به‌دلیل وقوع خرابی) و متوسط کل هزینه‌های بازرسی، برای مجموعه فواصل ممکن بین بازرسی‌های متوالی محاسبه می‌شود. سپس با مقایسه‌ی مقادیر مختلفِ متوسطِ کل هزینه‌ها به‌ازاء مجموعه فواصل ممکن بین بازرسی‌های متوالی، بهترین فاصله‌ی بین بازرسی‌ها به‌همراه حد کنترل بهینه‌ی متناظر با آن انتخاب می‌شود. معیار بهینه‌سازی، کاهش متوسط مجموع هزینه‌ها در واحد زمان در بلندمدت است.

در ادامه و در بخش ۲، مبانی مدل‌سازی و روش حل مدلِ اولیه‌ی[۱۴-۱۹] CBM آورده شده است. در بخش ۳، مدل پیشنهادی به‌تفصیل شرح داده شده، و در بخش ۴ به‌منظور تشریح بیشتر، یک مثال عددی مطرح شده است. در بخش ۵ نتیجه‌گیری، و نهایتاً در بخش ۶، در قالب دو ضمیمه، اثبات بعضی از جزئیات مدل پیشنهادی بیان شده است.

۲. استراتژی حد کنترل در CBM

نگه‌داری و تعمیر مبتنی بر شرایط دستگاه (CBM) مبتنی بر این باور است که اغلب ماشین‌آلات و تجهیزات صنعتی، پس از رسیدن به یک مرحله‌ی مشخص، نشانه‌هایی برای پیش‌بینی وقوع خرابی از خود بروز می‌دهند. این نشانه‌ها را می‌توان از طریق متغیرهای تشخیص خرابی مانند میزان ارتعاشات، صدا، ذرات فرسایشی، دما و امثال آن تشخیص داد، وقوع خرابی را پیش‌بینی کرد و قبل از رسیدن به مراحل بحرانی، فعالیت پیشگیرانه (تعمیر و یا تعویض) را برنامه‌ریزی و اجرا کرد تا از وقوع خرابی جلوگیری به‌عمل آید.

در مدل پایه[۱۴-۱۹] که به‌منظور استفاده از اطلاعات سنجش وضعیت در تصمیم‌گیری برای زمان تعویض پیشگیرانه دستگاه، مطرح شده است، براساس سابقه‌ی اطلاعاتی موجود، حد کنترل برای تعویض پیشگیرانه با هدفِ کمینه‌سازی متوسط مجموع هزینه‌های تعویض پیشگیرانه و تعویض به‌دلیل خرابی در بلندمدت به‌دست آمده است. در این مدل، فرض بر این است که دستگاه مورد بحث دارای رفتار مارکوفی است و در طول بهره‌برداری می‌تواند دچار خرابی نرم، ناشی از افزایش عمر و کارکرد یا خرابی سخت، ناشی از شوک‌های مقطعی شود. همچنین در طول بهره‌برداری، هیچ فعالیت تعمیراتی در راستای بهبود وضعیت آن صورت نمی‌گیرد و درصورت وقوع خرابی، با یک دستگاه نو تعویض می‌شود.

زمان خرابی دستگاه را با T، و مقدار متغیر تشخیص خرابی اندازه‌گیری شده در زمان t را با $Z(t)$ نمایش می‌دهیم. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض می‌شود که مجموعه مقادیر ممکن برای متغیر تشخیص خرابی، شمارا و متناهی باشد. دستگاه در فواصل زمانی Δ_0 بازرسی می‌شود تا مقدار متغیر تشخیص خرابی اندازه‌گیری شود. بنابراین برای زمان‌های $t = k\Delta_0$ که در آن $k = 0, 1, 2, \ldots$، مقادیر $Z(t)$ مشخص است. فرض کنید $S = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ مجموعه مقادیر ممکن برای متغیر تشخیص خرابی در هر بازرسی باشد.

برای پیش‌بینی رفتار متغیرهای تشخیص خرابی از مدل احتمالات انتقال[5] استفاده می‌شود.[۱۵] در این مدل، با استفاده از مقادیر فعلی و معین متغیر تشخیص خرابی، مقدار آن را در زمان بازرسی بعدی، با یک احتمال معین تخمین می‌زنند. احتمال انتقال شرطی از وضعیت $i \in S$ در زمان دلخواه t به‌وضعیت $j \in S$ در زمان $t + \Delta_0$ ــ به‌شرط آن که خرابی بعد از زمان $t + \Delta_0$ مشاهده شود ــ که با P_{ij} نمایش داده می‌شود عبارت است از:

$$P_{ij} = P\left(Z\left(t + \Delta_0\right) = j \mid T > t + \Delta_0,\, Z\left(t\right) = i\right) \tag{۱}$$

تخمین احتمالات انتقال، با روش بیشینه راست‌نمایی[6] و با استفاده از سوابق اطلاعاتی دستگاه صورت می‌گیرد.[۱۵] ماتریس حاصل را «ماتریس انتقال وضعیت» می‌نامند و فرض بر این است که وضعیت دستگاه در فاصله‌ی زمانی بین دو بازرسی متوالی و دلخواه kام و $k+1$ام، توسط وضعیت آن در زمان بازرسی kام تقریب زده می‌شود.

تابع توأم نرخ خرابی دستگاه و مقادیر متغیرهای تشخیص خرابی را ــ که به‌اختصار «تابع توأم نرخ خرابی» نامیده می‌شود ــ با $h(t, Z(t))$ نشان داده و خواهیم داشت:

$$h\left(t, Z\left(t\right)\right) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{P\left(t < T \leq t + \delta t | T > t, Z\left(s\right), 0 \leq s \leq t\right)}{\delta t} \tag{۲}$$

تخمین تابع توأم نرخ خرابی، با استفاده از سوابق اطلاعاتی و مدل تلفیقی نرخ خرابی (PHM) صورت می‌گیرد.[۱۵] در PHM، تابع توأم نرخ خرابی به‌صورت $h(t, Z(t)) = h_0(t)\psi(Z(t))$ در نظر گرفته می‌شود و در آن تابع $h_0(t)$ به‌عنوان نرخ خرابی پایه، فقط وابسته به عمر دستگاه و $\psi(Z(t))$ تابع مثبتی است که وابسته به مقادیر فرایند تشخیص خرابی است.[۲۰] با فرض آن که تابع $h_0(t)$ وایبل باشد، تابع توأم نرخ خرابی به‌صورت معادله‌ی ۳ خواهد بود:

$$h\left(t, Z\left(t\right)\right) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta - 1} exp\left\{\gamma Z\left(t\right)\right\} \tag{۳}$$

با توجه به سوابق اطلاعاتی جمع‌آوری‌شده از دستگاه، پارامترهای β (پارامتر شکل)، η (پارامتر مقیاس) و γ (پارامتر تأثیر متغیر تشخیص خرابی) با استفاده از روش بیشینه راست‌نمایی تخمین زده می‌شود.[۱۷-۱۹]

در مدل مذکور، فرض بر این است که بازرسی‌ها با فواصل ثابت و مشخص از یکدیگر اجرا می‌شوند. پس از هر بازرسی و تعیین مقادیر متغیرهای تشخیص خرابی، تصمیم‌گیری درخصوص تعویض یا ادامه‌ی بهره‌برداری از دستگاه صورت می‌گیرد. اگر وضعیت دستگاه به حد کنترل بهینه رسیده باشد تعویض پیشگیرانه انجام می‌شود و در غیر این صورت، تا زمان بازرسی بعدی بهره‌برداری از آن ادامه می‌یابد. بنابراین، با توجه به ساختار تابع توأم نرخ خرابی، مبنای تصمیم‌گیری در این استراتژی، عمر دستگاه و مقادیر متغیرهای تشخیص خرابی به دست آمده از بازرسی‌هاست. چنانچه دستگاه براساس شوک‌های مقطعی دچار خرابی سخت شود، بلافاصله تعویض می‌شود.[۱۵-۱۹]

فرض کنید k شماره‌ی بازرسی و $t \in [0, \Delta_0)$ باشد. تابع قابلیت اطمینان شرطی تا زمان $k\Delta_0 + t$ با $R(k, Z(k\Delta_0), t)$ نشان داده می‌شود و معادل احتمال سالم‌بودن دستگاه تا زمان $k\Delta_0 + t$ است، به‌شرط آن که دستگاه تا زمان بازرسی kام سالم بوده و در آن بازرسی در وضعیت $Z(k\Delta_0)$قرار داشته باشد (رابطه‌ی ۴):[۱۹]

$$R\left(k, Z\left(k\Delta_0\right), t\right) = exp\left\{-\int_{k\Delta_0}^{k\Delta_0+t} h_0\left(s\right) exp\left\{\gamma Z\left(s\right)\right\} ds\right\}$$

$$, h_0\left(s\right) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{\beta-1} \qquad (۴)$$

متوسط هزینه‌های تعویض (اعم از تعویض پیشگیرانه و یا تعویض به‌دلیل وقوع خرابی) در واحد زمان و با توجه به استراتژی حد کنترل d_{Δ_0} را با $\phi_{wins}(d_{\Delta_0})$ نشان می‌دهند و مقدار آن را طبق رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌کنند:

$$\phi_{wins}\left(d_{\Delta_0}\right) = \frac{\left(C+K\right)P\left(T \leq T_{d_{\Delta_0}}\right) + C\left(1 - P\left(T \leq T_{d_{\Delta_0}}\right)\right)}{E\left(Min\left\{T, T_{d_{\Delta_0}}\right\}\right)} = \frac{C + KQ\left(d_{\Delta_0}\right)}{W\left(d_{\Delta_0}\right)} \qquad (۵)$$

که در آن d_{Δ_0} حد کنترل برای اجرای تعویض پیشگیرانه در شرایطی است که فاصله‌ی بین‌بازرسی‌های متوالی برابر با Δ_0 است. $T_{d_{\Delta_0}}$ زمان اجرای تعویض پیشگیرانه با توجه به استراتژی حد کنترل d_{Δ_0}، C هزینه‌ی تعویض پیشگیرانه، و $C+K$ برابر با هزینه‌ی تعویض به‌دلیل وقوع خرابی است.[۱۵-۱۹] همچنین $Q(d_{\Delta_0})$ برابر با احتمال تعویض دستگاه به‌علت خرابی و $W(d_{\Delta_0})$ معادل متوسط زمان بین دو تعویض (اعم از تعویض پیشگیرانه یا تعویض به‌دلیل خرابی) با فرض اجرای استراتژی حد کنترل d_{Δ_0} است.

بدون درنظرگرفتن هزینه‌های بازرسی، بهترین حد کنترل حدی است که طی آن $Q_{wins}(d_{\Delta_0})$ کمینه می‌شود. چنانچه تابع توأم نرخ خرابی نسبت به زمان صعودی باشد، به‌ازای حد کنترل بهینه خواهیم داشت:[۱۹و۲۱]

$$\phi_{wins}\left(d^*_{\Delta_0}\right) = d^*_{\Delta_0} \qquad (۶)$$

و لذا حد کنترل بهینه $(d^*_{\Delta_0})$ را می‌توان با استفاده از روش تکرار نقطه‌ی ثابت به دست آورد.[۱۹] در هر تکرار، باید ابتدا با توجه به‌رابطه‌ی ۵ زمان متوسط بین دو تعویض متوالی و احتمال تعویض به‌علت خرابی تخمین زده شود. بدین‌منظور، به‌ازای هر یک از عناصر مجموعه S، مقدار t_i چنین تعریف می‌شود:

$$t_i = inf\left\{t \geq 0 \left| Kh\left(t, i\right) \geq d_{\Delta_0}\right.\right\} \quad d_{\Delta_0} > 0, \quad i \in S \qquad (۷)$$

که در آن K نماینده‌ی هزینه‌ی اضافیِ ناشی از تعویض به‌دلیل وقوع خرابی ــ در مقایسه با تعویض پیشگیرانه ــ است. نماد inf معرف کوچک‌ترین زمانی است که شرط مذکور برای آن صادق است. d_{Δ_0} حد کنترل و $h(t,i)$ مقدار تابع توأم نرخ خرابی در زمان t است با این فرض که مقدار متغیر اندازه‌گیری‌شده در آخرین بازرسی معادل i باشد. به‌عبارت دیگر، t_i معرف نخستین زمانی است که در آن، در صورتی که وضعیت دستگاه i است، مقدار $Kh(t,i)$ به حد کنترل d_{Δ_0} می‌رسد. چنانچه زمان‌های بازرسی قبل و بعدِ هر t_i را به‌ترتیب با $k_{i-1}\Delta_0$ و $k_i\Delta_0$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\left(k_i - 1\right)\Delta_0 \leq t_i < k_i\Delta_0 \qquad (۸)$$

فرض کنید عمر دستگاه از $j\Delta_0$ بیشتر است و در بازرسی jام در وضعیت i قرار دارد. متوسط زمان باقی‌مانده تا تعویض بعدی، $W(j,i)$، و احتمال تعویض دستگاه به‌علت خرابی، $Q(j,i)$، با فرض این که دستگاه در بازرسی شماره‌ی صفر در زمان صفر سالم باشد، براساس روابط ۹ و ۱۰ به دست خواهد آمد.[۱۹]

$$E\left(Min\left\{T, T_{d_{\Delta_0}}\right\}\right) = W\left(0, 0\right) \qquad (۹)$$

$$P\left(T \leq T_{d_{\Delta_0}}\right) = Q\left(0, 0\right) \qquad (۱۰)$$

برای تخمین مقادیر $W(0,0)$ و $Q(0,0)$ نیز از روابط بازگشتی ۱۱ الی ۱۳ استفاده می‌شود.[۱۹]

$$\begin{cases} W\left(j, i\right) = 0 \\ Q\left(j, i\right) = 0 \end{cases} \qquad j > k_i - 1 \qquad (۱۱)$$

$$\begin{cases} W\left(k_i - 1, i\right) = \\ \qquad \int_0^{t_i - (k_i - 1)\Delta_0} R\left(k_i - 1, i, s\right) ds \\ Q\left(k_i - 1, i\right) = \\ \qquad 1 - R\left(k_i - 1, i, t_i - \left(k_i - 1\right)\Delta_0\right) \end{cases} \qquad j = k_i - 1 \qquad (۱۲)$$

$$\begin{cases} W\left(j, i\right) = \int_0^{\Delta_0} R\left(j, i, s\right) ds + \\ \qquad R\left(j, i, \Delta_0\right) \sum_{r=i}^{m} W\left(j+1, r\right) P_{ir} \\ Q\left(j, i\right) = 1 - R\left(j, i, \Delta_0\right) + \\ \qquad R\left(j, i, \Delta_0\right) \sum_{r=i}^{m} Q\left(j+1, r\right) P_{ir} \end{cases} \qquad j < k_i - 1 \qquad (۱۳)$$

با این فرض که وضعیت دستگاه در فاصله‌ی زمانی بین دو بازرسی jام و $j+1$ام، توسط وضعیت آن در زمان بازرسی jام تقریب زده شود، تابع قابلیت اطمینان شرطی در روابط ۱۲ و ۱۳، باتوجه به تعریف آن در رابطه‌ی ۴، برابر خواهد بود با:

$$R\left(j, i, t\right) = exp\left\{-e^{\gamma i}\int_{j\Delta_0}^{j\Delta_0+t} \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{\beta-1} ds\right\}$$

چگونگی استنتاج روابط فوق و استفاده از آنها در تعیین حد کنترلِ بهینه به تفصیل آورده شده است.[۱]

در بخش بعد، مدل پیشنهادی به‌عنوان نسخه‌ی تکامل‌یافته‌ی مدل فوق ارائه خواهد شد. در این مدل، علاوه بر ملحوظ داشتن هزینه‌های تعویض پیشگیرانه و تعویض به‌دلیل وقوع خرابی در تعیین حدِ کنترلِ بهینه، هزینه‌ی انجام بازرسی‌ها نیز در نظر گرفته شده است تا بتوان حد کنترل بهینه و بهترین فواصل بازرسی را به‌گونه‌یی تعیین کرد که متوسط مجموع هزینه‌های تعویض پیشگیرانه، تعویض به‌دلیل وقوع خرابی و هزینه‌ی بازرسی کمینه شود.

۳. بهینه‌سازی توأمانِ فواصل بازرسی و حد کنترل در CBM

دستگاهی با رفتار مارکوفی را در نظر بگیرید که در طول بهره‌برداری ممکن است دچار خرابی نرم ناشی از افزایش عمر و کارکرد، یا خرابی سخت ناشی از شوک‌های مقطعی شود. همچنین فرض کنید در این مدت، هیچ فعالیت تعمیراتی در راستای بهبود وضعیت دستگاه مذکور صورت نمی‌گیرد. این دستگاه برای رعایت پیشگیری، یا درصورت مشاهده‌ی خرابی، با یک دستگاه نو تعویض می‌شود.

کوچک‌ترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین اجرای بازرسی‌های متوالی را به‌عنوان فاصله‌ی پایه بین بازرسی‌های متوالی تعریف می‌کنیم و آن را با Δ_0 نشان می‌دهیم. فرض بر این است که چندین نوع از دستگاه مورد نظر در یک دوره‌ی زمانی متناهی، با فواصل زمانی Δ_0 بازرسی شده و با توجه به سوابق اطلاعاتی و مباحث مطرح شده در بخش ۲، تابع توأم نرخ خرابی مربوط به این دستگاه و ماتریس انتقال وضعیت تخمین زده شده است. ماتریس انتقال وضعیت مربوط به استراتژی اجرای بازرسی‌ها با فواصل زمانی Δ_0 را «ماتریس انتقال وضعیت پایه» نامیده و آن را با $P^{(0)}$ نشان می‌دهیم.

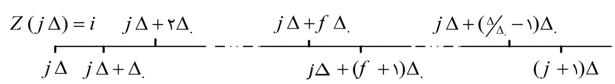
Δ را به‌عنوان مضرب صحیحی از فاصله‌ی پایه بین بازرسی‌های متوالی در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم از این پس دستگاه را در فواصل زمانی Δ بازرسی کنیم. ماتریس انتقال وضعیت مربوط به‌این نحوه‌ی بازرسی را با $P^{(\Delta)}$ نشان می‌دهیم. باتوجه به خاصیت مارکوفی‌بودنِ فرایندِ تغییرِ وضعیتِ دستگاه، از رابطه‌ی ۱۴ برای تخمین ماتریس انتقال وضعیت استفاده می‌کنیم:

$$P^{(\Delta)} = \left(P^{(0)}\right)^{\frac{\Delta}{\Delta_0}} \qquad (۱۴)$$

به‌عبارت دیگر، ماتریس $P^{(\Delta)}$ از ضرب تعداد Δ/Δ_0 عدد از ماتریس $P^{(0)}$ در یکدیگر به دست خواهد آمد.

با توجه به روابط ۱۱ تا ۱۳، و با توجه به فواصل بازرسی (Δ)، برای محاسبه‌ی مقادیر مربوط به $R(j,i,\Delta)$، $R(k_i-1,i,t_i-(k_i-1)\Delta)$، $\int_0^{\Delta} R(j,i,s)ds$ و $\int_0^{t_i-(k_i-1)\Delta} R(k_i-1,i,s)ds$ فاصله‌ی بین دو بازرسی jام و $j+1$ام را به زیرفواصل زمانی مساوی به طول Δ_0 افراز می‌کنیم (شکل ۱).

فرض بر این است که وضعیت دستگاه در هر یک از این زیر فواصل، با وضعیت آن در ابتدای زیر فاصله‌ی مذکور برابر است. مثلاً برای زیرفاصله‌ی



شکل ۱. تقسیم‌بندی فاصله‌ی زمانی بین دو بازرسی به زیرفواصلی با طول فاصله‌ی پایه بین بازرسی‌ها.

$[\,j\Delta+f\Delta_0,\ j\Delta+(f+1)\Delta_0\,)$ در شکل ۱ داریم:

$$Z(t) = Z(j\Delta+f\Delta_0), \qquad \forall t \in [j\Delta+f\Delta_0,\ j\Delta+(f+1)\Delta_0) \qquad (۱۵)$$

با این فرض که دستگاه در زمان بازرسی jام در وضعیت i باشد، وضعیت آن در زمان $j\Delta+f\Delta_0$، یعنی مقدار $Z(j\Delta+f\Delta_0)$ لزوماً با $Z(j\Delta)$ برابر نیست، بلکه ممکن است همچنان در وضعیت i باقی بماند یا این که در وضعیت بدتری قرار بگیرد. به‌عبارت دیگر:

$$Z(j\Delta+f\Delta_0) \in \{i, i+1, ..., m\} \qquad (۱۶)$$

و لذا احتمال این که دستگاه در زمان $j\Delta+f\Delta_0$ در وضعیت l، $l \in \{i,i+1,...,m\}$ باشد معادل $\left(P^{(0)}\right)^f_{il}$، ردیف i از ستون lامِ توانِ fامِ ماتریس $P^{(0)}$ خواهد بود (شکل ۲).

با توجه به شکل ۲ و مباحث مطرح شده در بخش قبلی، در ضمیمه‌ی ۱ نشان داده شده است که $R(j,i,\Delta)$ مطابق رابطه‌ی ۱۷ محاسبه می‌شود:

$$R(j,i,\Delta) = exp\left\{\begin{array}{l} -e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)-\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\times \\ \sum\limits_{f=1}^{\frac{\Delta}{\Delta_0}-1}\sum\limits_{l=i}^{m}\left\{\begin{array}{l}\left(P^{(0)}\right)^f_{il}e^{\gamma l}\times \\ \left((j\Delta+(f+1)\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta+f\Delta_0)^{\beta}\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} \qquad (۱۷)$$

برای محاسبه‌ی $R(k_i-1,i,t_i-(k_i-1)\Delta)$ دو حالت در نظر می‌گیریم:

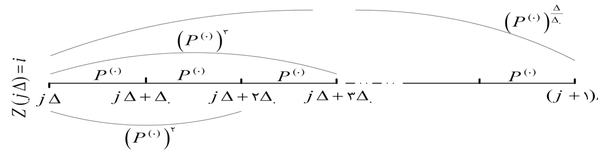
۱. چنانچه $t_i-(k_i-1)\Delta < \Delta_0$، آنگاه:

$$R(k_i-1,i,t_i-(k_i-1)\Delta) = exp\left\{-e^{\gamma i}\int_{(k_i-1)\Delta}^{t_i} h_0(s)ds\right\} \qquad (۱۸)$$

۲. چنانچه $t_i-(k_i-1)\Delta \geq \Delta_0$، آنگاه:

$$R(k_i-1,i,t_i-(k_i-1)\Delta) = exp\left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}e^{\gamma i}\left(((k_i-1)\Delta+\Delta_0)^{\beta}-((k_i-1)\Delta)^{\beta}\right)- \\ \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\times \\ \sum\limits_{f=1}^{\left[\frac{t_i-(k_i-1)\Delta}{\Delta_0}\right]-1}\sum\limits_{l=1}^{m}\left\{\begin{array}{l}\left(P^{(0)}\right)^f_{il}e^{\gamma l}\times \\ \left(\begin{array}{l}((k_i-1)\Delta+(f+1)\Delta_0)^{\beta}- \\ ((k_i-1)\Delta+f\Delta_0)^{\beta}\end{array}\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}- \\ \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\sum\limits_{l=i}^{m}\left\{\begin{array}{l}\left(P^{(0)}\right)^{\left[\frac{t_i-(k_i-1)\Delta}{\Delta_0}\right]}_{il}e^{\gamma l}\times \\ \left(t_i^{\beta}-\left(\begin{array}{l}(k_i-1)\Delta+ \\ \left[\frac{t_i-(k_i-1)\Delta}{\Delta_0}\right]\Delta_0\end{array}\right)^{\beta}\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} \qquad (۱۹)$$

که در آن، نماد $[\circ]$ معرف تابع جزء صحیح است.



شکل ۲. چگونگی لحاظ ماتریس‌های انتقال وضعیت در فاصله‌ی زمانی بین دو بازرسی.

درخصوص $\int_{0}^{\Delta} R\left(j,i,s\right) ds$ نیز، در ضمیمه‌ی ۲ نشان داده شده است که این مقدار از رابطه‌ی ۲۰ محاسبه خواهد شد:

$$\int_{0}^{\Delta} R\left(j,i,s\right) ds = \int_{0}^{\Delta_0} exp\left\{-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+s)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)\right\} ds + \sum_{n=1}^{\frac{\Delta}{\Delta_0}-1}\int_{n\Delta_0}^{(n+1)\Delta_0} exp\left\{\begin{array}{l} -e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)- \\ \sum_{f=1}^{n-1}\sum_{l=i}^{m}\left\{\begin{array}{l}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{f}e^{\gamma l}\times \\ \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left(\begin{array}{l}(j\Delta+(f+1)\Delta_0)^{\beta}- \\ (j\Delta+f\Delta_0)^{\beta}\end{array}\right)\end{array}\right\}- \\ \sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{n}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left(\begin{array}{l}(j\Delta+s)^{\beta}- \\ (j\Delta+n\Delta_0)^{\beta}\end{array}\right)\end{array}\right\} ds_0 \qquad (۲۰)$$

برای محاسبه‌ی $\int_{0}^{t_i-(k_i-1)\Delta} R(k_i-1,i,s)ds$، اگر $t_i-(k_i-1)\Delta < \Delta_0$ باشد، به‌سادگی می‌توان نشان داد که:

$$\int_{0}^{t_i-(k_i-1)\Delta} R(k_i-1,i,s)ds = \int_{0}^{t_i-(k_i-1)\Delta} exp\left\{-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left(((k_i-1)\Delta+s)^{\beta}-((k_i-1)\Delta)^{\beta}\right)\right\}ds \qquad (۲۱)$$

و در غیر این صورت، یعنی اگر $t_i-(k_i-1)\Delta \geq \Delta_0$ باشد، با استدلالی مشابه برای رابطه‌ی ۲۰ خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{t_i-(k_i-1)\Delta} R\left(k_i-1,i,s\right) ds = \int_{0}^{\Delta_0} exp\left\{-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left(((k_i-1)\Delta+s)^{\beta}-((k_i-1)\Delta)^{\beta}\right)\right\} ds + \sum_{n=1}^{\left[\frac{t_i-(k_i-1)\Delta}{\Delta_0}\right]-1}\int_{n\Delta_0}^{(n+1)\Delta_0} exp\left\{\begin{array}{l} -e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left(\begin{array}{l}((k_i-1)\Delta+\Delta_0)^{\beta}- \\ ((k_i-1)\Delta)^{\beta}\end{array}\right)- \\ \sum_{f=1}^{n-1}\sum_{l=i}^{m}\left\{\begin{array}{l}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{f}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\times \\ \left(\begin{array}{l}((k_i-1)\Delta+(f+1)\Delta_0)^{\beta}- \\ ((k_i-1)\Delta+f\Delta_0)^{\beta}\end{array}\right)\end{array}\right\}- \\ \sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{n}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left(\begin{array}{l}((k_i-1)\Delta+s)^{\beta}- \\ ((k_i-1)\Delta+n\Delta_0)^{\beta}\end{array}\right)\end{array}\right\} ds +$$

$$\int_{\left[\frac{t_i-(k_i-1)\Delta}{\Delta_0}\right]\Delta_0}^{t_i-(k_i-1)\Delta} exp\left\{\begin{array}{l} -e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left(((k_i-1)\Delta+\Delta_0)^{\beta}-((k_i-1)\Delta)^{\beta}\right)- \\ \sum_{f=1}^{\left[\frac{t_i-(k_i-1)\Delta}{\Delta_0}\right]-1}\sum_{l=i}^{m}\left\{\begin{array}{l}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{f}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\times \\ \left(\begin{array}{l}((k_i-1)\Delta+(f+1)\Delta_0)^{\beta}- \\ ((k_i-1)\Delta+f\Delta_0)^{\beta}\end{array}\right)\end{array}\right\}- \\ \sum_{l=i}^{m}\left\{\begin{array}{l}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{\left[\frac{t_i-(k_i-1)\Delta}{\Delta_0}\right]}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\times \\ \left(\begin{array}{l}((k_i-1)\Delta+s)^{\beta}- \\ \left((k_i-1)\Delta+\left[\frac{t_i-(k_i-1)\Delta}{\Delta_0}\right]\Delta_0\right)^{\beta}\end{array}\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} ds \qquad (۲۲)$$

با استفاده از روابط ۱۷ تا ۲۲ و با استفاده از روش تکرار نقطه‌ی ثابت، حد کنترل بهینه برای تعویض را، با درنظرگرفتن فاصله‌ی Δ بین بازرسی‌ها، به دست می‌آوریم. حد کنترل بهینه برای تعویض، عدد حقیقی مثبتی مانند d_Δ است که در رابطه‌ی $\phi_{wins}(d_\Delta) = d_\Delta$ صدق کند. حد کنترل به‌دست‌آمده تا این مرحله، متوسط هزینه‌های تعویض در بلندمدت را کمینه می‌سازد.

اگر هزینه‌ی اجرای هر بازرسی را با C_{ins}، و متوسط هزینه‌های بازرسی با توجه به استراتژی حد کنترل d_Δ را با $\phi_{ins}(d_\Delta)$ نشان دهیم، رابطه‌ی ۲۳ بدیهی است:

$$\phi_{ins}\left(d_\Delta\right) = \frac{C_{ins}P\left(T \leq T_{d_\Delta}\right)\frac{E(T)}{\Delta} + C_{ins}\left(1-P\left(T \leq T_{d_\Delta}\right)\right)\frac{E\left(T_{d_\Delta}\right)}{\Delta}}{E\left(Min\left\{T, T_{d_\Delta}\right\}\right)} \qquad (۲۳)$$

رابطه‌ی ۲۳ چنین ساده خواهد شد:

$$\phi_{ins}\left(d_\Delta\right) = \frac{C_{ins}}{\Delta} \qquad (۲۴)$$

اگر متوسط کل هزینه‌ها، با درنظرگرفتن استراتژی حد کنترل d_Δ را با $\phi(d_\Delta)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\phi\left(d_\Delta\right) = \phi_{wins}\left(d_\Delta\right) + \phi_{ins}\left(d_\Delta\right) \qquad (۲۵)$$

فرض کنید d_Δ^*، حد کنترل بهینه در استراتژی اجرای بازرسی‌ها با فواصل زمانی Δ باشد. با توجه به روابط ۶، ۲۴ و ۲۵ خواهیم داشت:

$$\phi\left(d_\Delta^*\right) = d_\Delta^* + \frac{C_{ins}}{\Delta} \qquad (۲۶)$$

باید توجه داشت که با اجرای بازرسی‌ها با فواصل زمانی کوتاه‌تر، تخمین دقیق‌تری از وضعیت دستگاه در اختیار خواهیم داشت. این امر موجب کاهش احتمال تعویض به‌علت خرابی است و لذا هزینه‌های تعویض به‌علت خرابی که بخشی از هزینه‌های تعویض است، کاهش می‌یابد. با توجه به رابطه‌ی ۲۴، هرچه فواصل بین بازرسی‌های متوالی کوتاه‌تر باشد، متوسط هزینه‌های بازرسی در واحد زمان بیشتر می‌شود. بنابراین، می‌بایست فاصله‌ی زمانی بین اجرای بازرسی‌های متوالی را به‌گونه‌یی تنظیم کرد تا به‌ازای حد کنترل بهینه‌ی مربوط به آن، متوسط مجموع هزینه‌ها ــ اعم از هزینه‌های بازرسی، خرابی و تعویض پیشگیرانه ــ کمینه شود.

به‌طور خلاصه، برای یافتن مقادیر بهینه‌ی Δ و d_Δ، پس از آن که با توجه به سوابق اطلاعاتی حاصل از دستگاه‌های مشابه ــ که با فاصله‌ی پایه‌ی مناسب بین بازرسی‌های متوالی جمع‌آوری شده است ــ ماتریس انتقال وضعیت و تابع توأم نرخ خرابی دستگاه تخمین زده شد، کافی است به‌ازاء مضارب صحیح Δ_0، حد کنترل بهینه را با استفاده از روش تکرار نقطه‌ی ثابت و براساس روابط ۱۷ تا ۲۲ محاسبه کنیم. سپس با توجه به رابطه‌ی ۲۶، با مقایسه‌ی متوسط کل هزینه‌ها برای تمام فواصل ممکن در بازرسی (مقادیر مختلف Δ)، بهترین مقدار Δ و به‌تبَع آن حد کنترل بهینه در اجرای CBM انتخاب خواهد شد. برای روشن‌تر شدن مدل و روش پیشنهادی، در بخش بعدی یک مثال عددی آورده شده است.

۴. مثال عددی

برای یک دستگاه گیربکس مربوط به ماشین‌های سنگین انتقال مواد در معادن،[۱۴] تابع توأم نرخ خرابی به‌صورت $h\left(t, Z(t)\right) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}e^{rZ(t)}$ تخمین زده شده است. در هر بازرسی، میزان ذرات فلز در روغن از طریق تجزیه و تحلیل روغن اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنید با توجه به میزان ذرات فلز اندازه‌گیری‌شده در هر بازرسی، سه وضعیت قابل مشاهده است: $S = \{0, 1, 2\}$ (وضعیت صفر بهترین و وضعیت ۲ بدترین). همچنین فرض کنید برای تعدادی از این نوع گیربکس در یک دوره‌ی زمانی خاص، بازرسی‌ها در فواصل زمانی $\Delta_0 = 1$ انجام و نتایج ثبت شده است. سپس با استفاده از این اطلاعات، مقادیر β، η و γ مربوط به تابع مذکور، معادل $\beta = 2.323$، $\eta = 21.457$ و $\gamma = 0.827$، و همچنین ماتریس انتقال وضعیت معادل $P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.749 & 0.251 & 0 \\ 0 & 0.811 & 0.189 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ تخمین زده شده است. هزینه‌ی تعویض پیشگیرانه را نیز $C = 10$ فرض کنید. تفاوت تعویض

به‌دلیل خرابی و تعویض پیشگیرانه $K =$ ۴۰ و هزینه‌ی بازرسی $C_{ins} =$ ۲ باشد. می‌خواهیم استراتژی بهینه، شامل حد کنترل بهینه و فاصله‌ی بهینه بین بازرسی‌های متوالی را برای این نوع گیربکس به دست آوریم. بدین‌منظور، ابتدا به‌ازاء تمام فواصل زمانی فرضیِ ممکن بین اجرای بازرسی‌های متوالی (مضارب صحیحی از ۱)، حد کنترل بهینه را با استفاده از روش تکرار نقطه‌ی ثابت و روابط ۱۷ تا ۲۲ محاسبه می‌کنیم. مثلاً تکرارهای مربوط به محاسبه‌ی d_Δ به‌ازاء $\Delta =$ ۱, ۲, ۳ به‌ترتیب در جداول ۱ تا ۳ آورده شده است.

همچنان که دیده می‌شود، به‌ازاء $\Delta =$ ۱ حد بهینه و هزینه‌ی متناظر با آن معادل $d^*_{\Delta=1} =$ ۲٫۲۹۷۶۹ و برای $\Delta =$ ۲ و $\Delta =$ ۳ به‌ترتیب معادل $d^*_{\Delta=2} =$ ۲٫۱۰۲۴۹ و $d^*_{\Delta=3} =$ ۲٫۱۳۸۲۴ محاسبه می‌شود.

در مرحله‌ی بعد، هزینه‌های بازرسی را نیز به‌ازاء اجرای هریک از فواصل بازرسی فوق به دست می‌آوریم. از ترکیب متوسط هزینه‌های تعویض و بازرسی، متوسط کل هزینه‌ها محاسبه می‌شود. در جدول ۴، نتایج مربوط به اجرای بازرسی‌ها با فواصل $\Delta =$ ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰ خلاصه و ارائه شده است.

با توجه به جدول ۴، بهترین فاصله‌ی بازرسی برای دستگاه برابر با ۴ و حد کنترل بهینه $d^*_{\Delta=4} =$ ۲٫۲۵۹۵۶ بود. با این استراتژی متوسط کل هزینه‌ها کمینه خواهد شد.

جدول ۱. محاسبه‌ی حد کنترل بهینه به‌ازاء $\Delta =$ ۱.

d_1	$W(0,0)$	$Q(0,0)$	$\phi_{wins}(d_1)$
۵	۸٫۳۵۳۲۵	۰٫۲۹۰۱۱۴	۲٫۵۸۶۳۷
۲٫۵۸۶۳۷	۶٫۶۲۶۰۳	۰٫۱۳۱۶۹۵	۲٫۳۰۴۲۲
۲٫۳۰۴۲۲	۶٫۳۳۵۹۵	۰٫۱۱۳۹۵۲	۲٫۲۹۷۶۹
۲٫۲۹۷۶۹	۶٫۳۲۹۲۷	۰٫۱۱۳۵۶۸	۲٫۲۹۷۶۹

جدول ۲. محاسبه‌ی حد کنترل بهینه به‌ازاء $\Delta =$ ۲.

d_2	$W(0,0)$	$Q(0,0)$	$\phi_{wins}(d_2)$
۵	۱۰٫۵۳۹۴	۰٫۴۱۵۰۷	۲٫۵۲۴۱۲
۲٫۵۲۴۱۲	۸٫۳۷۳۷۸	۰٫۱۹۹۰۲۳	۲٫۱۴۴۹
۲٫۱۴۴۹	۷٫۸۳۷۲۵	۰٫۱۶۱۹۷۷	۲٫۱۰۲۶۶
۲٫۱۰۲۶۶	۷٫۷۷۳۰۸	۰٫۱۵۸۵۷	۲٫۱۰۲۴۹
۲٫۱۰۲۴۹	۷٫۷۷۲۸۲	۰٫۱۵۸۵۵۶	۲٫۱۰۲۴۹

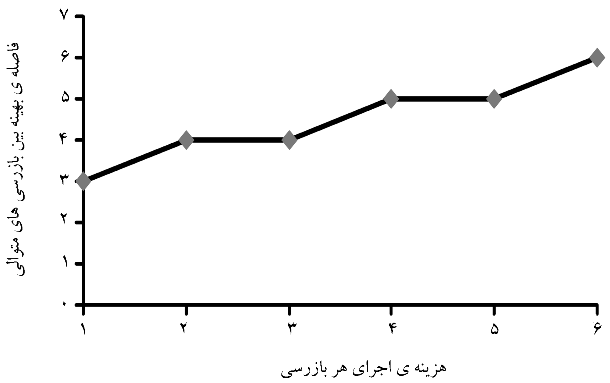
جدول ۳. محاسبه‌ی حد کنترل بهینه به‌ازاء $\Delta =$ ۳.

d_3	$W(0,0)$	$Q(0,0)$	$\phi_{wins}(d_3)$
۵	۱۱٫۶۲۱۸	۰٫۵۱۹۱۶۶	۲٫۶۴۷۳۱
۲٫۶۴۷۳۱	۹٫۵۲۹۴۷	۰٫۲۷۹۲۳۱	۲٫۲۲۱۴۵
۲٫۲۲۱۴۵	۸٫۸۵۴۵۵	۰٫۲۲۳۴۷۸	۲٫۱۳۸۹۱
۲٫۱۳۸۹۱	۸٫۷۱۱۴	۰٫۲۱۵۶۷۶	۲٫۱۳۸۲۴
۲٫۱۳۸۲۴	۸٫۷۱۰۲۳	۰٫۲۱۵۶۱۳	۲٫۱۳۸۲۴

باید توجه داشت که شرایط مؤثربودن هزینه‌ی‌بازرسی در شناسایی مقدار مطلوب Δ با توجه به رابطه‌ی ۲۶ قابل تبیین است. چنانچه مقدار $\frac{C_{ins}}{\Delta}$ در مقایسه با مقدار d^*_Δ (مقدار بهینه‌ی متوسط هزینه‌ها بدون درنظرگرفتن هزینه‌ی بازرسی) اندک باشد، درنظر گرفتن یا عدم درنظر گرفتن هزینه‌ی بازرسی، ممکن است نقشی در تعیین فواصل بین بازرسی‌ها نداشته باشد. از سوی دیگر، افزایش مقدار Δ اگرچه موجب کاهش مقدار $\frac{C_{ins}}{\Delta}$ خواهد شد (اعداد مربوط به ستون $\phi_{ins}(d_\Delta)$ در جدول ۴ را ملاحظه فرمایید)، اغلب موجب افزایش d^*_Δ نیز خواهد شد (اعداد مربوط به d^*_Δ به ستون $\phi_{wins}(d_\Delta)$ در جدول ۴ را ملاحظه فرمایید). با این حال، استفاده از روش پیشنهادی، ارزیابی کمّی و توأمان این تأثیر و نیز تعیین دقیق بهترین فاصله‌ی بین بازرسی‌ها و حد کنترل بهینه‌ی متناظر با آن را ممکن می‌سازد. برای وضوح بیشتر، درمورد مثال یادشده هزینه‌ی بازرسی را مقداری صحیح بین ۱ و ۶ فرض کرده و به‌ازاء هریک از این مقادیر، فاصله‌ی بهینه بین بازرسی‌ها را محاسبه کرده‌ایم. در شکل ۳ نتایج نشان داده شده است. همچنان که دیده می‌شود، فاصله‌ی بهینه‌ی بین بازرسی‌های متوالی، نسبت به هزینه‌ی بازرسی غیرنزولی است. به‌عبارت دیگر، مطابق انتظار، با افزایش هزینه‌ی بازرسی، در مدل فواصل بازرسی بزرگ‌تری پیشنهاد می‌شود.

جدول ۴. مقایسه‌ی متوسط مجموع هزینه‌ها به‌ازاء فواصل مختلف بین اجرای بازرسی‌های متوالی.

$\phi(d_\Delta)$	$\phi_{ins}(d_\Delta)$	$\phi_{wins}(d_\Delta)$	Δ
۴٫۲۹۷۶۹	۲٫۰۰۰۰۰	۲٫۲۹۷۶۹	۱
۳٫۱۰۲۴۹	۱٫۰۰۰۰۰	۲٫۱۰۲۴۹	۲
۲٫۸۰۴۹۱	۰٫۶۶۶۶۷	۲٫۱۳۸۲۴	۳
۲٫۷۵۹۵۶	۰٫۵۰۰۰۰	۲٫۲۵۹۵۶	۴
۲٫۸۲۷۰۱	۰٫۴۰۰۰۰	۲٫۴۲۷۰۱	۵
۲٫۹۲۹۱۷	۰٫۳۳۳۳۳	۲٫۵۹۵۸۴	۶
۳٫۱۵۶۷۳	۰٫۲۸۵۷۱	۲٫۸۷۱۰۲	۷
۳٫۴۱۵۵۸	۰٫۲۵۰۰۰	۳٫۱۶۵۵۸	۸
۳٫۶۶۳۴۶	۰٫۲۲۲۲۲	۳٫۴۴۱۲۴	۹
۳٫۷۳۸۴۶	۰٫۲۰۰۰۰	۳٫۵۳۸۴۶	۱۰



شکل ۳. فاصله‌ی بهینه بین بازرسی‌های متوالی به‌ازاء هزینه‌های مختلف بازرسی.

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار یک مدل CBM به‌منظور بهینه‌سازی تصمیمات نگه‌داری و تعمیرات پیشگیرانه با در نظرگرفتن هزینه‌های بازرسی، خرابی و تعویض، و با معیارکمینه‌سازی متوسط مجموع هزینه‌ها در واحد زمان در بلندمدت ارائه شد. این مدل‌سازی برای دستگاهی صورت گرفته که دارای رفتار مارکوفی است و در طول بهره‌برداری، هیچ فعالیت تعمیراتی در راستای بهبود وضعیت آن صورت نمی‌گیرد و بنابراین ممکن است دچار خرابی‌های نرم یا سخت شود. بعد از هر خرابی، یا به‌هنگام انجام تعویض پیشگیرانه، دستگاه با یک دستگاه نو تعویض می‌شود.

مدل پیشنهادی، بسط و تکمیل یک مدل پایه.[۱۴-۱۹] است و این امکان را به وجود می‌آورد که علاوه بر حد کنترل بهینه، فاصله‌ی زمانی بهینه بین اجرای بازرسی‌های متوالی نیز با ملحوظ داشتن هزینه‌های تعویض به‌دلیل خرابی، تعویض پیشگیرانه و هزینه‌های بازرسی تعیین شود.

در مدل ارائه‌شده در این مطالعه، با تکیه بر مفاهیم فاصله‌ی پایه بین بازرسی‌های متوالی و احتمال انتقال وضعیت و با استفاده از مفهوم ماتریس انتقال برای فاصله‌ی پایه، روابط و معادلات مورد نیاز برای محاسبه‌ی احتمال تعویض دستگاه به‌علت خرابی و متوسط فاصله‌ی زمانی بین تعویض‌های متوالی ـــ که از اجزاء مهم در تعیین حد کنترل بهینه‌اند ـــ برای فواصل بازرسی بزرگ‌تر ارائه شده است. براساس این معادلات، متوسط کل هزینه‌های تعویض برای مجموعه فواصل ممکن بین بازرسی‌های متوالی محاسبه و پس از ترکیب با هزینه‌های بازرسی، متوسط کل هزینه‌ها برای هریک از فواصل مذکور تعیین می‌شود. سپس با مقایسه‌ی مقادیر متوسط کل هزینه‌ها، بهترین فاصله‌ی بین بازرسی‌ها و حد کنترل بهینه‌ی متناظر با آن انتخاب می‌شود.

فهرست علائم

T: متغیر تصادفی معرف زمان خرابی دستگاه

$Z(t)$: مقدار متغیر تشخیص خرابی، اندازه‌گیری‌شده در زمان t

Δ_0: کوچک‌ترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین اجرای بازرسی‌های متوالی (فاصله‌ی پایه)

$P^{(0)}$: ماتریس احتمال انتقال وضعیت پایه (اجرای بازرسی‌ها با فاصله‌ی Δ_0 از یکدیگر)

S: مجموعه مقادیر ممکن برای $Z(t)$

$h(t, Z(t))$: تابع توأم نرخ خرابی و مقادیر متغیرهای تشخیص خرابی، وابسته به زمان t و وضعیت $Z(t)$

β: پارامتر شکل در توزیع وایبل

η: پارامتر مقیاس در توزیع وایبل

γ: پارامتر تأثیر متغیر تشخیص خرابی در تابع توأم نرخ خرابی

C: هزینه‌ی هر تعویض پیشگیرانه

$C + K$: هزینه‌ی هر تعویض به‌علت خرابی

P_{ij}: احتمال این که دستگاه در زمان $t + \Delta_0$ در وضعیت j باشد به‌شرط آن که در زمان t وضعیت آن i است و خرابی بعد از زمان $t + \Delta_0$ واقع می‌شود

C_{ins}: هزینه‌ی هر بازرسی

با فرض این که فاصله‌ی بازرسی‌های متوالی، برابر با Δ باشد:

$P^{(\Delta)}$: ماتریس احتمال انتقال وضعیت

d_Δ: حد کنترل برای اجرای تعویض پیشگیرانه

T_{d_Δ}: زمان اجرای تعویض پیشگیرانه با توجه به استراتژی حد کنترل d_Δ

t_i: اولین زمانی که در آن، به‌شرط آن که دستگاه در وضعیت قرار دارد، ریسک خرابی به حد کنترل می‌رسد

k_i: شماره‌ی اولین بازرسی بعد از زمان t_i

$\phi_{wins}(d_\Delta)$: متوسط هزینه‌های تعویض در واحد زمان، در یک افق طولانی

$\phi_{ins}(d_\Delta)$: متوسط هزینه‌های بازرسی در واحد زمان در بلند مدت

$\phi(d_\Delta)$: متوسط کل هزینه‌های تعویض و بازرسی در واحد زمان در بلند مدت

$Q(d_\Delta)$: احتمال تعویض به‌علت خرابی با فرض اجرای استراتژی حد کنترل d_Δ

$W(d_\Delta)$: متوسط زمان بین دو تعویض (اعم از تعویض پیشگیرانه و یا به‌دلیل خرابی) با فرض اجرای استراتژی حد کنترل d_Δ

$Q(j, i)$: احتمال تعویض به‌علت خرابی به‌شرط آن که در بازرسی jاُم وضعیت دستگاه i باشد

$W(j, i)$: متوسط زمان باقیمانده تا تعویض بعدی به‌شرط آن که در بازرسی jاُم وضعیت دستگاه i باشد

d^*_Δ: حد کنترل بهینه برای اجرای تعویض پیشگیرانه

$R(j, i, t)$: تابع قابلیت اطمینان شرطی تا زمان $t + j\Delta$ (احتمال سلامت دستگاه تا زمان $t + j\Delta$ به شرط آن که تا بازرسی jاُم سالم بوده و در آن بازرسی در وضعیت i باشد)

منابع

۱. گل مکانی، حمیدرضا، مدیریت نگهداری و تعمیرات: مدل سازی و بهینه سازی انتشارات دانشگاه امیرکبیر ـ واحد تفرش، (۱۳۸۸).

2. Jardine, A.K.S.; Lin, D. and Banjevic, D. "A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance", *Mechanical Systems and*

پانوشت

1. condition-based maintenance (CBM)
2. hazard rate
3. covariates
4. proportional hazards model (PHM)
5. transition probability matrix
6. maximum likelihood method

Signal Processing, **20**, pp. 1483-1510 (2006).

3. Mobley, R.K., *An Introduction to Predictive Maintenance,* New York, Butterworth- Heinemann (1989).
4. Goldman, S., *Vibration Spectrum Analysis: A Practical Approach,* New York, Industrial Press, p. 131 (1999).
5. Christer, A.H. and Wang, W. "A simple condition monitoring model for a direct monitoring process", *European Journal of Operational Research,* **82**, pp. 258-269 (1995).
6. Okumura, S. "An inspection policy for deteriorating processes using delay-time concept", *International Transactions in Operational Research,* **4**, pp. 365-375 (1997).
7. Wang, W. "Modeling condition monitoring intervals: A hybrid of simulation and analytical approaches", *Journal of the Operational Research Society,* **54**, pp. 273-282 (2003).
8. Chen, D.Y. and Trivedi, K.S. "Closed-form analytical results for condition-based maintenance", *Reliability Engineering and System Safety,* **76**(1), pp. 43-51 (2002).
9. Hosseini, M.M.; Kerr, R.M. and Randall, R.B. "An inspection model with minimal and major maintenance for a system with deterioration and poisson failures", *IEEE Transactions on Reliability,* **49**, pp. 88-98 (2000).
10. Grall, A.; Berenguer, C. and Dieulle, L. "A condition-based maintenance policy for stochastically deteriorating systems", *Reliability Engineering and System Safety,* **76**, pp. 167-180 (2002).
11. Kumar, D. and Westberg, U. "Maintenance scheduling under age replacement policy using proportional hazards model and TTT plotting", *European Journal of Operational Research,* **99**, pp. 507-515 (1997).
12. Chen, D.Y. and Trivedi, K.S. "Optimization for condition-based maintenance with semi-markov decision process", *Reliability Engineering and System Safety,* **90**, pp. 25-29 (2005).
13. Amari, S.V. and McLaughlin, L. "Optimal design of a condition-based maintenance model", *in: Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS), IEEE,* Los Angeles, CA, USA, pp. 528-533 (2004).
14. Banjevic, D. and Jardine, A.K.S. "Calculation of reliability and remaining useful life for a markov failure time process", *IMA Journal of Management Mathematics,* **17**, pp. 115-130 (2006).
15. Banjevic, D.; Jardine, A.K.S.; Makis, V. and Ennis, M. "A control-limit policy and software for condition-based maintenance optimization", *INFOR,* **39**, pp. 32-49 (2001).
16. Jardine, A.K.S.; Banjevic, D. and Makis, V. "Optimal replacement policy and the structure of software for condition-based maintenance", *Journal of Quality in Maintenance Engineering,* **3**, pp. 109-119 (1997).
17. Jardine, A.K.S.; Joseph, T. and Banjevic, D. "Optimizing condition-based maintenance decision for equipment subject to vibration monitoring", *Journal of Quality in Maintenance Engineering,* **5**(3), pp. 192-202 (1999).
18. Jardine, A.K.S.; Makis, V.; Banjevic, D.; Braticevic, D. and Ennis, M. "A decision optimization model for condition-based maintenance", *Journal of Quality in Maintenance Engineering,* **4**(2), pp. 115-121 (1998).
19. Makis, V. and Jardine, A.K.S. "Optimal replacement in the proportional hazards model", *INFOR,* **30**, pp. 172-183 (1992).
20. Cox, D.R. and Oakes, D., *Analysis of Survival Data,* London, Chapman and Hall (1984).
21. Aven, T. and Bergman, B. "Optimal replacement times: A general set-up", *Journal of Applied Probability,* **23**, pp. 432-442 (1986).

ضمیمه ۱

$$R(j,i,\Delta)=exp\left\{-\int_{j\Delta}^{(j+1)\Delta} e^{\gamma Z(s)}h_0(s)\,ds\right\}=$$

$$exp\left\{-\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0} e^{\gamma Z(s)}h_0(s)\,ds-\int_{j\Delta+\Delta_0}^{j\Delta+2\Delta_0} e^{\gamma Z(s)}h_0(s)\,ds-\int_{j\Delta+2\Delta_0}^{j\Delta+3\Delta_0} e^{\gamma Z(s)}h_0(s)\,ds-\cdots-\int_{j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{(j+1)\Delta} e^{\gamma Z(s)}h_0(s)\,ds\right\}=$$

$$exp\left\{-\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0} e^{\gamma Z(j\Delta)}h_0(s)\,ds-\int_{j\Delta+\Delta_0}^{j\Delta+2\Delta_0} e^{\gamma Z(j\Delta+\Delta_0)}h_0(s)\,ds-\int_{j\Delta+2\Delta_0}^{j\Delta+3\Delta_0} e^{\gamma Z(j\Delta+2\Delta_0)}h_0(s)\,ds-\cdots-\int_{j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{(j+1)\Delta} e^{\gamma Z\left(j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0\right)}h_0(s)\,ds\right\}=$$

$$exp\left\{-e^{\gamma Z(j\Delta)}\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0} h_0(s)\,ds-e^{\gamma Z(j\Delta+\Delta_0)}\int_{j\Delta+\Delta_0}^{j\Delta+2\Delta_0} h_0(s)\,ds-e^{\gamma Z(j\Delta+2\Delta_0)}\int_{j\Delta+2\Delta_0}^{j\Delta+3\Delta_0} h_0(s)\,ds-\cdots-e^{\gamma Z\left(j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0\right)}\int_{j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{(j+1)\Delta} h_0(s)\,ds\right\}=$$

$$exp\left\{\begin{array}{l}-e^{\gamma i}\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0} h_0(s)\,ds-\left\{\left\{\begin{array}{l}P\left(Z(j\Delta+\Delta_0)=i\,|\,T>j\Delta+\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma i}+\\P\left(Z(j\Delta+\Delta_0)=i+1\,|\,T>j\Delta+\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma(i+1)}+\\\cdots+\\P\left(Z(j\Delta+\Delta_0)=m\,|\,T>j\Delta+\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma m}\end{array}\right\}\int_{j\Delta+\Delta_0}^{j\Delta+2\Delta_0} h_0(s)\,ds\right\}-\\\left\{\left\{\begin{array}{l}P\left(Z(j\Delta+2\Delta_0)=i\,|\,T>j\Delta+2\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma i}+\\P\left(Z(j\Delta+2\Delta_0)=i+1\,|\,T>j\Delta+2\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma(i+1)}+\\\cdots+\\P\left(Z(j\Delta+2\Delta_0)=m\,|\,T>j\Delta+2\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma m}\end{array}\right\}\int_{j\Delta+2\Delta_0}^{j\Delta+3\Delta_0} h_0(s)\,ds\right\}-\\\cdots-\left\{\left\{\begin{array}{l}P\left(Z\left(j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0\right)=i\,\middle|\,T>j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma i}+\\P\left(Z\left(j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0\right)=i+1\,\middle|\,T>j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma(i+1)}+\\\cdots+\\P\left(Z\left(j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0\right)=m\,\middle|\,T>j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma m}\end{array}\right\}\int_{j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{(j+1)\Delta} h_0(s)\,ds\right\}\end{array}\right\}=$$

$$exp\left\{\begin{array}{l}-e^{\gamma i}\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0} h_0(s)\,ds-\sum_{l=i}^{m}P\left(Z(j\Delta+\Delta_0)=l\,|\,T>j\Delta+\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma l}\int_{j\Delta+\Delta_0}^{j\Delta+2\Delta_0} h_0(s)\,ds-\\\sum_{l=i}^{m}P\left(Z(j\Delta+2\Delta_0)=l\,|\,T>j\Delta+2\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma l}\int_{j\Delta+2\Delta_0}^{j\Delta+3\Delta_0} h_0(s)\,ds-\cdots-\\\sum_{l=i}^{m}P\left(Z\left(j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0\right)=l\,\middle|\,T>j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0,Z(j\Delta)=i\right)e^{\gamma l}\int_{j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{(j+1)\Delta} h_0(s)\,ds\end{array}\right\}=$$

$$exp\left\{-e^{\gamma i}\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0} h_0(s)\,ds-\sum_{l=i}^{m}P_{il}^{(0)}e^{\gamma l}\int_{j\Delta+\Delta_0}^{j\Delta+2\Delta_0} h_0(s)\,ds-\sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{2}e^{\gamma l}\int_{j\Delta+2\Delta_0}^{j\Delta+3\Delta_0} h_0(s)\,ds-\cdots-\sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{\frac{\Delta}{\Delta_0}-1}e^{\gamma l}\int_{j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{(j+1)\Delta} h_0(s)\,ds\right\}=$$

$$exp\left\{-e^{\gamma i}\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0} h_0(s)\,ds-\sum_{f=1}^{\frac{\Delta}{\Delta_0}-1}\sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{f}e^{\gamma l}\int_{j\Delta+f\Delta_0}^{j\Delta+(f+1)\Delta_0} h_0(s)\,ds\right\}=$$

$$exp\left\{-e^{\gamma i}\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0} h_0(s)\,ds-\sum_{f=1}^{\frac{\Delta}{\Delta_0}-1}\sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{f}e^{\gamma l}\int_{j\Delta+f\Delta_0}^{j\Delta+(f+1)\Delta_0}\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{s}{\eta}\right)^{\beta-1}ds\right\}=$$

$$exp\left\{-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)-\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\sum_{f=1}^{\frac{\Delta}{\Delta_0}-1}\sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{f}e^{\gamma l}\left((j\Delta+(f+1)\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta+f\Delta_0)^{\beta}\right)\right\}$$

ضمیمه ۲

$$\int_{0}^{\Delta}R(j,i,s)\,ds=\int_{0}^{\Delta_0}R(j,i,s)\,ds+\int_{\Delta_0}^{2\Delta_0}R(j,i,s)\,ds+\cdots+\int_{\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{\Delta}R(j,i,s)\,ds=$$

$$\int_{0}^{\Delta_0}exp\left\{-\int_{j\Delta}^{j\Delta+s}e^{\gamma Z(t)}h_0(t)\,dt\right\}ds+\int_{\Delta_0}^{2\Delta_0}exp\left\{-\int_{j\Delta}^{j\Delta+s}e^{\gamma Z(t)}h_0(t)\,dt\right\}ds+\cdots+\int_{\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{\Delta}exp\left\{-\int_{j\Delta}^{j\Delta+s}e^{\gamma Z(t)}h_0(t)\,dt\right\}ds=$$

$$\int_{0}^{\Delta_0}exp\left\{-e^{\gamma Z(j\Delta)}\int_{j\Delta}^{j\Delta+s}h_0(t)\,dt\right\}ds+\int_{\Delta_0}^{2\Delta_0}exp\left\{-\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0}e^{\gamma Z(j\Delta)}h_0(t)\,dt-\int_{j\Delta+\Delta_0}^{j\Delta+s}e^{\gamma Z(j\Delta+\Delta_0)}h_0(t)\,dt\right\}ds+\cdots+$$

$$\int_{\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{\Delta}exp\left\{-\int_{j\Delta}^{j\Delta+\Delta_0}e^{\gamma Z(j\Delta)}h_0(t)\,dt-\int_{j\Delta+\Delta_0}^{j\Delta+2\Delta_0}e^{\gamma Z(j\Delta+\Delta_0)}h_0(t)\,dt-\cdots-\int_{j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{j\Delta+s}e^{\gamma Z\left(j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0\right)}h_0(t)\,dt\right\}ds=$$

$$\int_{0}^{\Delta_0}exp\left\{-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+s)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)\right\}ds+$$

$$\int_{\Delta_0}^{2\Delta_0}exp\left\{-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)-\sum_{l=i}^{m}P_{il}^{(0)}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+s)^{\beta}-(j\Delta+\Delta_0)^{\beta}\right)\right\}ds+\cdots+$$

$$\int_{\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0}^{\Delta}exp\left\{\begin{array}{l}-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)-\sum_{l=i}^{m}P_{il}^{(0)}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+2\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta+\Delta_0)^{\beta}\right)-\cdots-\\\sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{\frac{\Delta}{\Delta_0}-1}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+s)^{\beta}-\left(j\Delta+\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}-1\right)\Delta_0\right)^{\beta}\right)\end{array}\right\}ds=$$

$$\int_{0}^{\Delta_0}exp\left\{-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+s)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)\right\}ds+$$

$$\sum_{n=1}^{\frac{\Delta}{\Delta_0}-1}\int_{n\Delta_0}^{(n+1)\Delta_0}exp\left\{\begin{array}{l}-e^{\gamma i}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta)^{\beta}\right)-\sum_{f=1}^{n-1}\sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{f}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+(f+1)\Delta_0)^{\beta}-(j\Delta+f\Delta_0)^{\beta}\right)-\\\sum_{l=i}^{m}\left(P^{(0)}\right)_{il}^{n}e^{\gamma l}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta}\left((j\Delta+s)^{\beta}-(j\Delta+n\Delta_0)^{\beta}\right)\end{array}\right\}ds$$