مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۲)
دوره‌ی ۱ - ۲۹، شماره‌ی ۲، ص. ۲۵-۳۹

Original Article

ارائه‌ی یک روش آزادسازی لاگرانژی برای یک مدل جدید تولید ـ توزیع در زنجیره‌ی تأمین دوسطحی چندمحصولی

روح‌ا... ذوالفقاری (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

فریبرز جولای* (استاد)
دانشکده‌ی فنی، دانشگاه تهران

یاسر موحدی (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

در این نوشتار یک زنجیره‌ی تأمین دو سطحی ــ شامل چندین مرکز توزیع، چند کارخانه با ظرفیت محدود و چند تأمین کننده ــ به‌صورت یکپارچه مدل‌سازی شده است به‌گونه‌یی که در آن چند محصول، شامل تعدادی قطعه، در جریان است. تقاضای مراکز توزیع از توزیع نرمال برخوردار است و مدل ارائه‌شده به‌صورت سلسله‌مراتبی، مسئله را به دو سطح استراتژیک و عملیاتی تقسیم می‌کند. در سطح اول، با استفاده از رویکرد لاگرانژ، مسئله‌ی آزادسازی و به چهار زیرمسئله تقسیم می‌شود. با بررسی شرایط بهینگی زیرمسئله‌ها، روش‌های حل بهینه و الگوریتم ژنتیک برای آن‌ها ارائه می‌شود. جواب‌های حاصل از حل مسئله‌ی سطح اول به‌عنوان ورودی سطح دوم در نظرگرفته می‌شود؛ مدل سطح دوم نیز که یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی است توسط نرم‌افزارهای تجاری قابل حل است.

واژگان کلیدی: مدیریت زنجیره‌ی تأمین، تولید ـ توزیع، لاگرانژ، ژنتیک، بهینه‌سازی زیرگرادیان، سلسله‌مراتبی.

roohalah`z@aut.ac.ir
fjolai@ut.ac.ir
ymovahedi@aut.ac.ir

۱. مقدمه

با توجه به سرعت تغییر و تحول در جهان امروز، هر سیستم نیازمند بهره‌برداری بیشینه از امکاناتی است که در اختیارش قرارگرفته است. همچنین غالب فرایندها به‌طور اشتراکی اجرا می‌شود و کم‌تر فعالیتی را می‌توان مثال زد که به‌صورت مستقل عمل کند و بی‌نیاز از همکاری با سیستم‌های پیرامون خود باشد.

زنجیره‌های تأمین از سطوحی تشکیل می‌شوند که در آنها مواد اولیه و منابع مورد نیاز را از تأمین‌کنندگان می‌گیرند و در مراکز تولیدی به کالا یا خدمت مورد نیاز تبدیل می‌کنند، و نهایتاً از طریق سیستم‌های توزیع آن را در اختیار مشتری نهایی قرار می‌دهند. مدیریت زنجیره‌ی تأمین نیز تحلیلی نظام‌مند است که عهده‌دار هماهنگی و همزمان‌سازی جریان منابع و اطلاعات در زنجیره‌ی تأمین‌کنندگان، تسهیلات تولیدی[۱]، مراکز توزیع و مشتریان است. با ارزیابی طراحی سیستم در زنجیره‌ی تأمین، سطوح اخذ تصمیم در هر زنجیره‌ی تأمین به سه دسته تقسیم‌بندی شد:[۱]

الف) **سطح استراتژیک**، که در آن تصمیمات بلندمدت اتخاذ می‌شود و معمولاً این تصمیمات هزینه‌های بسیار زیادی را شامل می‌شوند.

ب) **سطح تاکتیکی**، که در آن تصمیمات میان‌مدت اتخاذ می‌شود. دوره‌های زمانی در این تصمیمات محدود به یک تا چند ماه است.

ج) **سطح عملیاتی**، که در آن تصمیمات اتخاذشده کوتاه‌مدت است و به برنامه‌ریزی‌های روزانه و هفتگی اختصاص دارد.

در برنامه‌ریزی زنجیره‌ی تأمین می‌توان با تفکیک اجزای زنجیره، آن را به مسائلی با ابعاد کوچک‌تر تبدیل، و نسبت به حل آن اقدام کرد. اما جدا در نظر گرفتن اجزای زنجیره‌ی تأمین باعث در نظر نگرفتن روابط بین اجزای مختلف می‌شود. این امر ممکن است به افزایش هزینه‌ها، کاهش کارایی زنجیره، افزایش زمان عرضه، رقابت‌های داخلی و... بینجامد. به‌همین منظور از رویکرد یکپارچه‌سازی در زنجیره‌ی تأمین استفاده می‌شود؛ یعنی ضمن برنامه‌ریزی همزمانِ اجزای زنجیره، تا حد امکان به تعاملات بین آنها توجه می‌شود.

با توجه به جهانی‌شدن و ارتباطات تنگاتنگ بین شرکای تجاری، نیاز روزافزون به موضوع برنامه‌ریزی و پیکره‌بندی زنجیره‌ی تأمین بیش از پیش احساس می‌شود. زنجیره‌ی تأمین پس از طراحی اولیه نیز ممکن است نیازمند برنامه‌ریزی و پیکره‌بندی مجدد باشد. این فرایند چنان نیست که صرفاً یک‌بار، آن‌هم در ابتدای طراحی

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۱۱/۳، اصلاحیه ۱۳۹۰/۶/۱، پذیرش ۱۳۹۰/۶/۸.

شبکه‌ی تأمین اتفاق بیفتد. تغییر الگو و پراکندگی تقاضا، تغییر مشخصات محصول، و تغییر سیاست‌ها و استراتژی‌های سازمان ازجمله عواملی هستند که ممکن است به پیکره‌بندی مجدد زنجیره‌ی تأمین بینجامند.

محققین هزینه‌های زنجیره‌ی تأمین را در سه دسته: هزینه‌ی موجودی‌ها، تسهیلات، و حمل‌ونقل تقسیم‌بندی کردند.[2] در مطالعه‌یی دیگر نیز، فرایند برنامه‌ریزی در زنجیره‌ی تأمین به دو فرایند اساسی «برنامه‌ریزی تولید و کنترل موجودی» و «لجستیک و توزیع» تقسیم شد.[3] برنامه‌ریزی تولید به تعیین برنامه‌های تولیدی و کنترل موجودی‌ها می‌پردازد، و لجستیک و توزیع نیز به نحوه‌ی حمل‌ونقل و توزیع محصولات در طول زنجیره‌ی تأمین مربوط می‌شود.

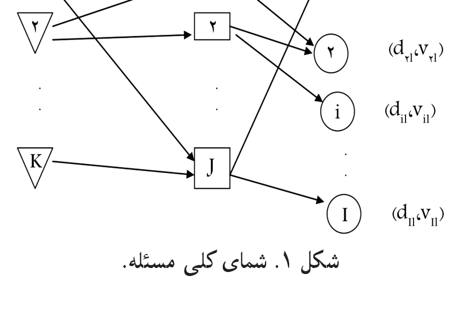
مراحل زنجیره‌ی تأمین نیز به سه مرحله ــ تدارک مواد، تولید و توزیع ــ تقسیم شده است. با بررسی هزینه‌های زنجیره‌ی تأمین، تأثیرات متغیرهای مشخص (هزینه‌ی حمل‌ونقل واحد محصول و هزینه‌های ثابت تسهیلات) در ساختار زنجیره‌ی تأمین بهینه بررسی شده است.[4] در بررسی شبکه‌ی تأمین چندکالاییِ سه‌سطحی،[5] از روش‌های آزادسازی لاگرانژ[1] و بهینه‌سازی زیرگرادیان[3] برای به دست آوردن کران پایین مقدار تابع هدف بهینه استفاده شد؛ همچنین برای یافتن جواب‌های موجه و کران بالا از روش هیوریستیک استفاده شد. مطالعات محققین نشان داده است که اجزاء زنجیره‌ی تأمین ذاتاً خواهان عملکرد مستقل‌اند و هریک میل دارند مستقل از دیگری و با توجه به منافع خود نسبت به نگه‌داری موجودی و تبیین سیاست‌های توزیع اقدام کنند.[6] آنان مسئله‌ی تولید ــ توزیع را به‌گونه‌یی مدل کردند که ضمن مجزا درنظرگرفتن سه بخش تأمین، تولید و توزیع، ارتباط آنها را با یکدیگر مورد بررسی قرار دادند.[7] این محققین از ترکیب روش‌های ریاضی و شبیه‌سازی برای یکپارچه کردن این سه بخش استفاده کردند. در مطالعه‌یی دیگر نیز یک مدل ترکیبی برنامه‌ریزی ریاضی و شبیه‌سازی ارائه شد[8] که به بررسی مسئله‌ی تولید ــ توزیع چندمحصولی و چندپریودی می‌پرداخت. یک مسئله‌ی چندمحصولی، چندکارخانه‌یی و چنددوره‌یی نیز به‌صورت مدل یک‌پارچه‌ی تولید ــ توزیع مورد بررسی قرارگرفت.[9] در بررسی شبکه زنجیره‌ی تأمینی شامل تأمین‌کنندگان، کارخانجات، مراکز توزیع و نواحی تقاضا،[10] یک مسئله‌ی چندمحصولی با تقاضای غیرقطعی، و شامل چند ماده‌ی اولیه که ظرفیت تأمین‌کنندگان و مراکز توزیع آن محدود بود بررسی شد. در پژوهشی دیگر، سیستمی برای شبکه‌ی زنجیره‌ی تأمین طراحی شد[11] که شامل چهار زیربخش بود: ۱. طراحی بهینه‌ی شبکه‌ی زنجیره‌ی تأمین؛ ۲. برنامه‌ریزی عملیات تولید ــ توزیع از تأمین‌کنندگان مواد اولیه تا مشتریان؛ ۳. مدیریت داده؛ ۴. مدیریت مدل. از روش حل لاگرانژ و روش یکپارچه‌سازی برای مسئله‌ی طراحی شبکه‌ی تأمین، و از الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی تولید ــ توزیع استفاده شد. همچنین یک مدل ترکیبی ریاضی ــ شبیه‌سازی برای حل مسئله‌ی تولید ــ توزیع با در نظر گرفتن محدودیت‌های ظرفیت ارائه شد.[12] در این مدل یک مسئله‌ی تولید ــ توزیع چندپریودی، چندمحصولی و چندکارخانه‌یی مورد بحث قرارگرفته است. برخی از محققین زنجیره‌ی تأمینی متشکل از تعدادی مراکز تولید، مراکز توزیع و خرده‌فروشی را بررسی کرده‌اند.[13] پژوهشگران همزمان با مکان‌یابی تسهیلات، تصمیمات کنترل موجودی ــ نظیر اندازه‌ی سفارش اقتصادی، نقطه‌ی سفارش و موجودی اطمینان ــ را در طراحی شبکه توزیع اتخاذ کردند.[14] آنان شبکه‌یی را، متشکل از تعدادی تولیدکننده، در نظر گرفته‌اند که باید تقاضای مشتریان را با ظرفیت تولیدی محدود به‌طور کامل تأمین کنند.[15] به‌علاوه، ضمن مجاز ندانستن کمبود، از روش فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی برای وزن‌دهی به اهداف، و از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل خطی استفاده کردند.

محققین بیان کردند که مسئله‌ی تولید ــ توزیع زنجیره‌ی تأمین را می‌توان با رویکردهای مختلفی مدل کرد.[16] در این مدل یک مسئله‌ی چندهدفه، چندمحصولی و چندپریودی مورد بررسی قرارگرفت. همچنین یک مسئله‌ی تولید ــ توزیع چندمحصولی و چندکارخانه‌یی و چندپریودی مورد بحث قرار گرفت[17] که در آن پارامترهای ظرفیت ماشین‌آلات، نیروی کار در دسترس، و نیز تقاضای بازار ــ با توجه به عدم قطعیت آنها ــ را به‌صورت فازی در نظر گرفتند. در مدل‌سازی مسئله فرض بر آن بوده است که کلیه‌ی توابع هدف فازی و خطی است و مقادیر پارامترهای هزینه که در توابع هدف و محدودیت‌ها به کار می‌روند در افق زمانی مشخص است.

در نوشتار حاضر، مسئله‌ی مورد بحث زنجیره‌ی تأمینی است که مراکز توزیع، تولیدکنندگان و تأمین‌کنندگان را در بر می‌گیرد. در تعریف کلیِ مسئله می‌توان گفت: در زنجیره‌ی تأمینی که شامل یک سری انبار به‌عنوان مرکز توزیع، یک سری محل بالقوه برای تأسیس کارخانه‌ها، و یک سری تأمین‌کننده است، می‌خواهیم بدانیم که چه کارخانه‌هایی را باید مستقر کنیم؛ هر انبار محصولاتش را باید از کجا تأمین کند، هر کارخانه‌یی که تأسیس می‌شود قطعات و مواد اولیه‌اش را باید از کجا بخرد؛ و در هر دوره‌ی زمانی چه مقدار از چه محصولی برای مصرف در چه دوره‌یی در هر کارخانه باید تولید شود. البته این خواسته‌ها در چهارچوب محدودیت‌هایی از قبیل محدودیت فضای انبار در مراکز توزیع و کارخانه‌ها، محدودیت ظرفیت تولید، تک‌منبعی بودن تأمین محصول از کارخانه‌ها، و تأمین قطعه از تأمین‌کنندگان شکل می‌گیرد.

از ویژگی‌های دیگر این مدل غیر قطعی بودن تقاضای مراکز توزیع برای محصول است که عدم قطعیت را بر شبکه‌ی تأمین تحمیل می‌کند. همچنین نگرش‌های موجودی و سفارش‌دهی و نگرش‌های تولیدی به‌شکل شاخه درختی محصول در مدل گنجانده شده است.

شمای کلی این مدل در شکل ۱ نشان داده شده است. مطابق با این شمای کلی، تقاضای مراکز توزیع با میانگین و واریانس مربوطه به تفکیک محصولات نشان داده شده است که هر مرکز توزیع می تواند این تقاضا را از یک یا چند کارخانه تامین کند اما بایستی در نظر داشت که فرض شده، هر مرکز توزیع هر محصول خود را فقط از طریق یک کارخانه تامین کند. هر کارخانه نیز می تواند با توجه به محصولات مورد نیاز و ساختار شاخه درختی هر محصول، نیاز خود به قطعات را از طریق یک یا چند تامین کننده مرتفع سازد. در این مورد نیز فرض شده که هر تامین کننده توان تامین کلیه قطعات مورد نیاز هر محصول را دارا می باشد و هر کارخانه بایستی تمامی قطعات مورد نیاز هر محصول را از طریق یک تامین کننده تامین کند. توضیحات بیشتر در خصوص جزئیات مدل و سایر فرضیات در بخشهای بعدی آمده است.



شکل ۱. شمای کلی مسئله.

۲. طراحی مدل

۱.۲. رویکرد مدل‌سازی

با توجه به پیچیدگی‌های مسئله‌ی مورد بحث، از رویکرد سلسله‌مراتبی استفاده شده است. در این رویکرد مسئله به دو مسئله‌ی سطح اول و سطح دوم تقسیم شده است. در سطح اول تصمیماتی که اتخاذ می‌شود بیشتر از نوع تصمیمات استراتژیک است و در سطح دوم تصمیمات تاکتیکی و عملیاتی اتخاذ می‌شود. نحوه‌ی عملکرد به این صورت است که پس از حل کردن مدل سطح اول، از خروجی‌های آن به‌عنوان پارامترهای ورودی سطح دوم استفاده می‌شود. عواملی پیچیدگی این مدل عبارت‌اند از:

- ابعاد مسئله؛
- تداخل دوره‌های زمانی سفارش‌دهی، کنترل موجودی و دوره‌های زمانی تولید؛
- گستردگی سطوح تصمیم‌گیری شاملِ تصمیمات استراتژیک تا تصمیمات عملیاتی؛
- غیرخطی بودن تابع هدف؛
- غیرقطعی بودن فضای تصمیم.

۲.۲. طراحی مدل سطح اول

در این سطح از مدل‌سازی اتخاذ تصمیمات استراتژیک مطرح می‌شود. مدلی در این سطح طراحی شده که مباحث مربوط به موجودی‌ها و شاخه‌درختی محصولات را پوشش می‌دهد و خروجی‌های اصلی آن نیز عبارت است از تعیین کارخانجاتی که باید ایجاد شوند، نحوه‌ی تخصیص مراکز توزیع به آنها، و نحوه‌ی سفارش‌دهی به تأمین‌کنندگان. فرضیات اساسی این مسئله نیز عبارت‌اند از:

- تقاضای مراکز توزیع از توزیع نرمال با میانگین و واریانس معین پیروی می‌کند؛
- هر مرکز توزیع تقاضای خود برای هر قطعه را فقط می‌تواند از طریق یک کارخانه برآورده کند؛
- همه‌ی تقاضای مراکز توزیع باید برآورده شود؛
- ظرفیت مراکز توزیع در نظرگرفته نمی‌شود (در واقع مراکز توزیع همان نقاط تقاضا هستند)؛
- درکارخانه محصول نهایی نگه‌داری نمی‌شود؛
- ظرفیت انبار کارخانه‌ها محدود است؛
- ظرفیت تولید کارخانه‌ها محدود است؛
- هر محصول متشکل از تعدادی قطعه است؛
- هر کارخانه محصول خود را تنها از طریق یک تأمین‌کننده تهیه می‌کند؛
- هزینه‌ی سفارش‌دهی بستگی به تأمین‌کننده ندارد؛
- زمان تدارک هر قطعه بستگی به تأمین کننده ندارد؛
- هر تأمین‌کننده قابلیت تأمین تمامی قطعات را دارد.

در خلال حل این مسئله به دنبال آن هستیم که بدانیم:

- چه کارخانه‌هایی باید استقرار یابند؛
- هر انبار هر محصول خود را از کدام کارخانه بخرد؛
- هر کارخانه قطعات خود را از کدام تأمین‌کننده بخرد؛
- از هر قطعه چه مقداری در انبار هر کارخانه نگه‌داری کنیم.

علائم ریاضی استفاده شده در این مدل نیز عبارت‌اند از:

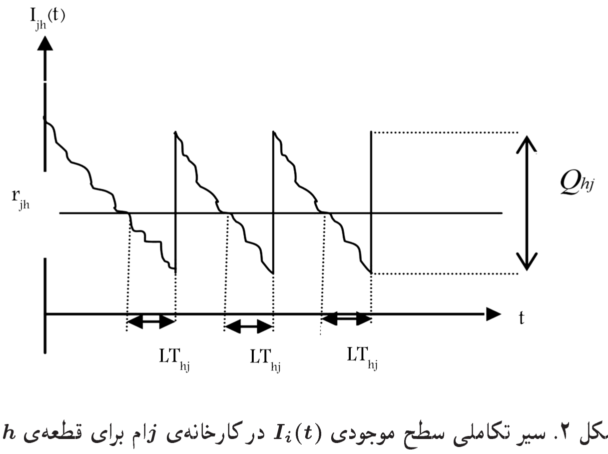
I: مجموعه مراکز توزیع؛
J: مجموعه کارخانه‌ها؛
H: مجموعه قطعات؛
K: مجموعه تأمین‌کنندگان؛
L: مجموعه محصولات؛
TC_{ijl}: هزینه‌ی حمل هر واحد از محصول l از کارخانه j به مرکز توزیع i؛
TC_{hjk}: هزینه‌ی حمل هر واحد قطعه h از تأمین‌کننده k به کارخانه j؛
HC_{hj}: هزینه‌ی نگه‌داری یک واحد قطعه h درکارخانه j در واحد زمان؛
OC_{hj}: هزینه‌ی سفارش‌دهی برای قطعه h درکارخانه j؛
LT_{hj}: زمان تدارک تأمین قطعه h درکارخانه j؛
F_j: هزینه‌ی تأسیس کارخانه در سایت j؛
s_h: فضای مورد نیاز یک واحد قطعه h؛
b_{hl}: تعداد قطعه h در یک واحد محصول l؛
Cap_{2j}: ظرفیت انبار کارخانه در سایت j؛
Cap_{1j}: ظرفیت تولید کارخانه j؛
μ_{il}: میانگین تقاضای مرکز توزیع i برای محصول l؛
σ_{il}: انحراف معیار تقاضای مرکز توزیع i برای محصول l؛
TH: افق برنامه.

و متغیرهای استفاده شده عبارت‌اند از:

x_j: اگر در سایت j انبار تأسیس شود برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۰ است؛
y_{ijl}: اگر تقاضای مرکز توزیع i برای محصول l توسط کارخانه j تأمین شود برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۰ است؛
zh_{jk}: اگر تقاضای کارخانه j برای قطعه‌ی h توسط تأمین‌کننده‌ی k تأمین شود برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۰ است؛
D_{hj}: میانگین تقاضای کارخانه j برای قطعه h؛
V_{hj}: واریانس تقاضای کارخانه j برای قطعه h.

۱.۲.۲. خط مشی موجودی

فرض می‌شود که در هر کارخانه از j مرور پیوسته‌ی موجودی و خط مشی (Q_{hj}, r_{hj}) برای برآورده کردن تقاضای احتمالی استفاده می‌شود که در آن Q_{hj} مقدار ثابت سفارش درکارخانه‌ی jام برای قطعه‌ی hام است. سیر تکاملی سطح موجودی در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. سیر تکاملی سطح موجودی $I_i(t)$ درکارخانه‌ی jام برای قطعه‌ی hام.

چنان که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، وقتی سطح موجودی زیر r_{hj} (نقطه‌ی سفارش مجدد[۴]) قرار می‌گیرد، سفارشی به‌اندازه‌ی Q_{hj} داده می‌شود که بعد از LT_{hj} واحد زمانی می‌رسد؛ این سیاست برای تقاضاهای ارضانشده جریمه‌یی در نظر نمی‌گیرد. یادآور می‌شود که LT_{hj} زمانِ تدارک[۵] قطعه‌ی h برای کارخانه‌ی بالقوه‌ی j است، و به فاصله‌ی زمانی بین سفارش قطعه‌ی h از کارخانه‌ی j تا دریافت آن اطلاق می‌شود.

اگر $D(LT_{hj})$ مقدار تقاضای تصادفی از قطعه‌ی hام درکارخانه‌ی j در زمان LT_{hj} و $(1-\alpha)$ احتمالی باشد که به‌عنوان سطح خدمت برای سیستم شناخته می‌شود، آنگاه محدودیت سطح خدمت را می‌توان چنین بیان کرد:

$$P(D(LT_{hj}) \leq r_{hj}) = 1 - \alpha \qquad (۱)$$

که در آن r_{hj} نقطه‌ی سفارش مجدد قطعه‌ی h درکارخانه‌ی j است.

اگر فرض شود که تقاضای احتمالی از توزیع نرمال تبعیت می‌کند، r_{hj} را می‌توان چنین بیان کرد:

$$r_{jh} = D_{hj} * LT_{hj} + K_{1-\alpha} SD_{hj} \sqrt{LT_{hj}} \qquad (۲)$$

که در آن $K_{1-\alpha}$ مساحت زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد تا احتمال $1-\alpha$ است و برای کل شبکه مقداری ثابت است؛ به‌همین دلیل از این پس، این پارامتر را با K نشان می‌دهیم. همچنین SD_{hj} انحراف معیار تقاضای کارخانه jام برای قطعه‌ی hام است و بعد از این واریانس تقاضای کارخانه‌ی jام برای قطعه‌ی hام را با V_{hj} نشان خواهیم داد.

۲.۲.۲. ارائه‌ی مدل سطح اول

اگر HC_{hj} هزینه‌ی نگه‌داری هر قطعه‌ی h در واحد زمان درکارخانه‌ی j باشد، آنگاه متوسط نرخ نگه‌داری برای هر قطعه‌ی hام درکارخانه‌ی j برابر است با:

$$HC_{hj} * Q_{hj}/2 + HC_{hj} * K\sqrt{LT_{hj}}\sqrt{V_{hj}} \qquad (۳)$$

که عبارت اولِ آن بیانگر هزینه‌ی متوسط نگه‌داری مقدار سفارش Q_{hj} است و عبارت دوم آن نیز متوسط هزینه به‌دلیل نگه‌داری ذخیره‌ی ایمنی[۶] درکارخانه‌ی jام از قطعه‌ی hام است.

اگر OC_{hj} هزینه‌ی سفارش‌دهی در سایت بالقوه‌ی کارخانه j از قطعه‌ی h باشد و TC_{hjk} هزینه‌ی حمل‌ونقل یک واحد از قطعه‌ی h توسط تأمین‌کننده‌ی k به سایت بالقوه‌ی کارخانه‌ی jام باشد و T_{hj} زمان بین دو سفارش متوالی در سایت بالقوه‌ی کارخانه‌ی jام برای قطعه‌ی h باشد، هزینه‌ی عملیات در طی این پریود عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned}&(TC_{hjk} * Q_{hj} + OC_{hj}) +\\ &(HC_{hj} * Q_{hj}/2 + HC_{hj} * k\sqrt{LT_{hj}}\sqrt{V_{hj}}) * T_{hj}\end{aligned} \qquad (۴)$$

سپس اگر رابطه‌ی ۴ را بر T_{hj} (که مساوی Q_{hj}/D_{hj} است) تقسیم کنیم، هزینه‌ی اتفاق افتاده درکارخانه‌ی j برای قطعه‌ی h عبارت است از:

$$\begin{aligned}&(TC_{hjk} + OC_{hj}/Q_{hj}) * D_{hj} + HC_{hj} * Q_{hj}/2\\ &+HC_{hj} * k\sqrt{LT_{hj}}\sqrt{V_{hj}}\end{aligned} \qquad (۵)$$

این رابطه بیانگر هزینه‌ی سیستم برای قطعه‌ی h است و اگر بخواهیم هزینه‌ی کلی سیستم را در نظر بگیریم باید هزینه‌های رخ داده بین کارخانه‌ها و مراکز توزیع را نیز در نظر بگیریم؛ این هزینه‌ها صرفاً شامل هزینه‌ی حمل محصولات به انبارهاست و چنین نشان داده می‌شود:

$$TC_{ijl} * d_{il} * y_{ijl} \qquad (۶)$$

با توجه به توضیحات بالا هزینه‌ی کل سیستم تولید ـ توزیع مورد بحث مطابق رابطه‌ی ۷ است:

$$\begin{aligned}&\sum_j F_j.x_j + TH\sum_i\sum_j\sum_l TC_{ijl}.y_{ijl}.\mu_{il}\\ &+TH\sum_h\sum_j\sum_k TC_{hjk}.z_{hjk}.D_{hj}\\ &+\sum_h\sum_j\left[\begin{array}{l}TH.(OC_{hj} * D_{hj}/Q_{hj} + HC_{hj} * Q_{hj}/2\\ +HC_{hj} * k\sqrt{LT_{hj}}\sqrt{V_{hj}}\end{array}\right]\end{aligned} \qquad (۷)$$

برای بهینه‌سازی تابع فوق نسبت به Q_{hj}، مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم و فرمول زیر را به دست می‌آوریم. این فرمول بر مدل اقتصادی سفارش‌دهی EOQ نیز تطابق دارد.

$$Q^*_{hj} = \sqrt{\frac{2OC_{hj} * D_{hj}}{HC_{hj}}}$$

در نهایت با توجه به توضیحات ارائه شده، تابع هدف مدل سطح اول عبارت است از:

$$\begin{aligned}\min .z = &\sum_j F_j.x_j + \sum_i\sum_j\sum_l TH.TC_{ijl}.y_{ijl}.\mu_{il}\\ &+\sum_h\sum_j\sum_k TH.TC_{hjk}.z_{hjk}.D_{hj}\\ &+\sum_h\sum_j TH.\sqrt{2.HC_{hj}.OC_{hj}}.\sqrt{D_{hj}}\\ &+\sum_h\sum_j TH.HC_{hj}.k.\sqrt{LT_{hj}}.\sqrt{V_{hj}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&s.t.\\ &1: \sum_j y_{ijl} = 1\\ &2: \sum_k z_{hjk} = x_j\\ &3: \sum_k\sum_h D_{hj}.z_{hjk}.s_h \leq cap^2_j.x_j\\ &4: \sum_l\sum_i y_{ijl}.\mu_{il} \leq cap^1_j.x_j\\ &5: \sum_i\sum_l y_{ijl}.\mu_{il}.b_{hl} = D_{hj}\\ &6: \sum_i\sum_l y_{ijl}.v_i.b^2_{hl} = V_{hj}\\ &7: x_j, y_{ijl}.z_{hjk} \in \{0,1\}\ and\ D_{hj},\ \ V_{hj} \geq 0\end{aligned} \qquad (۸)$$

در این مدل محدودیت ۱ بیانگر تک‌منبعی بودن مراکز توزیع برای تأمین هر محصول است و نیز نشان‌دهنده‌ی این موضوع است که حتماً تقاضای هر مرکز توزیع برای هر محصول باید برآورده شود؛ محدودیت ۲ نشان‌دهنده‌ی تک‌منبعی بودن کارخانه برای تأمین هر قطعه است و این که هر کارخانه‌یی که از آن خرید می‌شود حتماً باید قبلاً

تأسیس شده باشد؛ محدودیت ۳ با توجه به محدود بودن فضای انبارش، ضرورت رعایت این محدودیت را نشان می‌دهد؛ محدودیت ۴ نشان‌گر محدودبودن ظرفیت تولید است و بیان می‌دارد که ظرفیت تولید هر کارخانه باید رعایت شود؛ محدودیت ۵ نشان‌دهنده‌ی وابستگی بین تقاضای قطعات در کارخانه‌ها و تقاضای محصولات در مراکز توزیع است؛ محدودیت ۶ بیان‌گر این وابستگی درخصوص واریانس تقاضای قطعات و واریانس تقاضای محصولات است؛ و نهایتاً محدودیت ۷ نشان‌دهنده‌ی نوع متغیرهای به کار رفته در مدل است.

با توجه به موضوعات مطرح‌شده درخصوص پیچیدگی این مدل، و استفاده از متغیرهای مختلط عدد صحیح و صفر و ۱، و نیز ابعاد بزرگ مسئله حل این مدل به روش‌های حل دقیق امکان‌پذیر نیست؛ در این نوشتار از روش‌های حل تجربی برای حل استفاده شده است.

۳.۲. طرحی مدل سطح دوم

در این مرحله از مدل‌سازی با مسئله‌یی روبه‌رو هستیم که تمامی تصمیمات مکان‌یابی و تخصیص در آن قبلاً اتخاذ شده و محل انبارها، کارخانه‌ها و تأمین‌کنندگان مشخص است. همچنین مشخص است که کدام کارخانه باید به کدام مرکز توزیع محصول بفروشد و کدام تأمین‌کننده به کدام کارخانه باید قطعه بفروشد. حال می‌خواهیم بدانیم:

- در هر دوره‌ی زمانی چه مقدار محصول در ساعات عادی کار تولید کنیم؛
- در هر دوره‌ی زمانی چه مقدار محصول در ساعات اضافه‌کاری تولید کنیم؛
- موجودی انبار مراکز توزیع در انتهای هر دوره به‌ازای هر محصول چقدر باشد.

فرضیات اساسی این سطح از مدل‌سازی به‌شرح زیر است:

- تقاضای هر دوره حتماً باید تأمین شود؛
- زمان Setup در زمان مونتاژ نهفته است؛
- برای تأمین تقاضاها با محدودیت قطعه مواجه نیستیم و این ملزومات در مسئله‌ی سطح اول برآورده شده است؛
- ظرفیت ساعات کار برای ساعات عادی و اضافه کاری در هر دوره محدود است؛
- ظرفیت انبار مراکز توزیع محدود است.

علائم استفاده شده در این مدل عبارت‌اند از:

D_{ilt}: تقاضای مرکز توزیع i برای محصول l در پریود t (درخصوص این پارامتر ورودی حتماً باید رعایت شود که متناسب با تقاضای در نظر گرفته شده در مدل سطح ۱ باشد).

HC_{il}: هزینه‌ی نگه‌داری محصول l در انبار مرکز توزیع i.

T_{jt}: زمان در دست کارخانه j در پریود t در ساعات عادی.

T'_{jt}: زمان در دست کارخانه j در پریود t در ساعات اضافه‌کاری.

N_l: زمان مورد نیاز مونتاژ یک واحد محصول l.

s_l: فضای مورد نیاز برای یک واحد محصول l.

C_{jlt}: هزینه‌ی تولید یک واحد محصول l درکارخانه j در پریود t در ساعات عادی کار.

C'_{jlt}: هزینه‌ی تولید یک واحد محصول l در کارخانه j در پریود t در ساعات اضافه‌کاری.

$cap^{۳}_i$: ظرفیت انبار مرکز توزیع i.

M: یک عدد خیلی بزرگ.

متغیرهای استفاده شده نیز عبارت‌اند از:

I_{ilt}: موجودی پایان دوره t در مرکز توزیع i از محصول l.

x_{ijlt}: مقداری از محصول l که باید درکارخانه j در ساعات عادی کار در پریود t برای ارسال به مرکز توزیع i تولید شود.

x'_{ijlt}: مقداری از محصول l که باید درکارخانه j در ساعات اضافه‌کاری در پریود t برای ارسال به مرکز توزیع i تولید شود.

۱.۳.۲. ارائه‌ی مدل سطح دوم

با توجه به توضیحاتی که در بخش قبل ارائه شد، مدل زیر برای مسئله‌ی سطح دوم طراحی شده است. این مدل یک مدل برنامه‌ریزی تولید است که تابع هدف و محدودیت‌های آن خطی و شامل متغیرهای عدد صحیح است. با توجه به این که این مدل از نظر حل دارای پیچیدگی‌های زیادی نیست (البته ابعاد مسئله می‌تواند بر پیچیدگی‌های حل این مسئله اضافه کند) برای حل آن می‌توان از روش‌های حل دقیقی مانند سیمپلکس استفاده کرد. در این نوشتار برای حل این مدل از نرم‌افزار لینگو ۸ استفاده شده است.

$$
\begin{aligned}
\min .z = & \sum_i \sum_j \sum_l \sum_t [x_{ijlt} * c_{jlt} + x'_{ijlt} * c'_{jlt}] \\
& + \sum_i \sum_l \sum_t I_{ilt} * HC_{il} \\
s.t. & \\
۱ : & I_{ilt-۱} + x_{ijlt} - I_{ilt} = D_{ilt} \\
۲ : & \sum_l \sum_i x_{ijl} * N_l \leq T_{jt} \\
۳ : & \sum_l \sum_i x'_{ijl} * N_l \leq T'_{jt} \\
۴ : & \sum_l I_{ilt} * s_l \leq cap^{۳}_i \\
۵ : & \sum_t [x_{ijlt} + x'_{ijlt}] \leq y_{ijl} * M \\
& x_{ijlt} \ \& \ x'_{ijlt} \ \& \ I_{ilt} \geq ۰
\end{aligned}
\qquad (۹)
$$

در این مدل از y_{ijl}های استخراج شده از مدل سطح اول استفاده می‌شود. یعنی در واقع تخصیص‌های انجام شده در مسئله‌ی سطح اول به‌عنوان پارامترهای ورودی این مدل استفاده می‌شوند.

- تابع هدف: تابع هدف این مدل شامل کمینه‌سازی هزینه‌های تولید در ساعات عادی کار و ساعات اضافه کاری و هزینه‌ی نگه‌داری محصولات در انبار مراکز توزیع است.
- محدودیت‌ها: این مدل شامل ۵ دسته محدودیت است که به‌شرح ذیل هستند.

- محدودیت ۱: این محدودیت بیان‌گر این موضوع است که موجودی در پایان هر دوره باید بالانس باشد و تقاضای هر دوره با استفاده از تولیدات همان دوره و یا موجودی‌های باقی مانده از دوره‌های قبلی تأمین شود.
- محدودیت ۲: این نامعادله بیان‌گر محدودیت ظرفیت ساعات عادی کار در هر دوره است.
- محدودیت ۳: این نامعادله بیان‌گر محدودیت ظرفیت ساعات اضافه کاری در هر دوره است.

- محدودیت ۴: با توجه به محدود بودن ظرفیت انبار مراکز توزیع این محدودیت تضمین می‌کند که تولید به‌نحوی انجام شود که این انبارها گنجایش نگه‌داری محصولات را داشته باشند.
- محدودیت ۵: این محدودیت ارتباط بین مسئله‌ی سطح اول و سطح دوم را تشکیل می‌دهد و تخصیص‌های انجام شده در سطح اول را به این سطح منتقل می‌کند و تضمین می‌کند که تولید در صورتی انجام شود که قبلاً جریان مربوطه ایجاد شده باشد.

۳. ارائه‌ی روش حل

۱.۳. حل مسئله‌ی سطح اول

برای حل مسئله‌ی سطح اول از یک روش فراحسی هیبریدی استفاده شده که طی آن، مسئله‌ی اصلی با استفاده از رویکرد لاگرانژ به چهار زیرمسئله تقسیم، و سپس هریک از این زیرمسئله‌ها حل شده است. برای حل دو عدد از این زیرمسئله‌ها از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است.

۱.۱.۳. فرمول‌سازی قوی لاگرانژ

آزادسازی ضرایب لاگرانژ به‌عنوان روشی برای به دست آوردن حدود بالا (و پایین) برای مقدار تابع هدف مسائل برنامه‌ریزی ریاضی با حل موفقیت‌آمیز مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد در سال ۱۹۷۰، که ابعاد آن در مقایسه با قدرت محاسباتی آن زمان بسیار بزرگ بود، مورد توجه قرارگرفت. با توجه به حجم محاسبات در مسائل بزرگ، به دست آوردن حدود بالا و پایین به‌لحاظ افزایش کاراییِ روش از اهمیت ویژه‌یی برخوردار است. در مسئله‌ی RP به‌شکل: $Z^{RP} = \max\{f(x) : x \in T \subseteq R^n\}$، آزادسازی مسئله‌ی P به‌شکل: $Z^{P} = \max\{c(x) : x \in S \subseteq R^n\}$ است، اگر: اولاً $S \subseteq T$ باشد، یعنی منطقه‌ی موجه مسئله‌ی P زیرمجموعه‌ی منطقه‌ی موجه مسئله‌ی RP باشد؛ ثانیاً مقدار تابع هدف مسئله‌ی RP به‌ازای تمامی نقاط منطقه‌ی موجه مسئله‌ی P بزرگ‌تر از مقدار تابع هدف مسئله‌ی P باشد.

فرمول‌سازی قوی لاگرانژ برای این مسئله با واردکردن محدودیت‌های زیر آغاز می‌شود:

$$\sum_j D_{hj} \leq \sum_i \sum_l b_{hl} * \mu_{il} \tag{۱۰}$$

$$\sum_j V_{hj} \leq \sum_i \sum_l b^2_{hl} * v_{il} \tag{۱۱}$$

عبارت ۱۰ بیان می‌کند که میانگین تقاضای کل کارخانه‌ها برای یک قطعه نمی‌تواند از میانگین تقاضای کل مراکز توزیع برای آن قطعه بیشتر باشد. عبارت ۱۱ نیز بیان می‌کند که واریانس تقاضای کل کارخانه‌ها برای یک قطعه نمی‌تواند از واریانس تقاضای کل مراکز توزیع برای آن قطعه بیشتر باشد. این محدودیت‌ها در مدل کلی زاید است، اما برای زیرمسئله‌های به دست آمده در طی فرایند زاید نیستند. به‌علاوه محدودیت‌های ۵ و ۶ با محدودیت‌های زیر جایگزین می‌شود:

$$\begin{aligned} 5 &: \sum_i \sum_l y_{ijl}.\mu_{il}.b_{hl} \leq D_{hj} \\ 6 &: \sum_i \sum_l y_{ijl}.v_i.b^2_{hl} \leq V_{hj} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

این محدودیت‌ها در حالت بهینگی به‌ازای مقادیر ثابت X_j و y_{ijl} مساوی می‌شوند؛ همچنین محدودیت‌های جدید ۱۰ و ۱۱ در حالت بهینگی به تساوی می‌رسند. بنابراین تغییر در آنها فضای شدنی و بهینگی مسئله را تغییر نمی‌دهد، اما محدودیت‌های جدید در طرح آزادسازی مفیدند.

با حذف محدودیت‌های ۱، ۲، ۵ و ۶ از مجموعه محدودیت‌ها، آنها را به‌ترتیب در ضرایب لاگرانژ α_{il}، β_{hj}، γ_{hj} و θ_{hj} ضرب کرده و به تابع هدف می‌آوریم. مدل ریاضی پس از این تغییرات چنین خواهد شد:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha,\beta,\lambda,\theta) = {} & Min. \sum_j F_j.x_j \\ & + \sum_i \sum_j \sum_l (TH.TC_{ijl}.\mu_{il} - \alpha_{il})\, y_{ijl} \\ & + \sum_i \sum_j \sum_h \sum_l (\mu_{il}.\gamma_{hj} + v_{il}.\theta_{hj}) b_{hl}.y_{ijl} \\ & + \sum_h \sum_j \sum_k (TH.TC_{hjk}.D_{hj} - \beta_{hj}).z_{hjk} \\ & + \sum_h \sum_j TH. \begin{bmatrix} HC_{hj}.k\sqrt{LT_{hj}}\sqrt{V_{hj}} - V_{hj}\theta_{hj} \\ +\beta_{hj} x_{hj} \\ +\sqrt{2HC_{hj}OC_{hj}}\sqrt{D_{hj}} \\ -D_{hj}\gamma_{hj} \end{bmatrix} \\ subject\ to. & \\ & \sum_j D_{hj} \leq \sum_i \sum_l b_{hl} * \mu_{il} \\ & \sum_j V_{hj} \leq \sum_i \sum_l b^2_{hl} * v_{il} \\ & \sum_i \sum_l y_{ijl} * \mu_{il} \leq Cap^1_j * x_j \\ & \sum_k \sum_h D_{hj} * z_{hjk} * s_h \leq Cap^2_j * x_j \\ & x_j, y_{ijl}.z_{hjk} \in \{0,1\}\ and\ D_{hj}, V_{hj} \geq 0 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

۲.۱.۳. طراحی زیرمسئله‌های سطح اول

مسئله‌ی سطح اول برای مقادیر داده شده برای بردارهای $\lambda(\alpha^k, \beta^k, \gamma^k, \theta^k)$ به چهار زیرمسئله تجزیه می‌شود که در آن α، β، γ، θ در تکرار k به‌صورت α^k، β^k، γ^k، θ^k نشان داده می‌شوند.

زیرمسئله‌ی ۱: تعیین میانگین تقاضای قطعات برای کارخانه‌ها. در این زیرمسئله هدف یافتن میانگین تقاضای قطعات برای کارخانه‌هاست، به‌گونه‌یی که تابع هدف غیرخطی ۱۴ کمینه شود و کل تقاضای کارخانه‌ها برای یک قطعه بیشتر از تقاضای مراکز توزیع برای آن قطعه نباشد.

$$\begin{aligned} Min.z = {} & \sum_h \sum_j TH. \left[\sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{D_{hj}} - D_{hj} * \gamma_{hj}\right] \\ s.t & \\ & \sum_j D_{hj} \leq \sum_i \sum_l b_{hl} * \mu_{il} \\ & D_{hj} \geq 0 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

زیرمسئله‌ی ۲: تعیین واریانس تقاضای قطعات برای کارخانه‌ها. در این زیرمسئله هدف یافتن واریانس تقاضای قطعات برای کارخانه‌هاست، به‌گونه‌یی که تابع هدف

غیر خطی ۱۵ کمینه شود و کل واریانس تقاضای کارخانه‌ها برای یک قطعه بیشتر از واریانس تقاضای مراکز توزیع برای آن قطعه نباشد.

$$Min.z = \sum_h \sum_j TH.\left[HC_{hj} * k\sqrt{LT_{hj}}\sqrt{V_{hj}} - V_{hj} * \theta_{hj}\right]$$
$$s.t$$
$$\sum_j V_{hj} \leq \sum_i \sum_l b_{hl}^{2} * v_{il}$$
$$V_{hj} \geq 0 \qquad (15)$$

زیرمسئله‌ی ۳: مکان‌یابی کارخانه‌ها و تخصیص انبارها به آنها. این زیرمسئله عهده‌دار رسالت تعیین تخصیص مراکز توزیع به کارخانه‌هاست و مکان‌یابی کارخانه‌هاست، به‌گونه‌یی که تابع هدف ۱۶ کمینه شود. روش حل این مدل براساس الگوریتم ژنتیک در بخش بعد ارائه شده است. محدودیت‌های این مدل تنها شامل محدودیت ظرفیت منابع، و صفر و ۱ بودن متغیرهای مسئله است. این مدل شباهت زیادی با مدل مکان‌یابی تسهیلات با ظرفیت محدود دارد که درگذشته تحقیقات بسیاری بر روی آن انجام گرفته است.

$$\min .z = \sum_j F_j * x_j + \sum_h \sum_j \beta_{hj} * x_{hj}$$
$$+ \sum_i \sum_j \sum_l (TH * TC_{ijl} * \mu_{il} - \alpha_{il}) * y_{ijl}$$
$$+ \sum_i \sum_j \sum_h \sum_l (\mu_{il} * \gamma_{hj} + v_{il} * \theta_{hj}) * b_{hl} * y_{ijl}$$
$$s.t.$$
$$\sum_i \sum_l y_{ijl} * \mu_{il} \leq Cap_j^{1} * x_j$$
$$x_j, y_{ijl} \in \{0, 1\} \qquad (16)$$

زیرمسئله‌ی ۴: تخصیص کارخانه‌ها به تأمین‌کنندگان. این مسئله یک مسئله‌ی تخصیص است که در آن تعدادی تسهیل مستقر وجود دارد و قرار است با توجه به محدودیت سرویس‌گیرنده‌ها تخصیص صورت گیرد. برای حل این مدل نیز از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است.

$$\min .z = \sum \sum \sum (TH * TC_{hjk} * D_{hj} - \beta_{hj}) * z_{hjk}$$
$$s.t.$$
$$\sum_k \sum_h D_{hj} * z_{hjk} * s_h \leq Cap_j^{2} * x_j$$
$$z_{hjk} \in \{0, 1\} \qquad (17)$$

۳.۱.۳. حل زیرمسئله‌های ۱ و۲

مدل زیرمسئله‌ی ۱ عبارت است از:

$$SP1^k \quad Min. \sum_h \sum_j TH. \left[\begin{array}{l} \sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{D_{hj}} \\ -D_{hj} * \gamma_{hj}^k \end{array} \right]$$
$$s.t.$$
$$\sum_j D_{hj} \leq DT_h$$
$$D_{hj} \geq 0 \qquad (18)$$

که در آن $DT_h = \sum_i \sum_l b_{hl} * \mu_{il}$. تابع هدف این زیرمسئله یک تابع غیرخطی از D_{hj} (میانگین تقاضای قطعات در کارخانه‌ها) است و به تعداد قطعات دارای محدودیت است. این زیرمسئله را می‌توان با توجه به مفاهیم مطرح شده در قضیه‌ی ۱ حل کرد.

قضیه ۱: حل مسئله‌ی $SP1^k$ برای هر قطعه مانند h، کارخانه r_h را در تکرار kام جست‌وجو می‌کند، به‌طوری‌که مقدار $\sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{DT_h} - DT_h * \gamma_{hj}^k$ کمینه شود. برای این کار عبارت $\sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{DT_h} - DT_h * \gamma_{hj}^k$ برای تمامی قطعات و کارخانه‌ها محاسبه شده و ماتریس DD را تشکیل می‌دهد که یک ماتریس $H * J$ است و سپس ماتریس D به‌صورت یک ماتریس $H * J$ فرض می‌شود که همه‌ی درایه‌های آن صفرند، و کم‌ترین مقدار ماتریس DD برای هر قطعه درمورد تمام کارخانه‌ها محاسبه شده است. اگر کم‌ترین مقدار منفی باشد، مجموع تقاضاهای از نوع آن قطعه به این کارخانه تخصیص داده می‌شود و درایه‌ی مربوطه در ماتریس D را مساوی این عدد قرار می‌دهند، ولی اگر کم‌ترین مقدار نامنفی باشد همه‌ی درایه‌های متعلق به این محصول در ماتریس D صفر باقی می‌ماند. به‌عبارت دیگر حل بهینه‌ی ماتریس D چنین است: اگر برای قطعه‌ی h مقدار عبارت $\sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{DT_h} - DT_h * \gamma_{hj}^k$ منفی‌ترین باشد، آنگاه:

$$D_{hj}^k = \begin{cases} DT_h & j = r_h \\ 0 & j \neq r_h \end{cases} \qquad (19)$$

ولی اگر برای قطعه‌ی h مقدار عبارت $\sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{DT_h} - DT_h * \gamma_{hj}^k$ برای همه‌ی کارخانه‌ها نامنفی باشد، آنگاه برای قطعه‌ی h و هر کارخانه $D_{hj}^k = 0$.

مدل زیرمسئله‌ی دوم عبارت است از:

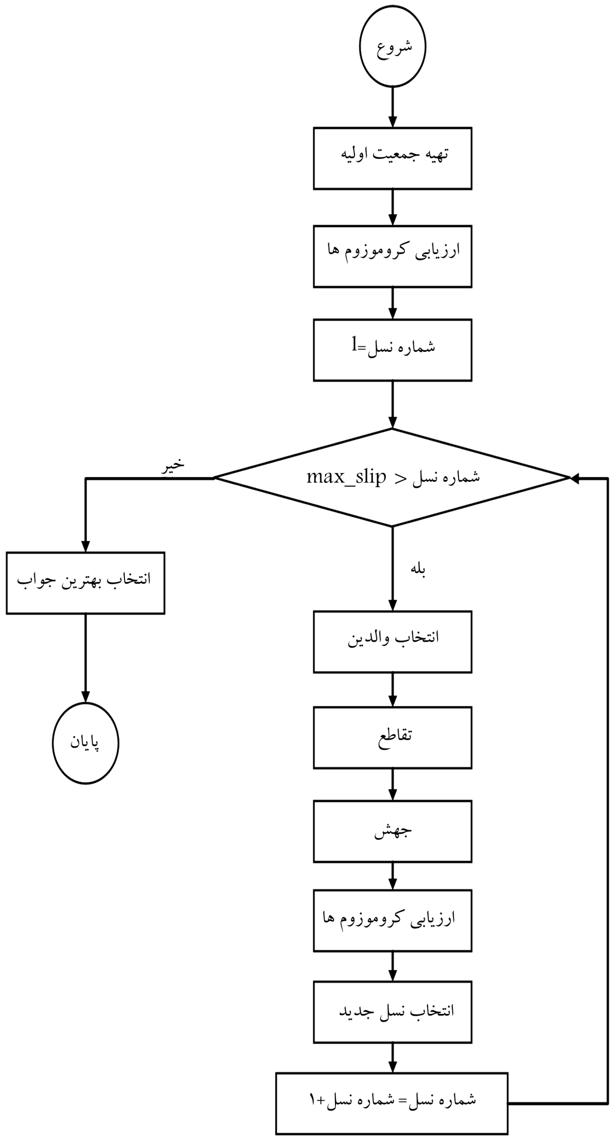
$$SP2^K \quad Min.z = \sum_h \sum_j TH. \left[\begin{array}{l} HC_{hj} * k\sqrt{LT_{hj}}\sqrt{V_{hj}} \\ -V_{hj} * \theta_{hj}^k \end{array} \right]$$
$$s.t$$
$$\sum_j V_{hj} \leq VT_h$$
$$V_{hj} \geq 0 \qquad (20)$$

که در آن $VT_h = \sum_i \sum_l b_{hl}^{2} * v_{il}$. تابع هدف زیرمسئله‌ی ۲ یک تابع غیرخطی از V_{hj} (واریانس تقاضای قطعات در کارخانه‌ها) است و به تعداد قطعات دارای محدودیت است. این مدل با استنتاج قضیه‌یی که برای حل زیرمسئله‌ی ۱ استفاده شد حل می‌شود.

۴.۱.۳. ارائه‌ی الگوریتم ژنتیک حل زیرمسئله‌ها ۳ و ۴

برای حل زیرمسئله‌های ۳ و ۴ از الگوریتم ژنتیک استفاده شده که ساختار کلی آن مطابق شکل ۳ است.

چنان که در این الگوریتم نشان داده شده، ابتدا یک جمعیت اولیه از جواب‌ها تشکیل می‌شود. سپس جواب‌های معادل با این جمعیت اولیه محاسبه می‌شوند؛ چنانچه این جواب‌ها موجه نباشند با استفاده از الگوریتم موجه‌ساز این جواب‌ها را به نزدیک‌ترین جواب موجه تبدیل می‌کنیم. سپس عملگرهای ژنتیک را بر آنها اعمال کرده و نهایتاً نسبت به انتخاب جمعیت جدید اقدام می‌کنیم. برای انجام این امر از تابع برازشی ــ همان تابع هدف زیرمسئله‌ی سوم ــ استفاده می‌کنیم. این عمل را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا به تعداد معینی از نسل‌ها برسیم و پس از



شکل ۳. شمای کلی الگوریتم ژنتیک.

آن از بین جمعیت پایانی بهترین جواب را به‌عنوان جواب مسئله انتخاب می‌کنیم. کروموزوم‌های طراحی‌شده برای این زیرمسئله‌ها در شکل ۴ نمایش داده شده است.

در کروموزوم زیرمسئله‌ی ۳ هر ژن بیانگر یک y_{ijl} است که می‌تواند مقادیر صفر و ۱ را به خود اختصاص دهد. تعداد ژن‌های کروموزوم برابر ijl ژن است که به $i * j - 1 * l - 1$ بخش تقسیم می‌شوند. همچنین کروموزوم زیرمسئله‌ی ۴ شامل $H * J * K$ ژن است که هر ژن متناظر با مقدار z_{hjk} مربوطه است.

برای تولید جمعیت اولیه در الگوریتم‌های ژنتیک از روش تقریب جواب‌های ناموجه به نزدیک‌ترین جواب موجه استفاده شده، تا از تولید جواب‌های زیاد و زمان‌بر شدن الگوریتم جلوگیری شود. الگوریتم موجه‌ساز برای زیرمسئله‌ی ۳ چنین است:

گام اول: کارخانه‌هایی را که محدودیت ظرفیت انبار آنها رعایت نشده تعیین کنید.

گام دوم: TC_{ijl} را برای این کارخانه‌ها مرتب کنید.

گام سوم: برای هر کارخانه، تخصیصِ دارای بیشترین TC_{ijl} را برابر صفر قرار دهید.

<table>
<tr><td>۰</td><td>۱</td><td>۱</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۱</td><td>۱</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۱</td></tr>
<tr><td colspan="3">I</td><td colspan="3">I</td><td colspan="3">I</td><td colspan="3">I</td><td colspan="3">I</td><td colspan="3">I</td></tr>
<tr><td colspan="9">J</td><td colspan="9">J</td></tr>
<tr><td colspan="18">L</td></tr>
</table>

الف)کروموزوم زیر مسئله ۳؛

<table>
<tr><td>۰</td><td>۱</td><td>۱</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۱</td><td>۱</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۱</td></tr>
<tr><td colspan="3">J</td><td colspan="3">J</td><td colspan="3">J</td><td colspan="3">J</td><td colspan="3">J</td><td colspan="3">J</td></tr>
<tr><td colspan="9">K</td><td colspan="9">K</td></tr>
<tr><td colspan="18">H</td></tr>
</table>

ب)کروموزوم زیر مسئله ۴.

شکل ۴. کروموزوم زیرمسئله‌های ۳ و ۴.

گام چهارم: اگر جواب جدید موجه نبود به گام اول بازگردید.

گام پنجم: جواب را به‌عنوان یک جواب موجه برای زیرمسئله‌ی سوم در نظر بگیرید.

الگوریتم موجه‌ساز برای زیرمسئله‌ی ۴ چنین است:

گام اول: کارخانه‌هایی را که محدودیت ظرفیت انبار آنها رعایت نشده تعیین کنید.

گام دوم: کم‌ترین $D_{hj} * S_h$ را برای هر کارخانه محاسبه کنید، به‌گونه‌یی که حداقل یک z_{hjk} متناظر با آن برابر ۱ باشد.

گام سوم: z_{hjk} متناظر را برای هر کارخانه برابر صفر قرار دهید.

گام چهارم: اگر جواب جدید موجه نبود به گام اول بازگردید.

گام پنجم: جواب را به‌عنوان یک جواب موجه برای زیرمسئله‌ی چهارم در نظر بگیرید.

۲.۳. ارائه‌ی الگوریتم کلی حل برای مسئله‌ی سطح اول

فرایندهایی که باید برای حل مسئله‌ی سطح اول با استفاده از رویکرد لاگرانژ انجام داد عبارت‌اند از:

۱. حل مسئله‌ی آزاد شده به‌نحوی کارا برای دست‌یابی به مقادیر ضرایب لاگرانژ.

۲. تبدیل حل حاصل شده از بند قبل به یک حل شدنی برای مسئله‌ی اولیه.

۳. به روزآوری ضرایب لاگرانژ، با به‌کارگیری روش بهینه‌سازی زیرگرادیان (در بخش ضمیمه آورده شده‌است).

چنان که در بخش قبل توضیح داده شد، مسئله‌ی لاگرانژ به چهار زیرمسئله تقسیم شد که حل هریک از آنها با توجه به ابعاد مسئله‌ی اولیه و ابعاد زیرمسئله‌ها به‌مراتب آسان‌تر و سریع‌تر انجام می‌شود. حل حاصل از این زیرمسئله‌ها یک کران پایین برای مسئله‌ی اولیه است که ممکن است موجه نباشد. در روش حل ارائه‌شده این جواب با استفاده از یک سری الگوریتم‌های موجه‌ساز تبدیل به جوابی موجه برای مسئله‌ی اولیه می‌شود؛ این جواب یک کران بالا برای حل بهینه‌ی مسئله است. پس از محاسبه‌ی جواب موجه (کران بالا) شرایط توقف الگوریتم بررسی می‌شود و چنانچه این شرایط برقرار نباشد ضرایب لاگرانژ با به‌کارگیری روش بهینه‌سازی زیر گرادیان به‌روز شده و الگوریتم مجدداً تکرار می‌شود تا شرایط توقف الگوریتم حاصل شود. نهایتاً کران بالای ارائه شده در دور آخر حل به‌عنوان جواب الگوریتم ارائه می‌شود. شرایط توقف الگوریتم با توجه به فاصله‌ی دوگانگی[۷] طراحی شده است. این شرایط عبارت‌اند از:

- فاصله‌ی دوگانگی به درصد معینی برسد.
- تعداد دفعاتی که الگوریتم حل تکرار می‌شود به تعداد معینی برسد.
- برای تعداد دفعات معین بهبودی در کران بالا حاصل نشود.

لازم به ذکر است که فاصله‌ی دوگانگی، اختلاف بین مقدار بهینه‌ی مسئله‌ی اولیه و ثانویه است که همواره برای مسائل صحیح مختلط دارای مقدار مثبت است و چنین تعریف می‌شود.

$$duality\ gap = \frac{(Z_k^{\sup} - Z_k)}{Z_k} \qquad (۲۱)$$

برای حل مسئله‌ی سطح اول باید مطابق گام‌های زیر اقدام شود.

گام اول: تعیین زیرمسئله‌ها.

گام دوم: حل زیرمسئله‌های اول و دوم با توجه به قضیه‌ی ارائه شده.

گام سوم: حل زیرمسئله‌ی سوم با استفاده از الگوریتم ژنتیک.

گام چهارم: حل زیرمسئله‌ی چهارم با استفاده از الگوریتم ژنتیک.

گام پنجم: محاسبه‌ی کران پایین.

گام ششم: موجه‌سازی تخصیص‌های انجام شده بین کارخانه‌ها و انبارها.

گام هفتم: به‌روزآوری متغیرهای مکان‌یابی و تقاضای قطعات.

گام هشتم: موجه‌سازی تخصیص‌های انجام شده بین تأمین‌کنندگان و کارخانه‌ها.

گام نهم: محاسبه‌ی کران بالا.

گام دهم: محاسبه‌ی فاصله‌ی دوگانگی.

گام یازدهم: به‌روزآوری ظرایب لاگرانژ.

گام دوازدهم: اگر یکی از شروط توقف برقرار بود به گام دوم بروید و در غیر این صورت به گام بعد بروید.

گام سیزدهم: کران بالا را به‌عنوان جواب اعلام کنید و فاصله‌ی دوگانگی را نیز نشان دهید.

چنان که پیش‌تر نیز بدان اشاره شد جواب حاصل از حل مسئله‌ی آزادشده‌ی لاگرانژ ممکن است برای مسئله‌ی اولیه موجه نباشد که عمده دلایل آن عبارت است از:

- رعایت نشدن تک‌منبعی بودن تخصیص انبارها به کارخانه‌ها.
  - انبار محصول خود را از چند کارخانه بخرد.
  - مرکز توزیع محصول خود را از هیچ‌جایی نخرد.
- رعایت نشدن محدودیت تک‌منبعی بودن تأمین قطعه برای کارخانه‌ها.
  - برای کارخانه‌یی که تأسیس نشده خرید انجام شود.
  - برای کارخانه‌یی که تأسیس شده قطعه نخریم، یا یک قطعه را از چند تأمین‌کننده خریداری کنیم.

برای رفع این انحرافات از فضای موجه مسئله‌ی اولیه از الگوریتم‌های موجه‌سازی استفاده شده است. شمای کلی این الگوریتم در شکل ۵ نشان داده شده است.

۳.۳. حل مسئله‌ی سطح دوم مدل‌سازی

چنان که پیش‌تر نیز توضیح داده شد از آنجا که این مدل یک مدل برنامه‌ریزی خطی است، می‌توان برای حل آن از نرم‌افزارهای حل دقیق مسائل برنامه‌ریزی خطی استفاده کرد. (در این مقاله چون حل این مدل شامل هیچ مطلب جدیدی نیست از حل آن صرف نظر شده است). البته در هنگام حل باید توجه داشته باشیم که تخصیص‌ها ــ که در این مدل به‌مثابه پارامتر ورودی هستند ــ خروجی‌های مدل سطح اول هستند و باید از این خروجی‌ها استفاده شود.

۴. نتایج عددی

در این بخش به‌منظور ارزیابی روش هیوریستکی لاگرانژ ارائه شده برای حل مسئله‌ی تولید ـتوزیع، مسائل نمونه‌یی که حل شده‌اند تشریح می‌شوند. برای این کار از هجده دسته مسائل با ابعاد مختلف استفاده شده است. این مسائل برای یک افق زمانی ۱۲۰ماهه حل شده‌اند که در این سطح مدل‌سازی نتایج آنها منجر به اخذ تصمیمات استراتژیک می‌شود. در جدول ۱ ساختار این هجده دسته مسئله‌ی نمونه نشان داده شده است. لازم به ذکر است که برای حل بهینه‌ی مسائل موجود در هر دسته یک مدل بهینه‌سازی توسط نرم‌افزار لینگو ۸ و برنامه‌های رویکرد آزادسازی لاگرانژ و بهینه‌سازی زیرگرادیان با استفاده از زبان برنامه‌نویسی Matlab ۷,۰,۶ تهیه شده است. همچنین تمامی اجراهای رایانه‌یی روی یک رایانه‌ی شخصی Pentium۴ با سرعت ۲,۸ GHz صورت گرفته است.

برای هر مسئله‌ی نمونه ۱۰ بار فرایندِ حل انجام شده و نتایج مربوط به آن در جداول مربوطه ذکر شده است. تمامی ۱۸۰ مسئله‌ی نمونه توسط رویکرد آزادسازی لاگرانژ پیشنهادی حل شده‌اند ولی برای تمامی مسائل مطرح شده به‌علت ابعاد گسترده‌ی آنها، امکان حل بهینه توسط روش شمارشی در یک زمان معقول وجود نداشت. لذا بهترین جواب یافته‌شده پس از اجرای مدل لینگو به‌مدت ۱۸۰ دقیقه در مقیاسات آورده شده است. خلاصه‌ی نتایج محاسباتی به‌دست آمده از حل این مسائل در جدول ۲ ارائه شده است.

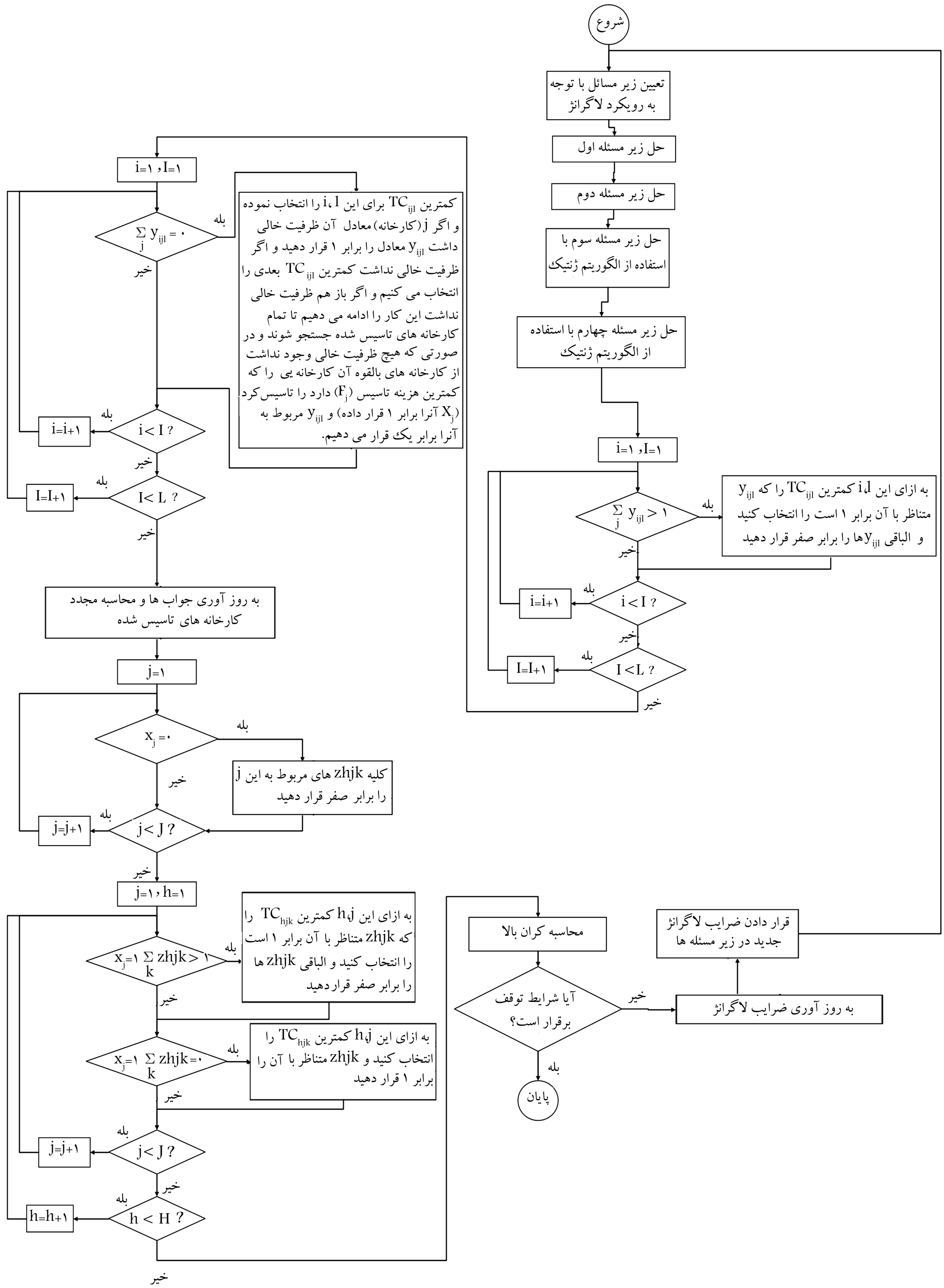
چنان که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، نرم‌افزار لینگو تنها برای ۳ دسته از مسائل توان‌مندی حل آنها را در زمان کم‌تر از ۱۸۰ دقیقه داشته است؛ این در حالی است که روش حل ارائه شده با زمان حل قابل قبول تمامی مسائل را حل کرده است.

در شکل ۶ برای یکی از مسائل حل شده توسط روش پیشنهادی هیوریستیک آزادسازی لاگرانژ، سرعت و کیفیت حرکت حل این روش برای رسیدن به جواب بهتر نشان داده شده است. در این شکل نمودار کران پایین مسئله و نمودار کران بالای حل مسئله‌ی اصلی نشان داده شده است.

شکل ۷ به‌منظور بررسی روند فاصله‌ی دوگانگی تهیه شده و چنان که مشاهده می‌شود با مقایسه‌ی بدترین فاصله‌ی دوگانگی و میانگین آن در ۱۸ نمونه مسئله‌ی حل شده مشخص است که هیچ روند غیر تصادفی بر این فاصله حاکم نیست و احتمال افزایش این فاصله با بزرگ شدن ابعاد مسائل وجود ندارد.

در شکل ۸ نمودار حساسیت زمان حل نسبت به افزایش پارامترهای تعداد انبارها، تعداد محصولات، تعداد کارخانه‌ها و تعداد قطعات برای این ۱۸ مسئله نشان داده شده است. چنان که در این شکل نیز نشان داده شده تعداد محصولات تأثیرگذارترین عامل بر جواب حل مسائل است و با افزایش حتی یک واحدی آن زمان حل مسائل به‌میزان چشم‌گیری افزایش می‌یابد. افزایش تعداد قطعات، کارخانه‌ها و انبارها از این نظر در رده‌های بعدی قرار دارند.

نمودار ارائه شده در شکل ۸ بدترین زمان حلی است که به دست آمده، و نمودار پایینی میانگین زمان حل‌های حاصل شده است. همچنین اعداد مشخص شده روی محور افقی به‌ترتیب از پایین به بالا بیان‌گر تعداد مراکز توزیع، کارخانه‌های بالقوه، محصولات و قطعات است.



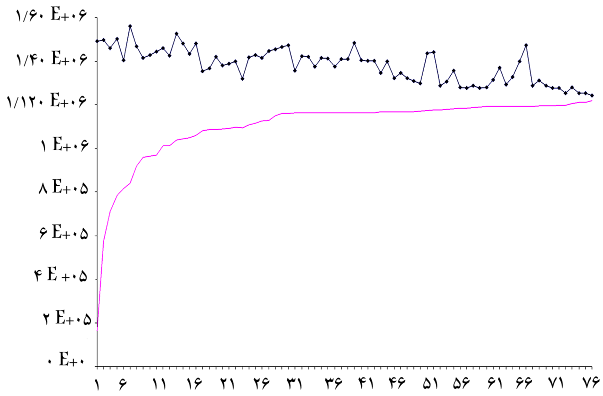
شکل ۵. شمای کلی الگوریتم ژنتیک.

جدول ۱. ساختار و ابعاد نمونه مسائل حل شده.

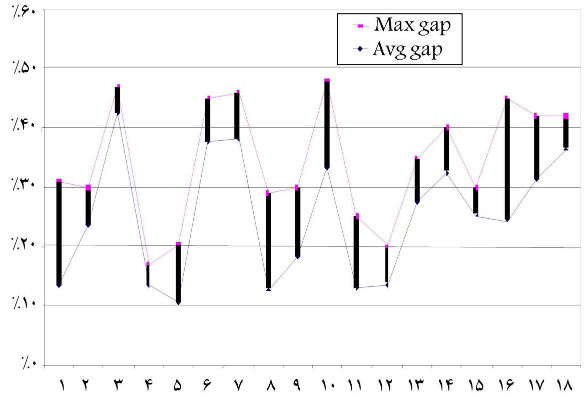
ردیف مسائل	تعداد انبارها	تعداد کارخانه‌های بالقوه	تعداد محصولات	تعداد قطعات	تعداد تأمین‌کنندگان	ابعاد مسئله		
						تعداد متغیرهای غیرخطی	تعداد متغیرهای صحیح	تعداد محدودیت‌ها
۱	۱۵	۴	۲	۴	۱۰	۳۲	۲۸۴	۴۰۲
۲	۲۰	۴	۲	۴	۱۰	۳۲	۳۲۴	۴۵۲
۳	۲۰	۴	۴	۶	۱۰	۴۸	۵۶۴	۷۷۲
۴	۲۰	۱۰	۴	۶	۱۰	۱۲۰	۱۴۱۰	۱۸۱۰
۵	۲۵	۵	۲	۵	۱۰	۵۰	۵۰۵	۶۹۰
۶	۳۰	۵	۲	۵	۱۰	۵۰	۵۵۵	۷۵۰
۷	۳۵	۶	۳	۳	۱۰	۳۶	۸۱۶	۱۰۲۳
۸	۳۵	۵	۳	۶	۱۰	۶۰	۸۳۰	۱۰۹۵
۹	۳۵	۶	۳	۶	۱۰	۷۲	۹۹۶	۱۲۹۳
۱۰	۳۵	۶	۳	۷	۱۰	۸۴	۱۰۵۶	۱۳۸۳
۱۱	۵۰	۷	۳	۷	۱۰	۹۸	۱۵۴۷	۱۹۵۶
۱۲	۵۰	۴	۴	۱۰	۱۰	۸۰	۱۲۰۴	۱۶۱۲
۱۳	۵۰	۷	۴	۱۰	۱۰	۱۴۰	۲۱۰۷	۲۶۷۱
۱۴	۵۰	۸	۵	۱۰	۱۰	۱۶۰	۲۸۰۸	۳۴۷۴
۱۵	۱۰۰	۱۰	۲	۴	۱۰	۸۰	۲۴۱۰	۲۸۳۰
۱۶	۱۰۰	۱۰	۲	۱۰	۱۰	۲۰۰	۳۰۱۰	۳۷۳۰
۱۷	۱۰۰	۹	۵	۱۰	۱۰	۱۸۰	۵۴۰۹	۶۳۷۷
۱۸	۱۰۰	۱۰	۵	۱۰	۱۰	۲۰۰	۶۰۱۰	۷۰۳۰

جدول ۲. نتایج حل نمونه مسائل.

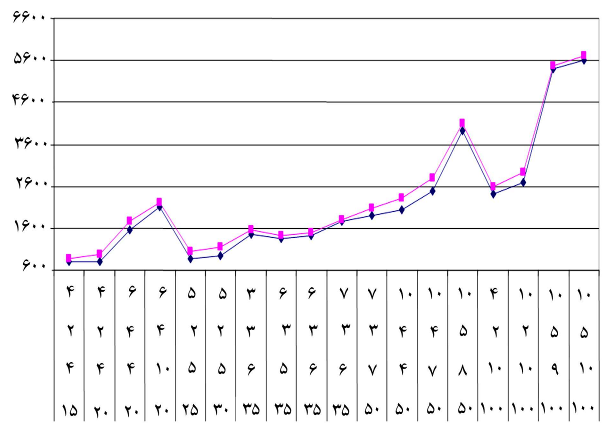
ردیف مسائل	Duality gap (٪)		زمان حل با لینگو (ثانیه)		زمان حل لاگرانژ (ثانیه)		متوسط درصد استفاده از ظرفیت کارخانه‌ها (٪)
	میانگین	بدترین	میانگین	بدترین	میانگین	بدترین	
۱	۱٫۳	۳٫۱	۴۱۵۶	۴۷۰۶	۸۷۶	۸۰۵	۷۶
۲	۲٫۴	۳٫۰	۵۹۸۶	۷۰۸۱	۹۶۴	۷۹۰	۷۹
۳	۴٫۲	۴٫۷	–	–	۱۷۵۰	۱۵۶۰	۷۷
۴	۱٫۳	۱٫۷	–	–	۲۲۲۴	۲۱۰۱	۹۱
۵	۱٫۰	۲٫۰	۵۹۷۸	۲۰۹۱	۱۰۳۸	۸۸۸	۸۳
۶	۳٫۷	۴٫۵	–	–	۱۱۴۲	۹۵۰	۷۰
۷	۳٫۸	۴٫۶	–	–	۱۵۶۰	۱۴۶۲	۷۵
۸	۱٫۳	۲٫۹	–	–	۱۴۲۹	۱۳۴۶	۸۹
۹	۱٫۸	۳٫۰	–	–	۱۴۸۴	۱۴۲۴	۷۸
۱۰	۳٫۳	۴٫۸	–	–	۱۸۱۷	۱۷۶۶	۸۳
۱۱	۱٫۳	۲٫۵	–	–	۲۰۸۰	۱۸۹۰	۷۴
۱۲	۱٫۴	۲٫۰	–	–	۲۳۱۰	۲۰۳۰	۷۹
۱۳	۲٫۷	۳٫۵	–	–	۲۷۸۰	۲۵۰۰	۷۴
۱۴	۳٫۲	۴٫۰	–	–	۴۰۹۸	۳۹۳۰	۷۹
۱۵	۲٫۵	۳٫۰	–	–	۲۶۰۰	۲۴۳۰	۷۳
۱۶	۲٫۴	۴٫۵	–	–	۲۹۴۰	۲۶۹۰	۷۹
۱۷	۳٫۱	۴٫۲	–	–	۵۴۷۶	۵۴۰۹	۶۵
۱۸	۳٫۶	۴٫۲	–	–	۵۶۱۰	۵۶۹۳	۷۵



شکل ۶. نمایش حرکت روش پیشنهادی آزادسازی لاگرانژ در رسیدن به جواب.



شکل ۷. نمودار روند فاصله‌ی دوگانگی.



شکل ۸. نمودار حساسیت زمان حل به تغییر پارامترها.

۵. نتیجه‌گیری

مسائل مربوط به زنجیره‌ی تأمین در حوزه‌ی تولید ـ توزیع به‌دلیل پیچیدگی‌های موجود در این‌گونه مسائل با مشکلات عدیده‌یی در مدل‌سازی و حل مواجه خواهند شد که حتی در صورت امکان مدل‌سازی به‌علت ناکارآمدی روش‌های رایج حل، ارزش چندانی نخواهند داشت. اما با بازنگری روش‌های مدل‌سازی و استفاده از رویکرد سلسله‌مراتبی می‌توان آنها را به زیرمسئله‌های کوچک‌تر تقسیم‌بندی و با استفاده از روش‌های فراحسی این زیرمسئله‌ها را حل کرد. چنان که نتایج بخش ۴ نشان می‌دهد، چه از نظر سرعت حل و چه از نظر صحه‌گذاری روش، از رویکرد آزادسازی لاگرانژ می‌توان به‌عنوان روشی کارا و مفید برای تبدیل مسائل پیچیده به زیرمسئله‌های ساده‌تر نام برد. همچنین از ترکیب این رویکرد با الگوریتم‌های فراحسی می‌توان به‌عنوان روش حلی مناسب برای این مسائل استفاده کرد.

۱.۵. پیشنهاد تحقیقات آتی

چنان که در این نوشتار نشان داده شد یک مدل تولید ـ توزیع برای یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی ارائه شد که در آن تقاضای مشتریان غیرقطعی، و زنجیره‌ی تأمین مورد بررسی از نوع زنجیره‌ی تأمین ظرفیت محدود بود. این مدل با رویکرد لاگرانژ و توسط الگوریتم ژنتیک و یک روش فراحسی حل شد. عملکرد این مدل‌سازی و روش حل پیشنهادی با توجه به نتایج محاسباتی ارائه شده عملکردی قابل قبول است. این مدل از قابلیت توسعه، چه در زمینه‌ی مدل‌سازی و چه در زمینه‌ی حل، برخوردار است. زمینه‌های ادامه و توسعه‌ی این طرح در آینده به شرح زیر پیشنهاد می‌شود:

- توسعه زنجیره‌ی تأمین از دوسطحی بودن به چندسطحی؛
- وارد کردن تابع توزیع تقاضا در محاسبات موجودی‌ها؛
- مکان‌یابی سایر اجزای زنجیره علاوه بر کارخانه‌ها؛
- چندسطحی کردن انبارهای نگه‌داری کالا؛
- چندسطحی کردن ظرفیت تولید کارخانه‌ها؛
- در نظر گرفتن برون‌سپاری در کارخانه‌ها؛
- اضافه‌کردن محدودیت ظرفیت تأمین کنندگان به مدل؛
- در نظر گرفتن زمان تدارک[8] به‌صورت احتمالی؛
- اضافه‌کردن امکان نگه‌داری محصولات نهایی در کارخانه‌ها به مدل؛
- حذف محدودیت‌های تک‌منبعی بودن مدل.

پانوشت‌ها

1. facility
2. lagrangian relaxation
3. subgradient
4. re-order point
5. lead time
6. safety stock

7. duality gap
8. lead time

منابع (References)

1. Geoffrion, A.M. and Powers, R.F. "Twenty years of strategic distribution system design: An evolutionary perspective", *(Implementation in OR/MS: An evolutionary view), Interfaces*, **25**, pp. 105-128 (1995).
2. Daskin, M.S., *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*, Wiley-Interscience, New York (1995).
3. Beamon, B.M. "Supply chain design and analysis: Models and methods", *International Journal of Production Economics*, **55**, pp. 281-294 (1998).
4. Cohen M.A. and Moon S. "Impact of production scale economies, manufacturing complexity and transportation costs on supply chain facility networks", *Journal of Manufacturing and Operations Management*, **3**, pp. 269-292 (1990).
5. Pirkul, H. and Jayaraman, V. "Production, transportation, and distribution planning in a multi-commodity tri-echelon system", *Transportation, Science*, **30**, pp. 291-302 (1996).
6. Thomas, D.J. and Griffin, P.M. "Coordinated supply chain management", *European Journal of Operational Research*, **94**, pp. 1-15 (1996).
7. Erenguc, S.S., Simpson, N.C. and Vakharia, A.J. "Integrated production/distribution planning in supply chains: An invited overview", *European Journal of Operational Research*, **115**, pp. 219-236 (1999).
8. Byrne, M.D. and Bakir, M.A. "Production planning using a hybrid simulation-analytical approach", *International Journal of Production Economics*, **59**, pp. 305-311 (1999).
9. Dhaenens, C.F. and Finke, G. "An integrated model for an industrial production-distribution problem", *IIE Transactions*, **33**, pp. 705-715 (1999).
10. Sabri, E.H. and Beamon, B.M. "A multi-objective approach to simultaneous strategic and operational planning in supply chain design", *Omega*, **28**, pp. 581-598 (2000).
11. Jang, Y-J., Jang, S-Y, Chang, B-M, and Park, J. "A combined model of network design and production and distribution planning of a supply network", *Computer and Industrial Engineering*, **43**, pp. 263-281 (2002).
12. Lee, Y.H., Kim, S.H. and Moon, C. "Production-distribution planning in supply chain using hybrid approach", *Production Planning and Control*, **13**, pp. 35-46 (2002).
13. Chen, C. and Lee, W. "Multi-objective optimization of multi-echelon supply chain networks with uncertain product demands and prices", *Computers and Chemical Engineering*, **28**, pp. 1131-1144 (2004).
14. Miranda, P.A. and Garrido, R.A. "Incorporating inventory control decisions into a strategic distribution network design model with stochastic demand", *Transportation Research Part E*, **40**, pp. 183-207 (2004).
15. Chan, F.T.S., Chung, S.H. and Wadhwa, S. Omega, **33**, Issue 4, pp. 345-355 (2005).
16. Selim, H., Araz, C. and Ozkarahan, I. "Collaborative production distribution planning in supply chain: A fuzzy goal programming approach", *Transportation Research Part E*, **31**, pp. 137-147 (2007).
17. Thin, Y.H. "Production-distribution planning in supply chain considering capacity constraints", *Computers and Industrial Engineering*, **43**, pp. 169-190 (2008).

ضمیمه

۱. به روز کردن ضرایب لاگرانژ

به‌محض این که زیر مسائل در تکرار kام حل شدند، باید مقادیر متغیرهای دوال α^k، β^k، γ^k و θ^k را برای ایجاد تغییرات در $\lambda(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ به‌روزکرد. در اینجا از رویه‌ی به‌روزکردن و بهینه‌سازی زیرگرادیان استفاده شده است که ماتریس‌های تخلف (violation-matrix)، VD^k، VV^k، VH^k و VL^k را در جهت صعودی در نظر می‌گیرد. مؤلفه‌های ماتریس‌های تخلف چنین نوشته می‌شوند:

$$VD_{hj}^k = \sum_i \sum_l y_{ijl}^k . \mu_{il} . b_{hl} - D_{hj}^k \quad \forall \begin{bmatrix} h = 1, ..., H \\ j = 1, ..., J \end{bmatrix}$$

$$VV_{hj}^k = \sum_i \sum_l y_{ijl}^k . v_{il} . b_{hl}^2 - V_{hj}^k \quad \forall \begin{bmatrix} h = 1, ..., H \\ j = 1, ..., J \end{bmatrix}$$

$$VL_{il}^k = \sum_j y_{ijl}^k - 1 \quad \forall \begin{bmatrix} i = 1, ..., I \\ l = 1, ..., L \end{bmatrix}$$

$$VH_{hj}^k = \sum_k z_{hjk}^k - x_j^k \quad \forall \begin{bmatrix} h = 1, ..., H \\ j = 1, ..., J \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

اندازه‌ی گام برای تکرار Kام مطابق رابطه‌ی ۲۳ مشخص می‌شود:

$$s^k = \rho^k \frac{(Z_k^{\sup} - Z_k)}{\|VD^k\|^2 + \|VV^k\|^2 + \|VL^k\|^2 + \|VH^k\|^2} \qquad (۲۳)$$

که در آن Z_k^{sup} یک کران بالا برای مسئله‌ی اصلی است که از حل مسئله‌ی اولیه به دست می‌آید؛ $\underline{Z}_k$ مقدار کران پایین برای مسئله‌ی اصلی در تکرار kام است. به‌علاوه ρ^k یک پارامتر کنترل است که معمولاً $2 > \rho^k > 0$ است و می‌توان در حین اجرای الگوریتم مقدار آن را تغییر داد، و آن زمانی رخ می‌دهد که برای تکرار معینی کران پایین بهبود نیابد. در این هنگام $\rho = \rho/2$ قرار داده می‌شود. بنابراین، معادلات به‌روزکردن متغیرهای لاگرانژ عبارت‌اند از:

$$\alpha_{il}^{k+1} = \alpha_{il}^k - s^k . VL_{il}^k$$

$$\beta_{hj}^{k+1} = \beta_{hj}^k - s^k . VH_{il}^k$$

$$\gamma_{hj}^{k+1} = Max\left\{0, \gamma_{hj}^{k} s^{k}.VD_{hj}^{k}\right\}$$
$$\theta_{hj}^{k+1} = Max\left\{0, \theta_{hj}^{k} s^{k}.VV_{hj}^{k}\right\} \qquad (24)$$

رویه‌ی محاسبه‌ی Z_k^{sup} شامل محاسبه‌ی جواب موجه برای مسئله‌ی اولیه است که چنان که در قسمت‌های قبل تشریح شد، از حل و جواب زیرمسئله‌های سه و چهار برای محاسبه‌ی آن استفاده شده است. این الگوریتم تا به دست آوردن بعضی شرایط همگرایی تکرار می‌شود.

۲. اثبات قضیه

زیرمسئله‌ی اول را می‌توان به H زیرمسئله‌ی مجزا به‌ازای هر قطعه تجزیه کرد، و قضیه را برای هر قطعه اثبات کرد. سپس مقدار تابع هدف کل از مجموع تابع هدف برای هر قطعه به دست می‌آید. بنابراین اثبات ریاضی رویه‌ی حل زیرمسئله‌ی اول از دو قسمت مجزا تشکیل شده است. قسمت اول قضیه بالا را برای دو کارخانه و یک قطعه اثبات می‌کند. قسمت دوم اثبات قضیه را برای $J+1$ کارخانه و یک محصول اثبات می‌کند، با فرض این که این قضیه برای H کارخانه و یک محصول درست است.

قسمت اول. در این قسمت قضیه را برای کوچک‌ترین مورد، که دو کارخانه و یک قطعه را در نظر می‌گیرد، اثبات می‌کنیم. در این مورد باید مسئله‌ی ۲۵ را حل کرد:

$$SP1^{2}\ \ Min.z = \left(\sqrt{2HC_{h1} * OC_{h1}}\sqrt{D_{h1}} - D_{h1} * \gamma_{h1}\right) + \left(\sqrt{2HC_{h2} * OC_{h2}}\sqrt{D_{h2}} - D_{h2} * \gamma_{h2}\right)$$

$s.t.$

$$\left.\begin{array}{l} D_{h1} + D_{h2} = D_{Th} \\ D_{h1}, D_{h2} = 0 \end{array}\right\} X \qquad (25)$$

اگر فضای موجه X را براساس نقاط گوشه‌یی مشخص کنیم:

$$X^{1} = \begin{pmatrix} D_{h2}^{1} \\ D_{h1}^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DT_h \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$X^{2} = \begin{pmatrix} D_{h2}^{2} \\ D_{h1}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DT_h \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (26)$$

نقاط موجه به‌صورت رابطه‌ی ۲۷ نشان داده می‌شود:

$$X = \lambda X^{1} + (1-\lambda)X^{2} = \begin{bmatrix} \lambda DT_l \\ *(1-\lambda)DT_l \end{bmatrix}, 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (27)$$

آنگاه، مسئله‌ی $SP1^{21}$ معادل خواهد بود با:

$$\begin{aligned} SP1^{21}\ \ Min.G(\lambda) = & \sqrt{2HC_{h1} * OC_{h1}}\sqrt{\lambda DT_h} \\ & - \lambda DT_h * \gamma_{h1} \\ & + \sqrt{2HC_{h2} * OC_{h2}}\sqrt{(1-\lambda)DT_h} \\ & - (1-\lambda)DT_h * \gamma_{h2} \\ & subject\ to: 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \qquad (28)$$

اگر از $G(\lambda)$ نسبت به (λ) مشتق از مرتبه‌ی دو گرفته شود، عبارتی به دست می‌آید که به‌ازای $0 < \lambda < 1$ منفی است و برای $\lambda = 0$ و $\lambda = 1$ تعریف نشده است.

این بدان معناست که $G(\lambda)$ مقعر است و بنابراین حل بهینه همیشه در انتهای بازه رخ می‌دهد. یعنی حل بهینه $X = X^{1}$ یا $X = X^{2}$ است و در نهایت این معادل عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} D_{h1}^{*} \\ D_{h2}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DT_h \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} D_{h1}^{*} \\ D_{h2}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ DT_h \end{pmatrix} \qquad (29)$$

بنابراین اگر عبارت $\sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{DT_h} - DT_h * \gamma_{hj}^{k}$ دست‌کم برای یکی از دو نقطه‌ی گوشه‌یی منفی باشد، حل بهینه به منفی‌ترین نقطه تعلق می‌گیرد. ولی اگر مقدار عبارت برای هر دو نقطه نامنفی باشد، چون به‌ازای تمام قطعات و کارخانه‌ها $D_{hj} \geq 0$ پس مقدار $D_{1j} = 0 \quad \forall j = 1, 2$. اینجا اثبات قضیه‌ی بالا برای کوچک‌ترین مورد ــ دو کارخانه و یک قطعه ــ تمام می‌شود.

قسمت دوم: با فرض این که این قضیه برای M کارخانه و ۱ قطعه معتبر است، مدل $SP1^{M1}$ تبدیل می‌شود به:

$$\begin{aligned} SP1^{M1}\ \ Min. & \sum_{j=1}^{M} \begin{bmatrix} \sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{D_{hj}} \\ -D_{hj} * \gamma_{hj} \end{bmatrix} \\ s.t \\ & \sum_{j=1}^{M} D_{hj} = DT_h \\ & D_{hj} \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., M \end{aligned} \qquad (30)$$

اگر $\forall J = 1, ..., M$ و عبارت $\sqrt{2HC_{1j} * OC_{1j}}\sqrt{DT_1} - DT_1 * \gamma_{1j}^{k}$ برای کارخانه‌ی r_lام منفی‌ترین باشد، حل بهینه‌ی $SP1^{M1}$ برای قطعه‌ی h به‌ازای تمام کارخانه‌ها چنین است:

$$D_{hj}^{*} = \begin{cases} DT_h & , j = r_h \\ 0 & , j \neq r_h \end{cases} \qquad (31)$$

حال باید ثابت کرد که این خاصیت برای $M+1$ کارخانه و ۱ قطعه صادق است. اگر تعداد کارخانه‌ها $M+1$ و تعداد قطعات ۱ باشد، آنگاه مدل $SP1^{(M+1)1}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} SP1^{(M+1)1}\ \ Min. & \sum_{j=1}^{M+1} \begin{bmatrix} \sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{D_{hj}} \\ -D_{hj} * \gamma_{hj} \end{bmatrix} \\ s.t \\ & \sum_{j=1}^{M+1} D_{hj} = DT_h \\ & D_{hj} \geq 0 \end{aligned} \qquad (32)$$

این مسئله را می‌توان چنین تجزیه کرد:

$$SP1^{(M+1)1}\ \ Min.z =$$
$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2HC_{h(M+1)} * OC_{h(M+1)}}\\ *\sqrt{D_{h(M+1)}}\end{array}\right]\\ -D_{h(M+1)} * \gamma_{h(M+1)}\\ +S(D_{h(M+1)})\end{array}\right]$$

$$subject\ to\ 0 \leq D_{h(M+1)} \leq DT_h \tag{۳۳}$$

$$S(D_{(M+1)1})\ Min.z = \sum_{j=1}^{M}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{D_{hj}}\\ -D_{hj} * \gamma_{hj}\end{array}\right]$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{M} D_{hj} = DT_h - D_{h(M+1)}$$
$$D_{hj} \geq 0 \tag{۳۴}$$

حل $S(D_{(M+1)1})$ معادل حل $SP1^{M1}$ است، فقط به‌جای DT_hها، $DT_h - D_{h(M+1)}$ها قرار می‌گیرد. پس با در نظرگرفتن فرض استقرا، حل بهینه‌ی $S(D_{(M+1)1})$ به‌صورت معادله ۳۵ است:

$$D^*_{hj} = \begin{cases} DT_h - D_{h(M+1)} & ,j = r_h\\ 0 & ,j \neq r_h\end{cases} \tag{۳۵}$$

برای بعضی از مقادیر r_h و hهایی که: $h \in \{1, ..., H\}$ و $r_h \in \{1, ..., M\}$ و r_h کارخانه متناسب با قطعه hام است. پس $SP1^{(M+1)1}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$SP1^{(M+1)1}\ \ Min.z =$$
$$\left[\begin{array}{c}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2HC_{h(M+1)} * OC_{h(M+1)}}\\ *\sqrt{D_{h(M+1)}}\end{array}\right]\\ -D_{h(M+1)} * \gamma_{h(M+1)}\\ +\sqrt{2HC_{hr_h} * OC_{hr_h}}\sqrt{D_{hr_h}}\\ -D_{hr_h} * \gamma_{hr_h}\end{array}\right]$$

$$subject\ to.$$
$$D_{h(M+1)} + D_{hr_h} = DT_h$$
$$D_{h(M+1)}, D_{hr_h} \geq 0\ \ \forall h = 1, ..., H,\ r_h = 1, ..., M \tag{۳۶}$$

این مسئله ساختاری مانند $SP1^{21}$ دارد و برای هر قطعه از بین دوکارخانه‌ی $M+1$ و r_h، هرکدام که مقدار منفی‌تری برای عبارت:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2HC_{hj} * OC_{hj}}\sqrt{DT_h}\\ -DT_h * \gamma^k_{hj}\end{array}\right] \qquad \forall j = r_h, M+1$$

داشته باشد، انتخاب شده و کل تقاضای قطعه‌ی h به آن کارخانه اختصاص می‌یابد. این مسئله همان ساختار $SP1^{21}$ را دارد، پس حل بهینه‌ی $SP1^{(M+1)1}$ براساس قسمت اول است؛ کارخانه‌ی t از بین کارخانه‌های r_h و $M+1$ انتخاب می‌شود به‌طوری که اگر:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2HC_{h(M+1)} * OC_{h(M+1)}}\\ *\sqrt{D_{h(M+1)}}\\ -D_{h(M+1)} * \gamma_{h(M+1)}\end{array}\right] \leq \left[\begin{array}{l}\sqrt{2HC_{hr_h} * OC_{hr_h}}\\ \sqrt{D_{hr_h}}\\ -D_{hr_h} * \gamma_{hr_h}\end{array}\right]$$

آنگاه t=M+1 و در غیر این صورت $t = r_h$ قرار داده می‌شود. اینجا اثبات خاصیت بالا برای زیرمسئله‌ی $SP1$ تمام می‌شود و به‌همین ترتیب همان خاصیت برای زیرمسئله‌ی $SP2$ اثبات می‌شود.

A LAGRANGIAN RELAXATION METHOD FOR A MULTI-PRODUCT, MULTI-FACILITY PRODUCTION-DISTRIBUTION MODEL IN A TWO-ECHELON SUPPLY CHAIN WITH PROBABILISTIC DEMANDS

R. Zolfaghari
roohalah'z@aut.ac.ir
Dept. of Industrial Engineering
Amirkabir University
F. Jolai(corresponding author)
fjolai@ut.ac.ir
Faculty of Engineering
University of Tehran
Y. Movahedi
ymovahedi@aut.ac.ir
Dept. of Industrial Engineering
Amirkabir University

Sharif Industrial Engineering and Management Journal
Volume 29, Issue 2, Page 25-39, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 23 January 2011; received in revised form 23 August 2011; accepted 30 August 2011.

Abstract

In this paper, we consider a two-echelon supply chain problem with multi-facility, multi-period, multi-product and nondeterministic demands, in which, we assume that demands follow a normal distribution probability function and that each product consists of several predetermined parts. For solving the introduced model, we propose a hierarchical approach, based on the Lagrangian relaxation method.

First, the problem is decomposed into two strategic and operational levels.

At a strategic level, we respond to the following questions: Which facilities should be selected, how many demands are assigned to each selected facility, and which suppliers provide the necessary items for each facility.

The strategic level problem using the Lagrangian relaxation method leads to four subproblems. The dominance properties of these subproblems are examined, and optimal methods and a genetic algorithm are proposed to solve them. Then, these relaxed subproblems are transformed into a general strategic problem and the Lagrangian coefficients are updated. This procedure will be terminated when stop criteria are satisfied. These criteria are defined based on duality gap percentage, the number of iterations that have not been improved in the upper bound solution, and the total number of iterations.

The output of strategic level decisions will be considered as input to operational level decisions. At the operational level, we want to know how many products must be produced during regular work time, how many products must be produced during overtime, and what the inventory level of each item is at the end of period times. The operational level problem is solved using commercial linear programming software.

To evaluate the proposed solution algorithms, some random instances of the problem are generated and solved by the algorithms. We generate 18 classes of problem with different sizes, and consider a 120 months planning horizon for all problems. For each class of problem, 10 random instances are generated.

All algorithms are run on a PC Pentium 4 with 2.8 GHz processor.

The commercial software, Lingo 8.0, was able to solve only small size instances within reasonable computational time. The results of the proposed algorithms are compared with the solutions obtained by Lingo after 180 minutes.

The results show the convergence of the proposed solution method based on Lagrangian relaxation to optimal solutions in the early iterations of the method. Also, the duality gaps do not show any trends to mean that the efficiency of the method does not reduce by increasing the problem size.

Key Words: Production-distribution, supply chain management, Lagrangian relaxation, genetic, hierarchically, sub gradient optimization.