مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۲)
دوره‌ی ۱ - ۲۹، شماره‌ی ۲، ص. ۸۳-۹۱

Original Article

الگوریتم شاخه و کران برای یک مسئله‌ی دوهدفه‌ی زمان‌بندی اطاق‌های عمل

محمد رنجبر* **(دانشیار)**
گروه مهندسی صنایع، دانشگاه فردوسی مشهد
عباس غفوریان (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی فنی مهندسی، دانشگاه علوم و فنون مازندران

موضوع مورد مطالعه در این نوشتار «زمان‌بندی اطاق‌های عمل» است که در آن انجامِ هر عمل جراحی به چهار مرحله تقسیم‌بندی شده که منابع اصلی مورد نیاز هر مرحله جراحان و اطاق‌های عمل هستند. این مسئله‌توسط یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط فرموله شده که در آن تخصیص بیماران به اطاق‌های عمل و توالی عمل‌های بیماران هر اطاق طوری تعیین می‌شود که تابع هدف دومعیاره‌ی میزان اضافه‌کاری جراحان و فواصل بیکاری بین جراحی‌های آن‌ها کمینه شود. به‌منظور حل مسئله، یک الگوریتم شاخه و کران توسعه داده شده و با تولید نمونه مسائلی، کارایی الگوریتم بررسی شده و حساسیت برخی پارامترها مورد تحلیل قرارگرفته است. براساس نتایج ارائه شده، بهتر است ۲۰ درصد به طول کل زمان جراحی‌های هر جراح اضافه کرده و آن را به‌عنوان طول بازه کاری وی در نظر بگیریم زیرا بازه‌های کاری بزرگ‌تر هیچ‌گونه بهبود چشم‌گیری در جواب بهینه نخواهند داشت.

واژگان کلیدی: زمان‌بندی اطاق عمل، الگوریتم شاخه و کران.

m_ranjbar@um.ac.ir
ab.ghafourian@gmail.com

۱. مقدمه

با توجه به قدمت ۶۰ ساله تحقیق درمورد زمان‌بندی مراکز درمانی، ادبیات موضوعی گسترده‌یی در این زمینه موجود است که اولین نوشتارِ مروری در این زمینه در سال ۱۹۷۸ ارائه شد.[۱] مدیران مراکز درمانی شاهد افزایش تقاضای عمل‌های جراحی به‌علت افزایش جمعیت سالمند هستند و این یکی از عواملی است که نیاز به توسعه‌ی گسترده‌تر روش‌های برنامه‌ریزی و زمان‌بندی مراکز درمانی را روشن می‌سازد.[۲] همچنین بخش جراحی یکی از پرهزینه‌ترین (یک‌سوم هزینه کل بیمارستان) و سودآورترین (نزدیک دوسوم درآمد کل بیمارستان) بخش‌های بیمارستان است؛ و از این‌رو پتانسیل جذب محققین بسیاری را برای بهبود عملکرد دارد.[۳] در بررسی زمان‌بندی اطاق‌های عمل، عوامل مختلفی دخیل‌اند که مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از: تعداد اطاق‌ها، بارکاری اطاق‌ها و جراحان، نوع بیماریِ بیمار، تعداد تخت‌های اطاق بهبود و نیروی انسانی مورد نیاز.[۴] براین اساس می‌توان مسائل مطرح‌شده در زمینه‌ی زمان‌بندی اتاق‌های عمل را با توجه به شش معیار به شش دسته تقسیم کرد. این معیارها عبارت‌اند از:

الف) **مشخصه‌ی بیماران**. کل بیماران به دو دسته‌ی انتخابی[۱] (شامل بیماران سرپایی و بیماران بستری شده) و غیرانتخابی[۲] (شامل بیماران ضروری و اورژانسی) تقسیم می‌شوند. از جمله مطالعاتی که در آن این دسته‌بندی مشخص رعایت شده می‌توان به تحقیق وولینک[۳] و همکارانش[۵] اشاره کرد. موضوع مورد بررسی آن‌ها این بود که آیا بهتر است یک اطاق عمل مشخصاً برای عمل بیماران اورژانسی رزرو شود یا این که مقداری از حجم کاری تمام اطاق‌های عمل بیماران انتخابی را برای بیماران اورژانسی در نظر گرفت.

ب) **معیار عملکرد**. معیارهایی که برای بررسی عملکرد استفاده می‌شوند اعم از زمان انتظار، تعداد به تعویق افتادن عمل بیماران، طول کل فرایند کاری[۴]، در نظر گرفتن مسائل مالی و بازده است. در یکی از مطالعاتِ انجام‌شده برای افزایش کارایی بخش جراحی با توجه به زمان‌های اضافه‌کاری، بازده و کاهش طول لیست بیمارانِ در انتظار، ترکیبی از این معیارها به کار گرفته شده است.[۶]

ج) **نوع تصمیم‌گیری**. این معیار مشخص می‌کند که تصمیم‌گیری درمورد کدام یک از موارد تاریخ، زمان، اطاق و یا ظرفیت مسئله انجام می‌شود و این تصمیم‌گیری درمورد بیمار است یا جراح.

محققین با توجه به جراحی‌های مشابه، روش‌هایی برای تخصیص اطاق و زمان قابل تکرار در سایر روزها ایجاد کردند.[۷] هدف آن‌ها کمینه‌سازی تعداد اطاق‌های عمل مورد استفاده از یک طرف و سطح نیاز به تخت‌های بیمارستان از طرف دیگر بود و به‌طور هم‌زمان هر چهار نوع تصمیم‌گیری را در تحقیق‌شان مد نظر قرار دادند.

د) **روش تحقیق**. مطالعات انجام‌شده از نقطه‌نظر نوع روش حل یا تکنیک‌های ارزیابی به کار رفته مانند برنامه‌ریزی ریاضی، شبیه‌سازی یا روش‌های تحلیلی دسته‌بندی می‌شوند.

ه) **عدم اطمینان**. برخی محققین عدم اطمینان در ورود بیمار، طول عمل جراحی‌ها،

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۰/۲/۲۰، اصلاحیه ۱۳۹۰/۸/۱، پذیرش ۱۳۹۰/۸/۲۳.

یا دسترسی به منابع را در مقالات‌شان وارد کرده‌اند. آنان برای نشان‌دادن اهمیت این موضوع، اطاق عمل را تأثیرگذارترین بخش بیمارستان دانسته‌اند.[۸] برای نمونه، بیماران جراحی شده برای بهبود باید چند روزی در بیمارستان بستری شوند و درنتیجه، اشغال تخت‌ها و پرستاران مورد نیاز وابسته به زمان‌بندی اطاق عمل است. تغییر در برنامه‌ریزی تأثیر منفی بر بهره‌وری دارد و کاستن آن یکی از دغدغه‌های مدیران مراکز درمانی است. تعداد کمی از مقالات، عدم اطمینان در منابع را[۹] به شمار آورده‌اند و هنوز موضوعی به‌روز در این زمینه است.

و) **تحقیقات کاربردی**. این معیار نشان‌گر اطلاعاتی از نوع آزمایش داده‌ها و کاربرد آن‌هاست. در یکی از تحقیق‌های انجام‌شده، عنوان شده که تنها ۳۰٪ مدل‌های علمی که برای مراکز درمانی ارائه شده‌اند در عمل مورد استفاده قرارگرفته‌اند.[۱۰] کاربرد این مدل‌ها در آمریکا نسبت به اروپا کم‌تر است هرچند مقالات ارائه‌شده در آمریکا بیشتر است.

۲. تعریف و مدل‌سازی مسئله

عموماً مسائل زمان‌بندی اطاق‌های عمل در دو گام انجام می‌شود. در معاینات پزشکی، بیمارانی که در آینده به جراحی نیاز دارند لیست می‌شوند؛ گام اول به تخصیص این بیماران به روزهای مختلف هفته می‌پردازد، به‌گونه‌یی که اهدافی چون یکنواختی در سطح استفاده از منابع بخش (جراحان، پرستاران، اطاق‌ها و...) تأمین و محدودیت‌های استاندارد نیز رعایت شود. درگام دوم بیماران مشخص شده‌ی هر روز به اطاق‌های عمل تخصیص می‌یابد و توالی بیماران هر اطاق چنان مشخص می‌شود که محدودیت‌هایی نظیر امکان عمل یک بیمار در یک اطاق، در دسترس بودن تمام منابع مورد نیاز در زمان شروع جراحی، هم‌پوشانی نداشتن عمل‌های جراحی مربوط به یک جراح در اطاق‌های متفاوت و... رعایت شود. در اینجا منظور از اطاق جراحی فضایی است که شامل فقط یک تخت برای جراحی است و مسئله‌ی مورد بررسی در این نوشتار از نوع گام دوم است.

در این مسئله‌فرض بر این است که جراحان برحسب شیفت کاری هفتگی خود، بیماران‌شان را به روزهای مختلف هفته تخصیص داده‌اند. درنتیجه هر بیمار، روز یا شب قبل از موعد عمل خود در بیمارستان بستری می‌شود تا مراحل مقدماتی عمل وی انجام شوند. بدین‌ترتیب بیماران در این مسئله‌از نوع انتخابی خواهند بود. متناظر با انتخابی یا غیرانتخابی بودن نوع بیماران، دو نوع زمان‌بندی ایستا و پویا مطرح می‌شود که زمان‌بندی مورد بحث در این نوشتار از نوع ایستا می‌باشد.

اصولاً بخش جراحی بیمارستان‌ها طوری طراحی شده‌اند که بتوان در آن جراحی‌های مختلف انجام داد؛ بعضی از اطاق‌ها کاملاً تخصصی و بعضی دیگر قادر به انجام چند نوع عمل‌اند. سرپرستار امکان عمل هر بیمار را ــ با توجه به نوع بیماری‌اش ــ در اطاق یا اطاق‌های مختلف مشخص می‌کند. بازه کاری همه‌ی اطاق‌های عمل نیز یکسان در نظر گرفته شده است. یکی دیگر از منابع اصلی «جراح» است؛ هر جراح بیماران مخصوص به خود را دارد و می‌تواند طول جراحی هریک را طبق نوع بیماری و عوامل دخیل در حین عمل، از قبل با دقت مناسبی تخمین بزند. همچنین فرض می‌کنیم هیچ توالی خاصی بین بیماران یک جراح وجود ندارد و توالی انجام عمل آن‌ها در حین اختصاص آن‌ها به اطاق‌های ممکن برای عمل‌شان مشخص خواهد شد. جراحان همچنین برحسب طول کل زمان جراحی‌های بیماران‌شان و ساعات آزاد خود، بازه کاری‌شان را به بخش جراحی ارائه می‌کنند. به‌علت مشغول بودن سایر منابع ــ مانند اطاق‌ها ــ ممکن است جراح مجبور به انتظار تا آماده شدن تمامی شرایط شود و این در برخی موارد موجب اضافه‌کاری وی خواهد شد. مسلماً تمامی جراحان تمایل دارند در بازه کاری که ارائه کرده‌اند، جراحی‌هایشان تمام شود تا بتوانند به‌موقع به عمل‌های جراحی خود در سایر بیمارستان‌ها، یا قرارهای ملاقات‌شان با بیماران در مطب خود برسند. جراحان صاحب نام نیز بیشتر تمایل دارند با بیمارستان‌هایی کارکنند که منظم‌ترند و اختلال کم‌تری در برنامه‌ی کاری روزانه‌شان ایجاد می‌شود. آنان همچنین زمان‌بندی را ترجیح می‌دهند که در آن تأخیرهای میان جراحی‌هایشان در کمترین حد باشد. در این صورت آن‌ها زودتر بیمارستان را ترک خواهند کرد.

تکنیسین بیهوشی منبع دیگری است که هر اطاق عمل به‌صورت اختصاصی دارای یکی از آن‌هاست که در این مسئله به عنوان یک منبع محدود در نظر گرفته نمی‌شود. بیمار از لحظه‌ی قرارگرفتن روی تخت اطاق عمل تا بیهوشی کامل زیر نظر این تکنیسین است، و این نخستین مرحله از مراحل چهارگانه‌ی عمل است. بعد از بیهوشی کامل، کار جراح شروع می‌شود و در مدت زمانی که از قبل تعیین شده، عمل جراحی بیمار را انجام می‌دهد (مرحله دوم)، سپس جراح می‌تواند اطاق عمل را ترک کند. در ادامه، پرستار شروع به بخیه زدن می‌کند و کارهای ناتمام را انجام می‌دهد و تکنیسین بیهوشی نیز با قطع داروها، هوشیاری بیمار را بازمی‌گرداند (مرحله سوم). با مشاهده‌ی حالات مناسب بیمار، او را به اطاق بهبود می‌برند تا هوشیاری کامل وی مسجل شود. همچنین فرض بر این است که هیچ محدودیتی در تعداد تخت‌های اطاق‌های بهبود نداریم. بعد از خروج بیمار از اطاق عمل، مدت زمانی نیز صرف پاک‌سازی اطاق عمل می‌شود (مرحله چهارم) تا اطاق برای جراحی‌های بعدی آماده شود. به‌منظور ساده‌سازی، مدت زمان مراحل یک، سه و چهار برای تمامی بیماران ثابت در نظرگرفته شده است. به‌طورکلی می‌توان خروجی این مسئله‌را طرح زمان‌بندی بخش جراحی برای یک روز عنوان کرد.

در این مسئله، تخصیص بیماران به اطاق‌ها و ایجاد توالی بین عمل‌های هر اطاق به‌طور هم‌زمان انجام می‌گیرد. از این‌رو فضای حل مسئله‌بسیار بزرگ خواهد بود و مدل را کمی پیچیده می‌کند. تابع هدف این مسئله دارای دو معیار است: ۱. کمینه کردن میزان اضافه‌کاری جراحان (تابع هدف I)؛ ۲. کمینه‌کردن فواصل بیکاری جراحان در بین جراحی‌ها (تابع هدف II). ضریب اهمیت هر یک از این دو معیار به‌صورت منعطف در نظرگرفته شده است.

۱.۲. نمادهای مورد استفاده برای مدل‌سازی

۱.۱.۲. پارامترهای تصمیم‌گیری

$R = \{1, ..., |R|\}$: مجموعه اطاق‌های عمل.

$S = \{1, ..., |S|\}$: مجموعه جراحان.

$P = \{1, ..., |P|\}$: مجموعه بیماران مورد نظرکه در یک روز قرار است عمل شوند.

$[0, c]$: بازه کاری تمام اطاق‌های عمل (این بازه برای همه اطاق‌ها یکسان در نظر گرفته می‌شود).

$[u_s, v_s]$: بازه مورد نظر جراح s برای حضور در بخش جراحی که زیر مجموعه بازه کاری اطاق‌های عمل است.

M: عددی مثبت و بسیار بزرگ.

γ_{pr}: اگر امکان عمل بیمار p در اطاق r باشد برابر یک است و در غیر این صورت صفر است.

φ_{sp}: اگر بیمار p متعلق به جراح s باشد برابر یک است و در غیر این صورت صفر است.

θ^1: مدت زمانی ثابت برای همه بیماران که صرف آماده‌سازی لوازم عمل، چک کردن دستگاه‌ها و بیهوش کردن بیمار می‌شود.

θ_p^2: مدت زمانی است که طول جراحی بیمار p را نشان می‌دهد.

θ^3: مدتی زمانی که پرستار بخیه می‌زند و عملیات ریکاوری (به‌هوش‌آوری) در اطاق عمل انجام می‌شود. به‌منظور ساده‌سازی، این مقدار برای همه بیماران یکسان و ثابت در نظر گرفته شده است.

θ^4: مدت زمانی ثابت که صرف تمیزکردن اطاق عمل می‌شود تا برای انجام عمل جراحی بعدی آماده شود.

λ: ضریب اهمیت تابع هدف I است که مقداری بین صفر و یک می‌گیرد.

۲.۱.۲. متغیرهای تصمیم

t_p: متغیری صحیح است و لحظه‌ی زمانی قرارگرفتن بیمار روی تخت اطاق عمل را نشان می‌دهد.

x_{pr}: متغیری بین صفر و ۱ است؛ ۱ نشان‌دهنده‌ی اختصاص بیمار p به اطاق r است و در غیر این‌صورت صفر خواهد بود.

y_{pqr}: متغیری بین صفر و ۱ است؛ ۱ نشان‌دهنده‌ی قرارگرفتن بیمار q بعد از بیمار p روی تخت اطاق عمل اتاق r است و در غیر این‌صورت صفر است (لزوماً هر دو بیمار در اطاق r عمل می‌شوند).

o_s: متغیری صحیح است که میزان اضافه‌کاری جراح s را نشان می‌دهد.

fp_s: متغیری صحیح است که زمان شروع جراحی اولین بیمار جراح s را نشان می‌دهد.

lp_s: متغیری صحیح است که زمان اتمام جراحی آخرین بیمار جراح s را نشان می‌دهد.

با استفاده از نمادها و متغیرهای تصمیم معرفی شده، می‌توان مسئله را چنین مدل کرد:

$$\text{Min} \sum_{s\in S}\left(\lambda.o_s + (1-\lambda)(lp_s - fp_s - \sum_{p\in P}\theta_p^2.\varphi_{s,p})\right) \quad (1)$$

s.t

$$\sum_{r=1}^{R} x_{pr} = 1, \qquad \forall p \in P \quad (2)$$

$$x_{pr} \le \gamma_{pr}, \qquad \forall p \in P, \forall r \in R \quad (3)$$

$$y_{pqr} \le x_{pr}, \qquad \forall p \ne q \in P, \forall r \in R \quad (4)$$

$$y_{pqr} \le x_{qr}, \qquad \forall p \ne q \in P, \forall r \in R \quad (5)$$

$$y_{pqr} + y_{qpr} \le 1 + M(2 - x_{pr} - x_{qr}), \quad \forall p \ne q \in P, \forall r \in R \quad (6)$$

$$y_{pqr} + y_{qpr} \ge 1 - M(2 - x_{pr} - x_{qr}), \quad \forall p \ne q \in P, \forall r \in R \quad (7)$$

$$\varphi_{sp}.u_s \le t_p + \theta^1, \quad \forall p \in P, \forall s \in S \quad (8)$$

$$t_q \ge (t_p + \theta^1 + \theta_p^2 + \theta^3 + \theta^4) - M(1 - y_{pqr}), \quad \forall p \ne q \in P, \forall r \in R \quad (9)$$

$$t_q + \theta^1 \ge (t_p + \theta^1 + \theta_p^2) - M(2 - \phi_{sq} - \phi_{s,p}), \quad \forall p \ne q \in P, \forall s \in S \quad (10)$$

$$o_s \ge \varphi_{sp}.(t_p + \theta^1 + \theta_p^2) - v_s, \quad \forall p \in P, \forall s \in S \quad (11)$$

$$o_s \ge 0, \qquad \forall s \in S \quad (12)$$

$$fp_s \le \varphi_{sp}.(t_p + \theta^1), \qquad \forall p \in P, \forall s \in S \quad (13)$$

$$lp_s \ge \varphi_{sp}.(t_p + \theta^1 + \theta_p^2), \qquad \forall p \in P, \forall s \in S \quad (14)$$

$$fp_s \ge 0, \qquad \forall s \in S \quad (15)$$

$$lp_s \ge 0, \qquad \forall s \in S \quad (16)$$

$$x_{pr} \in \{0, 1\}, \qquad \forall p \in P, \forall r \in R \quad (17)$$

$$y_{pqr} \in \{0, 1\}, \qquad \forall p, q \in P, \forall r \in R \quad (18)$$

$$t_p \in Z^+, \qquad \forall p \in P \quad (19)$$

تابع هدف، کمینه‌سازی مجموع اضافه‌کاری جراحان با ضریب λ و مجموع فواصل بیکاری میان جراحی‌های هر جراح با ضریب $(\lambda - 1)$ است. محدودیت ۲ بیان‌گر تخصیص هر بیمار فقط به یک اطاق است. در محدودیت ۳، بیمار p به اطاقی اختصاص می‌یابد که انجام عمل او در آن اطاق ممکن باشد. محدودیت‌های ۴ و ۵ نشان‌می‌دهند که اگر $x_{pr} = 0$ یا $x_{qr} = 0$، آنگاه y_{pqr} و y_{qpr} هر دو صفر خواهند شد. محدودیت‌های ۶ و ۷ نیز نشان می‌دهند که اگر x_{pqr} و x_{qpr} هر دو مقدار ۱ بگیرند، آنگاه فقط یکی از دو متغیر y_{pqr} و y_{qpr} باید مقدار ۱ بگیرد. با استفاده از محدودیت ۸ لحظه‌ی زمانی شروع عمل جراحی هر بیمار از لحظه‌ی زمانی شروع بازه کاری جراحش بیشتر خواهد بود و اگر بیماری به یک جراح مربوط نباشد سمت چپ معادله صفر خواهد بود. در محدودیت ۹ اگر در اطاقی دو عمل متوالی انجام شود، باید لحظه‌ی زمانی ورود بیمار دوم از لحظه‌ی زمانی پاکسازی اطاق در اثر جراحی بیمار اول بزرگ‌تر باشد. در محدودیت ۱۰ درمورد بیمارانی که مربوط به یک جراح باشند، باید لحظه‌ی زمانی شروع عمل جراحی بیمار دوم از لحظه‌ی زمانی اتمام جراحی بیمار اول بیشتر باشد. باید دقت داشت که منظور از شروع و پایان جراحی، زمانی است که بیمار کاملاً بی‌هوش شده و جراح شروع به جراحی می‌کند تا زمانی که کارش تمام می‌شود و بیمار را به پرستار بسپارد، یعنی بازه بین θ^1 تا $\theta^1 + \theta_p^2$.

محدودیت‌های ۱۱ و ۱۲ میزان اضافه‌کاری هر جراح را نشان می‌دهد. در محدودیت ۱۱ اگر بیمار p مربوط به جراح s باشد و زمان اتمام جراحی وی از بازه کاری جراح s (v_s) تجاوز کند آنگاه متغیر o_s این مقدار اضافه‌کاری را نشان خواهد داد؛ و اگر تمام جراحی‌های یک جراح قبل از اتمام بازه کاری‌اش تمام شود، o_s بزرگ‌تر از عددی منفی $(-v_s)$ خواهد بود که با توجه به محدودیت ۱۲ عدد صفر را خواهد گرفت. با استفاده از محدودیت ۱۳، زمان شروع جراحی اولین بیمار هر جراح مشخص می‌شود. fp_s عددی مثبت است که کوچک‌تر از زمان شروع تمام بیماران مربوط به جراح s است. با استفاده از محدودیت ۱۴ زمان اتمام آخرین جراحی هر جراح مشخص می‌شود. lp_s عددی مثبت و بزرگ‌تر از زمان اتمام جراحی همه بیماران جراح s است. محدودیت‌های ۱۵ تا ۱۹ مربوط به محدوده‌ی مجاز تغییرات متغیرهای مسئله‌است.

۳. طرح شاخه و کران

روش حل بیان شده در این بخش، «روش شاخه و کران» است که یکی از قدیمی‌ترین و معتبرترین روش‌های حل دقیق مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی است. برای کمک به درک بهتر بخش‌های مختلف این نوشتار، مثالی با اندازه‌ی کوچک طراحی شده که در آن $|R| = 3$، $|S| = 2$ و $|P| = 5$ است. بازه کاری همه اطاق‌های

عمل $[0, c] = [0, 180]$ و بازه کاری جراحان به‌صورت $[u_1, v_1] = [0, 100]$ و $[u_2, v_2] = [50, 180]$ است. مقادیر $\theta^1 = \theta^3 = \theta^4 = 5$ برای تمامی بیماران یکسان در نظر گرفته شده و θ_p^2، Φ و Γ عبارت‌اند از:

$$\Theta^2 = [\theta_p] = [\ 55 \quad 25 \quad 45 \quad 45 \quad 40\ ]$$

$$\Phi = [\varphi_{sp}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = [\gamma_{pr}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای سادگی نمایش، $d(p)$ بیانگر جراح بیمار p، $Room(p)$ اطاقی است که بیمار p در آن جراحی می‌شود و PR^p بیانگر مجموعه اطاق‌های عمل ممکن برای بیمار p هستند. در این طرح، بیماران به اطاق‌های ممکن خودشان می‌توانند تخصیص یابند و بین بیماران هر اطاق نیز، توالی‌های مختلفی امکان‌پذیر است.

۱.۳. استراتژی شاخه‌سازی

در هر گره یک بیمار به یک اطاق اختصاص می‌یابد. توالی انجام عمل‌ها برای بیماران یک اطاق و همچنین برای بیماران یک جراح از طریق روابط والد ـ فرزندی در درخت جست‌وجو مشخص می‌شود. اگر RP^N مجموعه بیماران تخصیص نیافته تا گره N باشد، فرزندان گره N شامل تخصیص تمامی اعضای RP^N به تمامی اطاق‌های ممکن برای آن‌هاست. یعنی به ازای $\forall p \in RP^N$، تمامی حالات اختصاص p به PR^p در نظر گرفته می‌شود که به‌ازای هر تخصیص، یک گره فرزند برای گره N ایجاد می‌شود. فرض کنید در گره N، تخصیص بیمار p به اطاق r صورت گرفته باشد ($N(p, r)$). با توجه به مسیر ریشه تا گره N که معرف یک طرح زمان‌بندی جزئی[5] است، زمان شروع عمل بیمار p برابر است با زودترین زمانی که هم پزشک این بیمار و هم اطاق اختصاص یافته به آن به‌مدت لازم در دسترس باشند. $Profile-Room_r$ زمان‌های اشغال بودن اطاق r و $Profile-Surgeon_s$ زمان‌های مشغول بودن جراح s ($d(p) = s$) را نشان می‌دهد و این مقادیر برحسب مسیر گره ریشه تا والد گره N محاسبه می‌شوند. اگر:

$$Profile-Room_r(t) = \begin{cases} 1; & \text{اگر اطاق } r \text{ در زمان } t \text{ اشغال باشد} \\ 0; & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$Profile-Surgeon_s(t) = \begin{cases} 1; & \text{اگر جراح } s \text{ در زمان } t \text{ مشغول باشد} \\ 0; & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

آنگاه زمان ورود بیمار p به اطاق، یا همان زمان قرارگرفتن بیمار روی تخت چنین محاسبه خواهد شد:

$$t_p = Min\{t^* | Profile-Room_r(t) = 0, t = t^*, ..., t^* + \theta^1 + \theta_p^2 + \theta^3 + \theta^4 \text{and } Profile-Surgeon_s(t) = 0; t = t^* + \theta^1, ..., t^* + \theta^1 + \theta_p^2\}$$

برای نمایش گره‌ها در درخت جست‌وجو از نماد شکل ۱ استفاده می‌شود.

شماره گره	
شماره اطاق	شماره بیمار

شکل ۱. نمایش یک گره.

۲.۳. استراتژی کران‌گذاری

برای جلوگیری از شمارش گره‌های تکراری یا پیشرفت گره‌هایی که می‌دانیم بهبودی در بهترین جواب یافته شده ایجاد نمی‌کنند، باید قواعدی برای کران‌گذاری طراحی کرد. در ادامه، چهار ویژگی به‌عنوان استراتژی‌های کران‌گذاری ارائه می‌شوند.

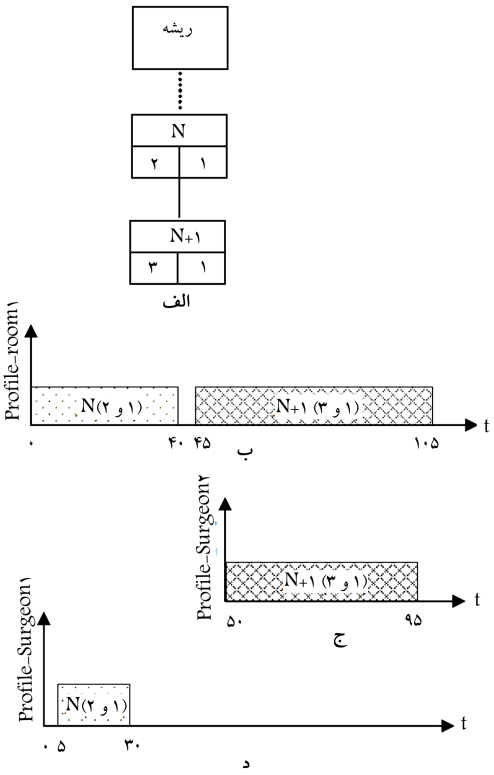
ویژگی ۱. اگر در گره N، برای بیمار p به اندازه $\theta^1 + \theta_p^2 + \theta^3 + \theta^4$ در $Profile - Room_r$ (که $r \in PR^p$) زمان در دسترس باشد و دقیقاً هم‌زمان با مرحله θ_p^2 از عمل جراحی، در $Profile - Surgeon_s$ (که $d(p) = s$)، جراح s نیز به اندازه θ_p^2 در دسترس باشد و بیمار p آخرین بیمار برای جراح s یا اطاق عمل r تا این لحظه نباشد، آنگاه گره N حذف خواهد شد.

با توجه به ویژگی ۱، اگر فضایی مناسب برای جراحی بیمار p در بین جراحی‌های انجام شده تاکنون وجود داشته باشد، این گره حذف خواهد شد زیرا در گرهی مانند N' که در مسیر دیگری از درخت جست‌وجو ایجاد می‌شود، جراحی بیمار p در آن موقعیت در نظر گرفته می‌شود. البته در آن حالت، بیمار p به‌عنوان آخرین بیمار جراح s یا اطاق r تا آن لحظه خواهد بود.

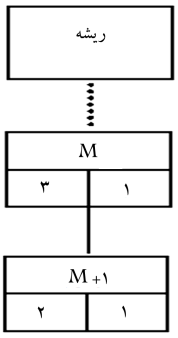
برای روشن‌تر شدن این ویژگی، حالات مختلف تخصیص دو بیمار ۲ و ۳ را به اطاق ۱ نشان می‌دهیم. با توجه به شکل ۲الف و زمان شروع بازه کاری جراح ۲، عمل این بیمار از دقیقه‌ی ۴۵ تا ۱۰۰ انجام خواهد شد. با این توصیف $Profile-Room_1$، $Profile-Surgeon_1$ و $Profile-Surgeon_2$ به‌صورت شکل‌های ۲ب، ۲ج و ۲د به‌دست خواهد آمد. دقت شود که گانت چارت ارائه شده برای هر عمل جراحی، بیانگر زمان هر چهار مرحله است. مثلاً $\theta_2^2 = 25$ است ولی زمان ۴۰ دقیقه‌یی روی نمودار بیانگر جمع زمان θ_2^2 با زمان‌های $\theta^1 + \theta^3 + \theta^4 = 15$ است که در مجموع ۴۰ دقیقه شده است. همچنین اگرچه جراح ۲ از دقیقه‌ی ۵۰ به بعد حضور دارد، $N + 1(3, 1)$ از دقیقه ۴۵ شروع شده است؛ علت آن است که در $\theta^1 = 5$ دقیقه ابتدایی نیازی به جراح نیست. اما اگر در شاخه‌یی دیگر، شکل ۳ را داشته باشیم، چرا که قبل از جراحی بیمار ۳ به اندازه‌ی ۴۰ دقیقه اطاق ۱ خالی است، می‌توان جراحی بیمار ۲ را در آن انجام داد. با اطلاعات به دست آمده اگر $Profile-Room_1$ و $Profile-Surgeon_2$ و $Profile-Surgeon_1$ ترسیم شوند، دقیقاً همان شکل‌های ۲ب، ۲ج و ۲د به دست خواهند آمد با این تفاوت که اندیس گره‌ها از N به M تغییر خواهند یافت. پس در اینجا از ادامه‌ی این شاخه جلوگیری می‌کنیم (گره تخصیص بیمار ۲ به اطاق ۱ را حذف می‌کنیم).

ویژگی ۲. اگر به گرهی بیمار p و به فرزند این گره بیمار q اختصاص یابد و $Room(p) = Room(q)$ و $d(p) = d(q)$ و $q < p$ باشد آنگاه گره فرزند حذف خواهد شد (شکل ۴الف و ۴ب).

متناظر با شاخه‌ی شکل ۴ الف، $Profile - Room_1$ و $Profile - Surgeon_1$ به‌صورت شکل‌های ۴ج و ۴د به دست خواهند آمد. اما متناظر با شاخه‌ی شکل ۴ب، شکل‌های ۵الف و ۵ب به دست خواهند آمد.



شکل ۲. توصیف خاصیت ۱.

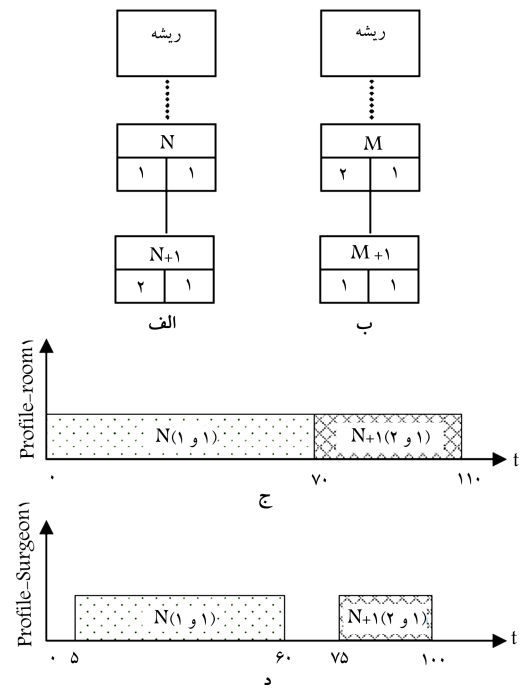


شکل ۳. نمایش حالت تکراری با توجه به خاصیت ۱.

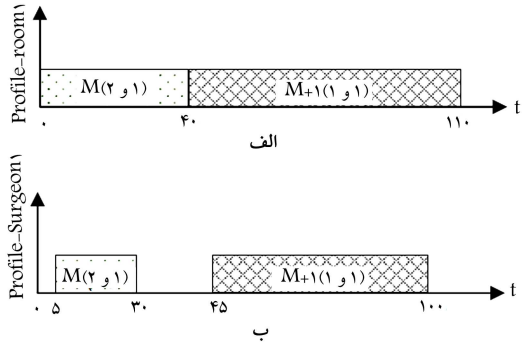
هر دو شکل ۴الف و ۴ب دارای $Profile - Room_1$ مشابه‌اند و در هر دو، جراح ۱ از دقیقه‌ی ۵ تا دقیقه‌ی ۱۰۰ مشغول انجام عمل است. دقت کنید که فاصله‌های ۱۵ دقیقه‌یی در دو شکل ۴د و ۵ب وجود دارند که موقعیت زمانی آن‌ها با هم یکسان نیست. اما چون هیچ‌گاه جراحی‌با طول ۱۵ دقیقه وجود ندارد پس هرگز بیماری در این فاصله قرار نخواهد گرفت. در تولید مسائل نمونه نیز تمام داده‌های مربوط به طول جراحی بزرگ‌تر از ۳۰ در نظرگرفته شده‌اند. حال می‌توان نتیجه‌گرفت که دو شاخه‌ی ۴الف و ۴ب تکراری‌اند و یکی از آن‌ها قابل حذف است. طبق ویژگی ۲، گره اختصاص بیمار ۱ به اطاق ۱ (شکل ۴ب) حذف می‌شود.

ویژگی ۳. اگر به گرهی بیمار p و به فرزند این گره بیمار q اختصاص یابد و $Room(q) \neq Room(p)$ و $d(q) \neq d(p)$ و $q < p$ باشد، آنگاه گره فرزند حذف خواهد شد.

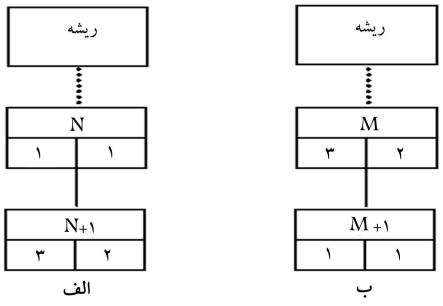
حال اگر شکل‌های متناظر با شکل ۶ب رسم شود، دقیقاً همان شکل‌های ۷ به دست خواهند آمد با این تفاوت که در تمامی موارد نمادهای N به M تبدیل



شکل ۴. توصیف خاصیت ۲.



شکل ۵. نمایش حالت تکراری با توجه به خاصیت ۲.

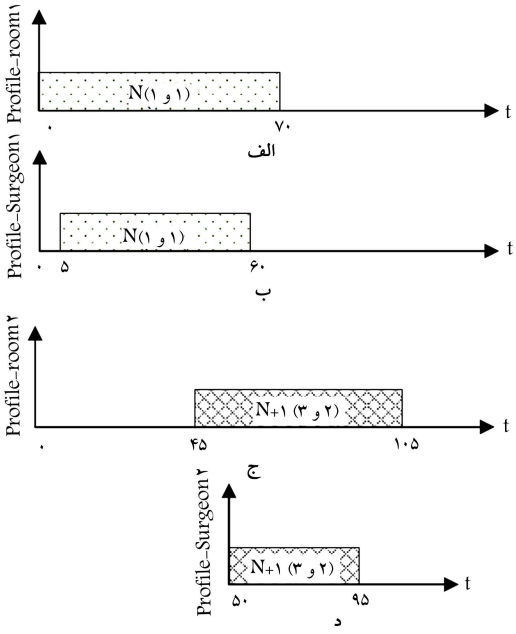


شکل ۶. توصیف خاصیت ۳.

می‌شوند. پس دقایق اشغال شده از جراحان و اطاق‌ها کاملاً مشابه است و فقط کافی است یکی از شکل‌های ۶الف یا ۶ب بررسی شوند. طبق ویژگی ۳، گره $M + 1(1, 1)$ حذف خواهد شد.

ویژگی ۴. کران بالای الگوریتم، بهترین جواب به دست آمده است.

متناظر با شکل ۶الف، شکل ۷ را داریم.



شکل ۷. نمایش حالت تکراری با توجه به خاصیت ۳.

۳.۳. الگوریتم شاخه و کران

به‌منظور جلوگیری از مواجهه با مشکل حافظه در رایانه، الگوریتم طراحی شده به‌صورت عمقی[۶] پیش‌روی می‌کند. ساختار کلی الگوریتم شاخه و کران برای این مسئله‌عبارت است از:

گام ۱) گره ریشه را ساخته و آن را به‌عنوان گره والد در نظر می‌گیریم. RP این گره مجموعه تمام بیماران است.

گام ۲) اگر گره والد، همان گره ریشه است و تمام بیماران آن به اطاق‌های ممکن‌شان تخصیص یافته‌اند توقف می‌کنیم؛ کران بالای به دست آمده تا این لحظه «جواب بهینه» است.

گام ۳) از RP گره والد، اولین بیماری که هنوز به تمام اطاق‌های ممکن‌اش تخصیص نیافته را انتخاب کرده و گره فرزند را با همان بیمار و اولین اطاق ممکن شمرده نشده برای او، ایجاد کنید. اما اگر تمام بیماران RP این گره به اطاق‌های ممکن‌شان تخصیص یافتند به گام ۸ بروید.

گام ۴) اگر RP گره فرزند تهی است و مقدار تابع هدف این شاخه‌ی جدید از کران بالای به دست آمده تا این لحظه کم‌تر است، کران بالا را به‌روزکرده و به گام ۸ بروید.

گام ۵) اگر RP گره فرزند تهی است و مقدار تابع هدف این شاخه جدید از کران بالای به دست آمده تا این لحظه کم‌تر نیست، کران بالا بدون تغییر خواهد ماند و به گام ۸ بروید.

گام ۶) شرط‌های کران‌گذاری ذکر شده در بخش ۲.۳.، درمورد گره فرزند بررسی شود و اگر یکی از آن‌ها برقرار بود به گام ۸ برود.

گام ۷) گره فرزند را به‌عنوان گره والد در نظر گرفته و به گام ۳ بروید.

گام ۸) والد این گره را دوباره به‌عنوان گره والد در نظر گرفته و به گام ۲ بروید.

در این الگوریتم منظور از RP، بیماران باقی‌مانده تا این گره هستند و ترتیب بیماران براساس قواعدی است که در ابتدای بخش ۳ تشریح شد. با توجه به مسیر هر گره تا ریشه، بیماران تخصیص یافته به اطاق‌های مختلف مشخص می‌شوند و بقیه‌ی بیماران در مجموعه RP قرار می‌گیرند که می‌توانند به اطاق‌های ممکن خودشان تخصیص یابند.

در گام ۲ بعد از بررسی تمام شاخه‌های منشعب از گره ریشه، جواب بهینه به دست می‌آید. در توضیح گام ۳ می‌توان گفت که از بیماران RP یک گره (فرض کنید این گره N باشد)، اولین بیماری که هنوز به تمام اطاق‌های ممکن‌اش تخصیص نیافته را انتخاب می‌کنیم و درگرهی که به‌عنوان فرزند گره N ساخته‌ایم، این بیمار به اولین اطاق ممکن اختصاص می‌یابد. اما اگر تمام بیماران RP گره N به اطاق‌های ممکن‌شان اختصاص یافته باشند، مشخص می‌شود که تمام زیرشاخه‌های گره N تولید شده‌اند و باید به یک سطح قبل از گره N برگردیم که این عمل در گام ۸ انجام می‌شود.

گام ۴ هنگامی اتفاق می‌افتد که به انتهای یک شاخه رسیده باشیم و دیگر بیماری برای اختصاص در RP وجود نداشته باشد. اگر جواب به دست آمده از طریق اختصاص بیماران به اطاق‌ها در این شاخه‌ی پایان‌یافته از بهترین جواب فعلی بهتر باشد، جایگزین آن خواهد شد. حال باید به یک سطح قبل برگردیم که این عمل در گام ۸ انجام می‌شود. گام ۵ هنگامی اتفاق می‌افتد که به انتهای یک شاخه رسیده باشیم و دیگر بیماری برای اختصاص در RP وجود نداشته باشد و همچنین جواب به دست آمده در این شاخه از جواب‌های به دست آمده تا این لحظه بهتر نباشد. در این صورت جواب فعلی بدون تغییر خواهد ماند و به گام ۸ می‌رویم.

در گام ۶ بررسی می‌کنیم که آیا قواعد کران‌گذاری ذکر شده در بخش ۲.۳. درمورد این گره فرزند (که در گام ۳ تولید شده است) صدق می‌کند یا خیر. اگر یکی از خاصیت‌ها برای گره فرزند برقرار باشد، این گره حذف خواهد شد و به گام ۸ خواهیم رفت. گام ۷ بیان می‌کند که گره فرزند (تولیدشده در گام ۳) را به‌عنوان والد در نظر می‌گیریم و از این به بعد عملیات شاخه‌سازی بر روی این گره انجام خواهد شد. در گام ۸ عنوان می‌شود که گرهی که در آن هستیم دیگر قادر به شاخه‌سازی نیست و باید والد این گره مجدداً به‌عنوان گره والد در نظرگرفته شود و عملیات شاخه‌سازی بر روی آن انجام شود.

۴. اجرا و نتایج محاسباتی

قبل از اجرای الگوریتم شاخه و کران، مدل ارائه شده در بخش ۲ توسط نرم‌افزار Lingo ۹ پیاده‌سازی و اجرا شد. الگوریتم ارائه‌شده در بخش ۳.۳. نیز توسط زبان برنامه‌نویسی C++ پیاده‌سازی شده و کلیه‌ی اجراهای رایانه‌یی توسط رایانه‌ی دارای مشخصاتِ CPU از نوع ۵۳۰۰ MHz و حافظه‌ی ۲ GB اجرا شده است.

با ملاحظه‌ی داده‌های واقعی در بخش جراحی چند بیمارستان، داده‌های تصادفی تولید شدند تا الگوریتم مورد ارزیابی قرارگیرد. طول مدت بی‌هوش کردن بیمار، به‌هوش‌آوری وی و مدت زمان پاک‌سازی اطاق عمل پس از هر جراحی برای همه‌ی بیماران یکسان و ثابت فرض شده است. چنان‌که در تعریف مسئله‌اشاره شد، طول جراحی هر بیمار توسط جراحش تعیین خواهد شد. برای تولید داده‌های مربوط به طول جراحی از توزیع نرمال با میانگین ۶۰ و انحراف استاندارد ۱۰ استفاده شده است. بدین‌ترتیب ۹۵٪ داده‌ها در بازه $(\mu - ۳\sigma, \mu + ۳\sigma) = (۳۰, ۹۰)$ قرار خواهند گرفت. مقادیر کم‌تر از ۳۰ و بیشتر از ۹۰ را حذف کرده و مجدداً مقداری تصادفی به جای آن تولید می‌کنیم. بازه کاری اطاق‌های عمل برای تمامی مسائل یکسان در نظرگرفته شده و این بازه برابر $[۰, ۷۲۰]$ (برحسب دقیقه) است. هر بیمار نیز می‌تواند با توجه به نوع بیماریش به اطاق‌های مختلف اختصاص یابد. در مسئله سه عامل تغییرپذیر وجود دارد ــ تعداد بیماران (np)، متوسط تعداد اطاق‌های قابل

تخصیص به هر بیمار (nr)، و تعداد جراحان (ns) ــ که سه محور اصلی تولید مسائل نمونه را تشکیل می‌دهد. با در نظرگرفتن سه مقدار برای هر پارامتر به‌صورت $np = ۱۰, ۱۱, ۱۲$، $nr = ۱, ۱/۵, ۲$ و $ns = ۲, ۳, ۴$ نمونه مسائلی تولید شده است. همچنین فرض شده که بخش جراحی دارای سه اطاق است و بیماران نیز به‌صورت متعادل به جراحان اختصاص یافته‌اند. $nr = ۱$ بیانگر آن است که هر بیمار می‌تواند فقط به یک اطاق اختصاص یابد؛ $nr = ۱/۵$ نشان می‌دهد که تقریباً نیمی از بیماران امکان تخصیص به یک اطاق و نیمی دیگر امکان تخصیص به ۲ اطاق را دارند؛ $nr = ۲$ نیز بیان می‌دارد که هر بیمار به‌طور متعادل به یک یا دو یا سه اطاق قابل تخصیص است.

چنان که پیش‌تر بیان شد (بخش ۲)، بازه کاری هر جراح با توجه به طول مدت کل جراحی‌های وی تعیین می‌شود و زیرمجموعه‌ی بازه کاری اطاق‌های عمل است. اگر طول کل جراحی‌های هر جراح T_s در نظرگرفته شود، برای بررسی اثر تغییر طول بازه کاری جراح بر مقادیر تابع هدف، ضریب $(۱ + \alpha)$ طراحی شده که با تغییر α در $(۱ + \alpha).T_s$ می‌توان طول بازه کاری جراحان را تغییر داد. برای مشخص‌کردن زمان شروع بازه کاری هر جراح، عددی تصادفی از بازه‌ی $[۰, c - (۱ + \alpha).T_s]$ انتخاب می‌کنیم (c نشان‌گر انتهای بازه کاری اطاق‌های عمل است).

برای بررسی اثر تغییر np، nr و ns بر مدت زمان اجرای برنامه، با مقداردهی مجاز ذکر شده برای این عوامل، و تولید ۵ نمونه مسئله برای هر ترکیب از این سه عامل، جمعاً ۱۳۵ نمونه مسئله تولید شده است. متوسط زمان سپری شده (برحسب ثانیه) تا رسیدن به جواب بهینه و بیشترین زمان سپری شده از بین ۵ نمونه مسئله در داخل پرانتز در جدول ۱ ارائه شده‌اند. برای این نمونه مسائل $\alpha = ۰/۳$ و $\lambda = ۰/۶۶$ در نظر گرفته شده است.

مطابق انتظار، با افزایش هر یک از عوامل np، ns یا nr متوسط زمان اجرای برنامه تا رسیدن به جواب بهینه افزایش می‌یابد.

به‌منظور مقایسه‌ی الگوریتم شاخه و کران ارائه شده با نرم‌افزار Lingo، نمونه مسائلی که در آن‌ها $nr = ۲$ است را مجزا و ۹۰ نمونه مسئله‌ی باقی‌مانده با این نرم‌افزار حل شده است. جدول ۲ مشابه جدول ۱ طراحی شده با این تفاوت که فقط متوسط زمان حل در آن ارائه شده است، زیرا بیشینه زمان حل تفاوت چندانی با متوسط آن نداشت. مقایسه‌ی زمان‌های اجرای دو روش برای این ۹۰ نمونه مسئله نشان می‌دهد که گرچه در مسائلی با ابعاد خیلی کوچک نرم‌افزار Lingo کمی سریع‌تر به جواب بهینه می‌رسد، با افزایش ابعاد مسئله الگوریتم شاخه و کران برتری خود را نشان می‌دهد. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم شاخه و کران زمان حل ارائه شده توسط Lingo را حدود ۳۰٪ کاهش می‌دهد.

از آنجا که تابع هدفِ مورد بررسی دومعیاره است، بررسی اثر تغییرات λ ضروری است. این تحلیل با بررسی تغییرات ضریب α نتایج جالب‌تری را ارائه می‌دهد. بدین منظور پنج مقدار $\lambda = ۰, ۰/۲۵, ۰/۵, ۰/۷۵, ۱$ و پنج مقدار $\alpha = ۰, ۰/۱, ۰/۲, ۰/۳, ۰/۴$ در نظرگرفته شده است. با تولید ده نمونه مسئله با مشخصات $np = ۱۱$، $nr = ۱/۵$ و $ns = ۳$، اثر λ و α را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای تعیین بازه کاری هر جراح ابتدا T_s برای او محاسبه می‌شود و سپس یک عدد تصادفی یکنواخت از بازه‌ی $[۰, c - (۱/۴).T_s]$ را به‌عنوان زمان شروع بازه کاری این جراح در نظر می‌گیریم. براین اساس و با توجه به مقدار α در هر نمونه مسئله، انتهای بازه کاری وی نیز مشخص می‌شود. جدول مربوط به تغییرات تابع هدف کل، اضافه‌کاری جراحان و مدت زمان بیکاری جراحان بر اثر تغییر λ و α در شکل‌های ۸ تا ۱۰ نشان داده شده‌اند.

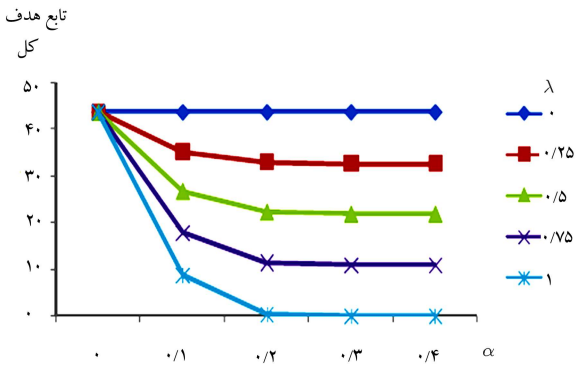
در شکل ۸ مشاهده می‌شود که با افزایش α (بازه کاری جراحان) مقدار تابع هدف کل نیز کاهش می‌یابد. برای $\lambda = ۱$ و $\alpha = ۰/۳, ۰/۴$ مقدار تابع هدف دقیقاً صفر است. یعنی مقدار تابع هدف کل بدون در نظرگرفتن مقادیر فواصل بیکاری جراحان برای $\alpha \geq ۰/۳$ صفر است و بزرگ‌تر کردن بازه کاری جراحان بی‌فایده خواهد بود. در شکل ۹ که فقط میزان اضافه‌کاری جراحان را نشان می‌دهد، به نظر می‌رسد که $\alpha = ۰/۲$ برای مسئله‌ی مطرح شده در این نوشتار با این مفروضات

جدول ۱. میانگین و بیشینه زمان سپری‌شده تا رسیدن به جواب بهینه توسط الگوریتم شاخه و کران.

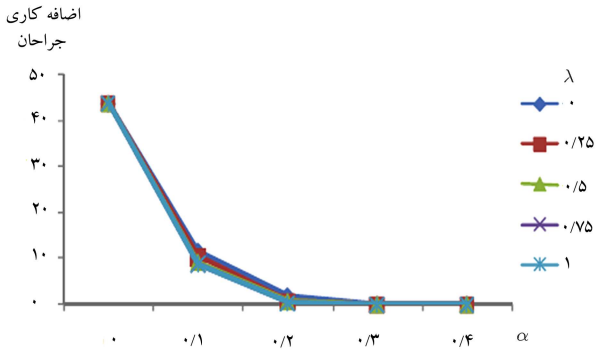
		np = ۱۰			np = ۱۱			np = ۱۲		
		ns = ۲	ns = ۳	ns = ۴	ns = ۲	ns = ۳	ns = ۴	ns = ۲	ns = ۳	ns = ۴
nr	۱	۰/۲(۱)	۰(۰)	۰/۲(۱)	۰/۴(۱)	۰/۲(۱)	۰(۰)	۱(۲)	۱/۲(۲)	۰/۸(۲)
	۱/۵	۰/۴(۱)	۰/۲(۱)	۰/۲(۱)	۱(۲)	۱(۲)	۱/۶(۳)	۲/۴(۷)	۷(۱۱)	۲۰(۸۲)
	۲	۰/۸(۲)	۴/۲(۱۱)	۵/۸(۱۷)	۴/۲(۹)	۱۱/۲(۲۲)	۱۹/۲(۵۹)	۲۴(۳۶)	۲۷/۶(۵۷)	۱۹۰(۶۸۴)

جدول ۲. میانگین زمان سپری شده تا رسیدن به جواب بهینه توسط نرم‌افزار Lingo.

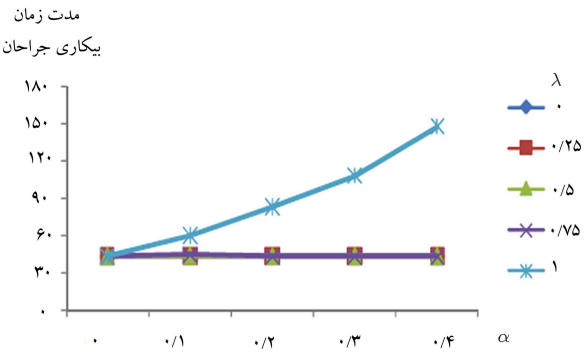
		np = ۱۰			np = ۱۱			np = ۱۲		
		ns = ۲	ns = ۳	ns = ۴	ns = ۲	ns = ۳	ns = ۴	ns = ۲	ns = ۳	ns = ۴
nr	۱	۰/۱	۰	۰/۱	۰/۳	۰/۲	۰	۱/۴	۱/۹	۱/۳
	۱/۵	۰/۳	۰/۳	۰/۲	۱/۴	۱/۵	۲/۱	۳/۱	۱۱/۶	۲۸/۳



شکل ۸. اثر تغییرات α و λ بر تابع هدف کل.



شکل ۹. اثر تغییرات α و λ برمیزان اضافه‌کاری جراحان.



شکل ۱۰. اثر تغییرات α و λ بر مدت زمان بیکاری جراحان.

ایده‌آل است و بدون این که بازه کاری جراحان بزرگ شود، میزان اضافه‌کاری آن‌ها را بسیار پایین می‌آورد. شکل ۱۰ که بیان‌گر مدت زمان بیکاری جراحان است، برای $\lambda = ۰, ۰/۲۵, ۰/۵, ۰/۷۵$ تقریباً مقادیر یکسانی را نشان می‌دهد. اما در صورت $\lambda = ۱$، یعنی وقتی که مدت زمان بیکاری جراحان در تابع هدف در نظر گرفته نشده، فواصل بیکاری جراحان به‌شدت افزایش می‌یابد. از این مطلب چنین استنباط می‌شود که همیشه باید $\lambda < ۱$ در نظر گرفته شود. با توجه به شکل ۸ مقدار $\lambda = ۰/۷۵$ برای مسئله‌ی مطرح شده در این مقاله مناسب به نظر می‌رسد زیرا مقادیر تابع هدف کل نیز نسبت به دیگر λها کم‌تر است.

برای بررسی اثر قواعد کران‌گذاری ذکر شده در بخش ۳، تعداد ۱۳۵ نمونه مسئله با تمام ترکیبات ممکن np، nr و ns تولید شده که در آن‌ها $\alpha = ۰/۲$ و $\lambda = ۰/۷۵$ در نظر گرفته شده است. با در نظرگرفتن حدود زمانی مختلف برحسب

جدول ۳. اثر خاصیت‌های ۲ و ۳ کران‌گذاری.

	حد زمانی اجرای الگوریتم بر حسب ثانیه (٪)					
	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
برنامه کامل	۸۰	۸۷	۹۱	۹۲	۹۴	۹۵
برنامه بدون خاصیت ۲	۷۶	۸۶	۹۱	۹۲	۹۵	۹۵
برنامه بدون خاصیت ۳	۳۱	۴۶	۵۱	۵۷	۶۰	۶۴
برنامه بدون خاصیت ۲ و ۳	۲۹	۴۲	۵۲	۵۹	۶۳	۷۰

ثانیه (جدول ۳)، درصد تعداد مسائلی که در غیاب خاصیت‌های ۲ یا ۳ به جواب بهینه رسیده‌اند نشان داده شده است.

از نتایج جدول ۳ این‌گونه استنباط می‌شود که وقتی زمان اجرای الگوریتم محدود باشد، خاصیت‌های ۲ و ۳ اثر قابل توجهی در کارایی الگوریتم دارند به‌طوری که در غیاب آن‌ها تعداد مسائلی که به جواب بهینه می‌رسد کاهش قابل توجهی می‌یابد ولی با در نظرگرفتن زمان بیشتری برای اجرای الگوریتم، اثر آن‌ها کم‌تر می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

هدفِ این مطالعه، ارائه‌ی یک رویکرد حل دقیق برای زمان‌بندی بخش جراحی بیمارستان است. در بررسی این‌گونه مسائل وجود عوامل مختلف باعث پیچیده شدن طرح زمان‌بندی می‌شوند. در این نوشتار سعی شده تا یک طرح زمان‌بندی ایستا برای بیماران انتخابی ارائه شود. جراحان به‌عنوان منبعی اصلی و ارزشمند در نظرگرفته شده‌اند و با ارائه‌ی یک تابع هدف دومعیاره ــ کمینه‌سازی اضافه‌کاری جراحان و فواصل بیکاری آن‌ها در بین جراحی‌ها ــ برای جلب رضایت جراحان و نیز کاهش هزینه‌های ناشی از به‌کارگیری طرح‌های زمان‌بندی نامناسب تلاش شده است. به‌منظور حل مسئله، یک الگوریتم شاخه و کران با قواعد کران‌گذاری مناسب ارائه شده تا بتوان به جواب‌های بهینه دست یافت. متأسفانه مدیران بخش جراحی به دلیل این که میزان اضافه‌کاری جراحان در طرح‌های زمان‌بندی نامناسب‌شان کم‌تر شود، جراحان را مجبور می‌کنند تا بازه‌های کاری بزرگ‌تری به آن‌ها ارائه دهند تا کار برنامه‌ریزی آسان‌تر شود. در این طرح ادعا می‌شود که اگر ۲۰ درصد به طول کل جراحی‌های هر جراح اضافه کرده و آن را به‌عنوان طول بازه کاری وی در نظر بگیریم، این بازه مطلوب است و بازه‌های‌کاری بزرگ‌تر هیچ‌گونه بهبود چشم‌گیری در جواب‌های بهینه نخواهند داشت. در نظر نگرفتن میزان بیکاری جراحان در بین جراحی‌ها به‌عنوان معیاری در تابع هدف باعث می‌شود تا فواصل بیکاری آن‌ها خیلی زیاد شود، بدون این که هیچ‌گونه بهبودی در میزان اضافه‌کاری آن‌ها براثر اضافه شدن طول بازه کاری ایجاد شود. در این طرح نشان داده شده که ضریب ۰/۲۵ برای فواصل بیکاری جراحان در تابع هدف مناسب است و باعث کاهش مناسب هر دو معیار میزان اضافه‌کاری و میزان بیکاری جراحان می‌شود.

به نظر می‌رسد استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری و فرا‌ابتکاری نیز به‌عنوان روش حل موضوع تحقیقاتی جالبی باشد. همچنین توسعه‌ی مسئله به حالت‌های واقعی‌تر مانند در نظرگرفتن بیماران غیرانتخابی یا در نظرگرفتن پارامترهایی از مسئله‌نظیر طول مدت جراحی به‌صورت یک پارامتر تصادفی می‌تواند به‌عنوان یک موضوع تحقیقاتی مورد بررسی قرارگیرد. علاوه بر این‌ها، اضافه کردن سایر بخش‌های بیمارستانی نظیر اطاق بهبود و ICU به مسئله و یا استفاده از توابع هدفی نظیرکاهش ساعات اشغال نشده اطاق‌های عمل و افزایش بازده کاری آن‌ها می‌تواند در تحقیقات آتی مورد بررسی قرار گیرند.

پانوشت‌ها

1. elective
2. non-elective
3. Wullink
4. makespan
5. partial schedule
6. depth-first

منابع (References)

1. Magerlein, J.M. and Martin, J.B. "Surgical demand scheduling: A review", *Health Services Research*, **13**, pp. 418-433 (1978).

2. Etzioni, D.A., Liu, J.H., Maggard, M.A. and Ko, C.Y. "The aging population and its impact on the surgery workforce", *Annals of Surgery*, **238**(2), pp. 170-177 (2003).

3. Min, D. and Yih, Y. "Scheduling elective surgery under uncertainty and downstream capacity constraints", *European Journal of Operational Research*, **206**(3), pp.624-652 (2010).

4. Brecht, C.B. "Operating room planning and scheduling: A literature review", *European Journal of Operational Research*, **201**, pp. 921-932 (2010).

5. Wullink, G., Van Houdenhoven, M., Hans, E.W., Van Oostrum, J.M., Van der Lans, M. and Kazemier, G. "Closing emergency operating rooms improves efficienc", *Journal of Medical Systems*, **31** pp. 543-546 (2007).

6. Testi, A., Tanfani, E. and Torre, G. "A three-phase approach for operating theatre schedules", *Health Care Manage Science*, **10**, pp. 163-172 (2007).

7. Oostrum, J.M.V., Houdenhoven, M.V., Hurink, J.L., Hans, E.W., Wullink, G. and Kazemier, G. "A master surgery scheduling approach for cyclic scheduling in operating room departments", *OR Spectrum*, **30**(2), pp. 355-374 (2008).

8. Belien, J. and Demeulemeester. E. "Building cyclic master surgery schedules with leveled resulting bed occupancy", *European Journal of Operational Research*, **176** pp. 1185-1204 (2007).

9. Cardoen, B. and Demeulemeester, E. "Capacity of clinical pathways a strategic multi-level evaluation tool", *Journal of Medical Systems*, **32**(6), pp. 443-452 (2008).

10. Kellogg, D.L. and Walczak, S. "Nurse scheduling: From academia to implementation or not?", *Interfaces*, **37**(4), pp. 355-369 (2007).

A BRANCH-AND-BOUND ALGORITHM FOR A BI-OBJECTIVE OPERATING ROOM SCHEDULING PROBLEM

M. Ranjbar(corresponding author)
m_ranjbar@um.ac.ir
Dept. of Industrial Engineering
Ferdowsi University of Mashhad
A. Ghafourian
ab.ghafourian@gmail.com
Dept. of Industrial Engineering
Mazandaran University of Science and Technology

Sharif Industrial Engineering and Management Journal
Volume 29, Issue 2, Page 83-91, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 10 May 2011; received in revised form 23 October 2011; accepted 14 November 2011.

Abstract
In this research, the operating room scheduling problem is studied. During recent years, this problem has attracted many researchers in an effort to reduce costs and raise the quality of health services. In this article, a surgery is divided to four steps and the required resources for each step are determined, where surgeons and operating rooms are the main critical resources. For this problem, a mixed integer programming model is developed, in which, assignment of patients to rooms and, also, the sequence of patient surgery, are determined, such that the bi-objective function, including additional work costs and idle time costs of surgeons, is minimized. This model is able to solve very small size problems in a reasonable time. Thus, a branch-and-bound algorithm has been developed to find an optimal solution, in each node of which, a patient is assigned to a room. The sequence of operations for patients of a room and also for patients of a surgeon is established using parent-child relations of the search tree. Moreover, in order to prevent the enumeration of repetitive nodes or the extension of nodes that surely will not improve the best found solution, four properties are developed. This algorithm has been implemented in C++ programming language and a set of test problems are generated to evaluate its efficiency and analyze the sensitivity of some parameters. Based upon presented results, the solution time is increased if each of the three following parameters is increased: Number of patients, number of surgeons or average number of possible rooms for each patient. In addition, it seems that if 20% is added to the total surgery time of each surgeon, this new time interval is proper to be considered as the working time interval, and longer intervals will not noticeably improve the quality of the optimal solution. It is shown in this paper that 0.25 is the best suitable coefficient for the idle gaps of surgeons in the objective function.

Key Words: Operating room scheduling, branch-and-bound algorithm