

## مکان‌یابی محور پوششی کامل چندلایه با تخصیص یگانه

حسین کریمی (کارشناس ارشد)

مهدی بشیری\* (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

مهندسی صنایع و مدیریت شریف (زمستان ۱۳۹۲)  
دروزی ۱ - ۲۹، شماره ۲، ص. ۱۱۷-۱۲۵

مسئله‌ی مکان‌یابی محور عبارت است از انتقال کالا از مبدأها به مقصدها، که در آن به جای ارتباط مستقیم میان هر دو نقطه‌ی مبدأ و مقصد، کالاها از طریق محورهای منتقل می‌شوند. در مکان‌یابی محور پوششی مورد بحث در این پژوهش، محدودیت ظرفیت برای مکان‌های محور در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، مفهوم لایه برای مسیرها تعریف و مدلی چندلایه‌ی برای مسئله‌ی مورد نظر فراهم شده است. استفاده از لایه‌های مختلف به دلیل سودآوری‌شان اقتصادی است و در شبکه‌ی محورهای تجاری و توزیع کالاهای پستی، این مدل را می‌توان پیاده‌سازی کرد. همچنین با استفاده از روشی بر مبنای الگوریتم شبیه‌سازی تبرید، رویه‌ی جست‌وجویی برای مدل ارائه شده است که نتایج آن در مقایسه با نرم‌افزار بهینه‌سازی برنامه‌ریزی خطی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش حل پیشنهادی در مقایسه با ابزار حل در نرم‌افزار بهینه‌سازی به جواب بهینه‌ی منجر می‌شود.

واژگان کلیدی: مکان‌یابی محور، پوشش، طراحی شبکه، چندلایه، شبیه‌سازی تبرید.

## ۱. مقدمه

مسئله‌ی مکان‌یابی محور<sup>۱</sup> از مسائل نوینی است که در دهه‌های اخیر در مسائل مکان‌یابی مطرح شده است. استفاده از محور کاربرد وسیعی در صنایع ارتباطات و مخابراتی،<sup>[۱]</sup> حمل‌ونقل هوایی و زمینی،<sup>[۲،۳]</sup> مسافرت‌های هوایی،<sup>[۴]</sup> خدمات پستی<sup>[۵]</sup> و... دارد.

مراکز محور نقاطی هستند که در آن‌ها جریان‌های کوچک جمع‌آوری و به یک جریان بزرگ تبدیل می‌شود. این جریان بزرگ به یک مرکز محور دیگر انتقال می‌یابد و این مرکز محور هم این جریان‌ها را از هم جدا کرده و بین نقاط مقصد توزیع می‌کند. بنابراین می‌توان برای این مراکز پنج نقش اساسی قائل شد: ۱. جمع‌آوری جریان‌های کوچک؛ ۲. تبدیل جریان‌های کوچک به یک جریان بزرگ؛ ۳. انتقال جریان؛ ۴. تبدیل جریان بزرگ به جریان‌های کوچک؛ ۵. توزیع جریان‌های کوچک. گفتنی است در این نوع مسائل، لزوماً یک جریان مبدأ - مقصد خاص از تمامی خدمات مراکز محور بهره نخواهد گرفت.

در مسئله‌ی مکان‌یابی محور که نوعی از مسائل بهینه‌سازی است، هدف یافتن مکان مناسب برای محورها و مسیرها به منظور فرستادن کالا از یک سری مبدأ به یک سری مقصد است به گونه‌ی که تابع هزینه‌ی جمع‌آوری و توزیع کالا کمینه شود. مکان‌یابی محور به سه گروه مکان‌یابی محور میانه، مرکز و پوششی تقسیم می‌شود.<sup>[۶]</sup> در مکان‌یابی میانه، هدف کاهش هزینه‌های ایجاد مکان‌های محور است. مکان‌یابی محور مرکز به دنبال کاهش بیشترین هزینه انتقال جریان در شبکه

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۴/۱۸، اصلاحیه ۱۳۹۰/۱۲/۱۵، پذیرش ۱۳۹۱/۲/۱۱.

hkarimi@shahed.ac.ir  
bashiri@shahed.ac.ir

است. در مکان‌یابی محور پوششی (موضوع مورد مطالعه در این مقاله)، هدف ایجاد مکان‌های محور با کم‌ترین هزینه و در نظر گرفتن محدودیت پوشش برای مسیرهاست.

امروزه شرکت‌ها به دلیل محیط رقابتی در بازار توجه زیادی به سطوح خدماتی خود دارند. به عنوان مثال، در شرکت‌های پستی که خاستگاه مکان‌یابی محور است، سطح خدمات از طریق زمان تحویل پست اندازه‌گیری می‌شود، و آن زمانی است که یک محموله پستی به مقصد تحویل داده می‌شود. شرکت‌های پستی وعده‌های تحویلی متعددی همچون تحویل ۲۴ ساعته یا ۲ روزه به مشتریان خود می‌دهند. این وعده‌ی تحویل محموله‌ی پستی تأثیر مهمی در ایجاد شبکه‌ی خدمت‌رسانی در شبکه‌های پستی دارد.

«تحویل ۲۴ ساعته» یا «تحویل در روز بعد» یکی از اهداف مهم شرکت‌های پستی است. در هر صورت، به دلیل توزیع جغرافیایی شهرها در کشورهایی مانند ایران و ساختار بزرگراه‌ها و جاده‌ها، اگر تنها از لایه مسیر زمینی استفاده شود، تحویل ۲۴ ساعته بین شهرهای مبدأ - مقصد غیر ممکن است. به دلیل رقابتی بودن بازار، بهتر است از لایه‌ی هوایی نیز برای شبکه‌ی محوری پست استفاده شود. با توجه به افزایش هزینه‌ها در صورت استفاده از لایه‌ی هوایی، ضمن کاهش زمان انتقال محموله‌ی پستی، در این نوشتار مدلی ارائه می‌شود تا ضمن برقراری تعادل بین این دو موضوع، شبکه‌ی محوری ایجاد شود که دارای کم‌ترین هزینه باشد و محدودیت پوشش زمانی را نیز ارضا کند. این مدل تحت عنوان «مکان‌یابی محور پوششی کامل چندلایه با تخصیص یگانه<sup>۲</sup>» نام‌گذاری شده است. «لایه» مسیری است با ویژگی‌های مخصوص به خود، و هر لایه دارای هزینه‌های سفر و زمان سفر خاصی است.

از دیگر کاربردهای مدل ارائه شده در این پژوهش «ایجاد محورهای تجاری<sup>۳</sup>» است. موفقیت تجارت در دنیای کنونی نیازمند ایجاد زیرساخت‌هایی تجاری است که تسهیل‌گر حمل‌ونقل باشند. توسعه تجارت در کشورهای مختلف، ارتباط مستقیم با ایجاد چنین محورهایی دارد. در واقع می‌توان گفت که لازمه پیشرفت تجاری و اقتصادی یک کشور، استفاده از محورهای تجاری است. از منظر راهبردی، در محورهای تجاری از سیستم‌های حمل‌ونقل چندحالتی<sup>۴</sup> استفاده می‌شود. وظیفه‌ی محورهای تجاری، تجمع کالاها و وارداتی و صادرات مجدد آن‌ها با استفاده از شیوه‌های مختلف حمل‌ونقل است. استفاده از این محورها موجب کاهش هزینه‌ی جریان کالا در کنار افزایش زمان انتقال می‌شود. شهرهای هنگ‌کنگ، نیویورک و دبی نمونه‌های این محورها در دنیای واقعی‌اند. در محورهای مذکور از طریق ایجاد زیرساخت‌های حمل‌ونقلی چندحالتی توسعه‌ی تجارت شکل گسترده‌ی یافته است. از آنجا که این محورها می‌توانند انواع سیستم‌های حمل‌ونقلی را تحت پوشش خود قرار دهند، مدل چندلایه‌ی این پژوهش می‌تواند برای محورهای تجاری به‌عنوان مکملی برای مسئله‌ی شناخته‌شده‌ی محور استفاده شود، ضمن این که پوشش زمانی برای انتقال جریان کالاها و ظرفیت محورها در نظر گرفته می‌شود.

پوشش مورد نظر در این مطالعه «پوشش کامل» است؛ در این پوشش تعداد محورها نامشخص است و توسط مدل تعیین می‌شود. پوشش زمانی مطابق تعریف عبارت است از:

وقتی یک مبدأ - مقصد  $(i, j)$  توسط محورهای  $k$  و  $m$  پوشش داده می‌شود که بیشترین زمان برقراری جریان در مسیر این ارتباط (مسیر  $i$  به  $k$ ، مسیر  $k$  به  $m$  و مسیر  $m$  به  $j$ ) از یک مقدار مشخص (حد زمانی) کوچک‌تر یا مساوی آن باشد.

ساختار نوشتار حاضر به این ترتیب است که پس از طرح ادبیات موضوع (در قسمت دوم)، مدل پیشنهادی مطرح می‌شود (قسمت سوم). روش حل فراابتکاری مبتنی بر شبیه‌سازی تیرید در قسمت چهارم ارائه شده است. سپس حل مسئله برای داده‌های پست استرالیا<sup>۵</sup> آمده و در نهایت، نتیجه‌گیری و مطالعات پیشنهادی آینده در قسمت پایانی بیان شده است.

## ۲. مرور ادبیات

یکی از اهداف مورد نظر برای مراکز محور، برقراری پوشش در شبکه‌ی جریان توسط تعدادی مرکز محور است که از آن با عنوان «مکان‌یابی محور پوششی کامل» یاد شده است. از اهداف دیگری که برای این مسئله‌ی مکان‌یابی می‌توان بیان کرد، ایجاد پوشش بیشینه<sup>۶</sup> در شبکه‌ی جریان به‌وسیله‌ی تعداد معینی از مکان‌های محور است؛ این مسئله به‌عنوان «مکان‌یابی محور پوششی بیشینه» شناخته می‌شود. منظور از پوشش در این مسئله این است که زمان، فاصله یا هزینه انتقال جریان از یک مبدأ به یک مقصد کم‌تر از یک حد بیشینه شود. اکنون پس از شناخت مفهوم مسئله‌ی محور پوششی، ادبیات مسئله به‌صورت خلاصه بیان می‌شود.

مسائل محور پوششی در مسائل مکان‌یابی محور برای اولین بار در سال ۱۹۹۴ ارائه شد<sup>۵</sup> و طی آن تخصیص یگانه و چندگانه برای محور پوششی کامل و جزئی در نظر گرفته می‌شود. اولین تلاش‌ها برای مدل‌سازی بهتر مسئله‌ی محور پوششی با تخصیص به یک محور در سال ۲۰۰۳ صورت گرفت.<sup>۶</sup> در سال ۲۰۰۴ مدل‌سازی

جدیدی برای این مسئله ایجاد شد که در آن برای تخصیص مراکز غیر محور به یک محور و نیز به چند محور مدل ارائه شده است.<sup>۷</sup> در سال ۲۰۰۵ ایده‌ی جدیدی در این مسائل مطرح شد، طی آن ضمن بیان مفهوم شعاع پوششی مدل جدیدی ایجاد شد.<sup>۸</sup> در مطالعات سال ۲۰۰۶ بین مدل‌های گذشته مقایسه‌ی انجام شد.<sup>۹</sup> سپس مدل مکان‌یابی محور پوشش جزئی ارائه شد که در آن تخصیص چندمحوری در نظر گرفته شده است.<sup>۱۰</sup> در سال ۲۰۰۷ مدلی با تخصیص تک‌محوری و پوشش کامل برای مکان‌یابی مراکز تحویل بار ارائه شد.<sup>۱۱</sup> سپس (در سال ۲۰۰۸) مدلی برای مکان‌یابی محور پوششی کامل با قابلیت تخصیص به چند محور ارائه، و روش حلی برای آن پیشنهاد شد.<sup>۱۲</sup> در سال ۲۰۰۹ مدلی برای حالت تخصیص به چند محور و پوشش جزئی پیشنهاد، و یک روش حل ابتکاری نیز برای حل آن ارائه شد.<sup>۱۳</sup> مدل‌هایی که تا پیش از سال ۲۰۰۹ بررسی شده بودند، دارای شبکه کامل بودند. در سال ۲۰۰۹ مدلی برای شبکه‌های محور پوششی ناکامل در حالت تخصیص به یک محور ارائه و یک روش ابتکاری برای حل این مدل بیان شد.<sup>۱۴</sup> در سال ۲۰۱۰ نیز مدل مکان‌یابی محور پوششی با استراتژی تخصیص یگانه با در نظر گرفتن ظرفیت برای مراکز محور ارائه، و یک حل ابتکاری براساس الگوریتم استعماری برای آن فراهم شد.<sup>۱۵</sup> از این مدل برای داده‌هایی استفاده شد که تصادفی تولید شده بود. سپس مدل سلسله‌مراتبی مکان‌یابی محور با در نظر گرفتن پوشش جزئی با شعاع پوشش از پیش تعیین شده ارائه شد،<sup>۱۵</sup> که تخصیص یگانه را در نظر می‌گیرد. در جدول ۱ به‌طور خلاصه ادبیات موضوع بررسی شده است.

با توجه به عدم بررسی مدلی که محدودیت پوشش را هم‌زمان با برخورداری از چند لایه، برای مسئله مکان‌یابی محور در نظر بگیرد، در تحقیق حاضر مدلی برای رفع این خلأ ارائه شده است.

## ۳. مدل‌سازی مسئله

یکی از تفاوت‌های مدل ارائه شده با مدل‌های پیشین برای مکان‌یابی محور پوششی این است که تابع هدف در این مدل، هزینه‌ی جریان کالا در مسیرها را علاوه بر هزینه‌ی ایجاد محورها در نظر می‌گیرد. در این مدل استراتژی تخصیص یگانه در نظر گرفته شده و ارتباط بین محورها به‌صورت شبکه‌ی کامل است. اکنون برای بررسی و بیان مدل ابتدا متغیرها و نمادهای مدل مطرح خواهد شد. متغیرها:

۱.  $X_{ik}^l$ : برابر ۱ است اگر انتقال جریان از مبدأ  $i$  به محور  $k$  از طریق سطح  $l$  برقرار باشد؛ در غیر این صورت برابر صفر خواهد شد و  $X_{ik}^l = 1$  برای هر  $l$ ، به این معنی است که مرکز  $k$  یک محور است.

۲.  $Z_{km}^l$ : برابر ۱ است اگر محور  $k$  به محور  $m$  از طریق سطح  $l$  ارتباط داشته باشد؛ در غیر این صورت برابر صفر خواهد بود.

۳.  $Y_{km}^{il}$ : برابر حجم مبادلاتی است که از مرکز  $i$  سرچشمه گرفته و بین محورهای  $k$  و  $m$  از طریق سطح  $l$  در جریان است.

۴.  $R_k$ : شعاع مرکز محور است که برابر بیشترین فاصله‌ی زمانی آن مرکز محور با مراکز تخصیص یافته به آن است.

نمادها:

۱.  $W_{ij}$ : حجم جریان بین مراکز  $i$  و  $j$  است.

جدول ۱. مقایسه ادبیات مکان‌یابی محور پوششی.

نام مؤلف	سال انتشار	نوع پوشش		نوع تخصیص		جنس پوشش		چند لایه
		کامل	جزیی	یگانه	چندگانه	فاصله‌یی	زمانی	
کمیل	۱۹۹۴	•	•	•	•	-	-	•
کارا و تنسل	۲۰۰۳	•	-	•	-	-	•	-
واگنر	۲۰۰۴	•	-	•	•	•	-	-
ارنست و همکاران	۲۰۰۵	•	-	•	•	•	-	-
ونگ و همکاران	۲۰۰۶	-	•	-	•	•	-	•
تان و کارا	۲۰۰۷	•	-	•	-	•	•	-
ونگ و وانگ	۲۰۰۸	•	-	-	•	•	-	•
کیو و ونگ	۲۰۰۹	•	•	-	•	•	-	•
کالیک و همکاران	۲۰۰۹	•	-	•	-	•	•	-
قدسی و همکاران	۲۰۱۰	•	-	•	-	•	•	-
صحرائیان و کرانی	۲۰۱۱	-	•	-	•	•	•	-
پژوهش حاضر	-	•	-	-	•	-	•	•

۲.  $O_i$ : برابر حجم جریان‌ی است که از مرکز  $i$  سرچشمه می‌گیرند و برابر است با  $O_i = \sum_j W_{ij}$  (۳)

۳.  $D_i$ : برابر حجم جریان‌ی است که به مرکز  $i$  وارد می‌شود و مقصد آن‌ها این مرکز است. این مقدار برابر است با  $D_i = \sum_j w_{ji}$  (۴)

۴.  $C_{ik}^l$ : هزینه‌ی برقراری ارتباط بین مراکز  $i$  و  $k$  توسط سطح  $l$  است.  $F_k$ : هزینه‌ی ایجاد یک محور در مرکز  $k$  است. (۵)

۵.  $T_{ik}^l$ : فاصله‌ی زمانی بین مراکز  $i$  و  $k$  در سطح  $l$  است.  $\alpha$ : ضریب تخفیف برقراری ارتباط بین محورها. (۶)

۶.  $\beta$ : بیشینه فاصله‌ی زمانی برای برقراری ارتباط بین مبدأ - مقصد  $i$  و  $j$ .  $\chi$ : برابر هزینه‌ی جمع‌آوری جریان است. (۷)

۷.  $\delta$ : برابر هزینه‌ی توزیع جریان است. (۸)

۸.  $\beta$ : بیشینه فاصله‌ی زمانی برای برقراری ارتباط بین مبدأ - مقصد  $i$  و  $j$ .  $\chi$ : برابر هزینه‌ی جمع‌آوری جریان است. (۹)

۹.  $\chi$ : برابر هزینه‌ی جمع‌آوری جریان است. (۱۰)

۱۰.  $\delta$ : برابر هزینه‌ی توزیع جریان است. (۱۱)

۱۱.  $X_{ik}^l \in \{0, 1\} \quad \forall i, k, l$  (۱۲)

۱۲.  $Y_{km}^{il} \geq 0 \quad \forall i, k, m, l$  (۱۳)

۱۳.  $Z_{km}^l \in \{0, 1\} \quad \forall k, m, l$  (۱۴)

۱۴.  $R_k \geq 0 \quad \forall k$  (۱۵)

۱۵.  $R_k \geq 0 \quad \forall k$  (۱۶)

۱۶.  $R_k \geq 0 \quad \forall k$  (۱۷)

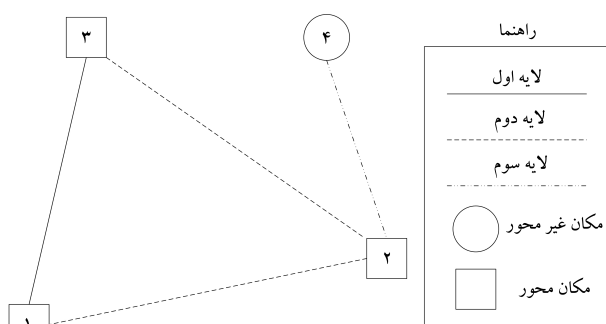
۱۷.  $R_k \geq 0 \quad \forall k$  (۱۸)

۱۸.  $R_k \geq 0 \quad \forall k$  (۱۹)

۱۹.  $R_k \geq 0 \quad \forall k$  (۲۰)

۲۰.  $R_k \geq 0 \quad \forall k$  (۲۱)

۲۱.  $R_k \geq 0 \quad \forall k$  (۲۲)



شکل ۱. شبکه‌ی محور جواب مثال عددی.

#### ۴. شبیه‌سازی تبرید

در مطالعات انجام شده در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۵ نشان داده شد که مدل محور پوششی یک مدل NP-Hard است. [۱۶، ۱۷] لذا مدل این پژوهش که مدلی گسترده‌تر از محور پوششی است نیز یک مدل NP-Hard است. برای رسیدن به جوابی مناسب در زمانی کوتاه‌تر برای داده‌های بزرگ‌تر در این کلاس از مدل‌ها، استفاده از روش‌های ابتکاری و فرابابتکاری در ادبیات موضوع مرسوم است. در این مطالعه برای به دست آوردن پاسخ برای مدل ارائه شده از روش مبتنی بر شبیه‌سازی تبرید استفاده شده است.

عملیات حرارتی عبارت است از افزایش دمای آهن تا دمای ذوب و سپس کاهش تدریجی دما تا رسیدن آهن به خواص مورد نظر. پس از رسیدن به خواص مطلوب، آهن را به یکباره سرد می‌کنند تا مولکول‌ها در جای خود ثابت باقی بمانند. در شروع فرایند سردکردن تدریجی، طبیعتاً مولکول‌ها با سرعت زیادی جابه‌جا می‌شوند؛ هرچه آهن سردتر شود سرعت مولکول‌ها و میزان جابه‌جایی آن‌ها کم‌تر می‌شود. در این الگوریتم فرابابتکاری نیز در ابتدای کار (در دمای زیاد) تغییرات راحت‌تر پذیرفته می‌شود؛ هرچه جلوتر می‌رویم احتمال پذیرش تغییرات کم‌تر و کم‌تر می‌شود. علت آن است که احتمال پذیرش از رابطه‌ی  $\exp(-\Delta Z/T)$  پیروی می‌کند و در این رابطه، با توجه به کم شدن دمای مسئله احتمال پذیرش نیز کاهش می‌یابد.

گفتنی است که برخلاف روش‌های دقیق و ابتکاری، در روش‌های فرابابتکاری در کنار منطق کلان، به دنبال خرق عادت هستیم. به این شکل که اگر تغییری در جواب باعث بدتر شدن تابع هدف شود، در روش‌های دقیق (مثل سیمپلکس و شاخه و کران) و حتی روش‌های ابتکاری، این تغییر پذیرفته نمی‌شود اما در این الگوریتم با احتمالی آن تغییر قبول می‌شود و همین امر موجب فرار از تله‌های جواب محلی می‌شود. برای مطالعه‌ی بیشتر در زمینه‌ی رویکردهای دیگر در این الگوریتم منابع متعددی در دسترس است. [۱۸، ۱۷] در ادامه روش حل ارائه خواهد شد.

در الگوریتم‌های فرابابتکاری، تعریف همسایگی مناسب برای یک جواب از مهم‌ترین نکات برای رسیدن به یک جواب خوب است. در این روش حل، از مفهومی به نام خوشه<sup>۷</sup> استفاده شده است. «خوشه» مجموعه مراکز است که به یک محور تخصیص یافته‌اند و شامل خود مرکز محور نیز می‌شود. در تعریف همسایگی‌ها از خوشه استفاده شده است. از نکات برجسته‌ی الگوریتم ارائه شده این است که در فضای شدنی حرکت می‌کند، به همین دلیل ساختن یک جواب شدنی موضوع مهمی است. یک جواب شدنی تضمین می‌کند که زمان انتقال جریان بین جفت

محدودیت‌های ۲ تضمین می‌کنند که تخصیص یگانه صورت گیرد. محدودیت‌های ۳ بیان می‌کنند که هر نقطه‌ی غیرمحور در صورتی می‌تواند به مرکزی متصل شود که آن مرکز محور باشد. محدودیت‌های ۴ اطمینان می‌دهند که  $Z_{kmm}^l$  برابر ۱ است، اگر نقاط  $m$  و  $k$  هم‌زمان محور باشند و توسط لایه‌ی  $l$  با هم اتصال یابند. محدودیت‌های ۵ اشاره می‌کنند که شعاع یک محور بزرگ‌تر یا مساوی زمان انتقال جریان مراکز است که به آن محور اختصاص دارند و شعاع مراکز غیر محور برابر صفر خواهد شد. محدودیت‌های ۶ تضمین می‌کنند که زمان انتقال جریان بین هر جفت مبدأ-مقصد از حد زمانی تعیین شده ( $\beta$ ) بیشتر نشود. محدودیت‌های ۷ متضمن تعادل جریان در شبکه‌اند و میزان جریان مسیرها را به دست می‌آورند. محدودیت‌های ۸ بیان می‌دارند که اگر مرکز  $i$  به محور  $k$  اختصاص یافت، آنگاه میزان جرابانی که از مرکز  $i$  سرچشمه می‌گیرد، مخالف صفر می‌شود. محدودیت‌های ۹ تضمین می‌کنند که وقتی  $k$  و  $m$  هم‌زمان محور هستند، آنگاه  $Y_{kmm}^{il}$  مخالف صفر شود. در این محدودیت  $M$  یک عدد بسیار بزرگ است. محدودیت‌های ۱۰ تا ۱۳ نوع و دامنه‌ی متغیرها را مشخص می‌سازند. برای درک بهتر مدل پیشنهادی در ادامه یک مثال عددی آورده شده است.

مثال: مسئله زیر را که دارای ۴ نقطه است فرض کنید: ( $p$  مختصات نقاط موجود است).

$$p = \begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 39 & 19 \\ 23 & 31 \\ 37 & 32 \end{bmatrix} \quad W_{ij} = \begin{bmatrix} 75 & 36 & 54 & 19 \\ 25 & 38 & 24 & 26 \\ 66 & 39 & 51 & 22 \\ 17 & 33 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$F_k = \begin{bmatrix} 10000 \\ 15000 \\ 10000 \\ 15000 \end{bmatrix} \quad T_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 19/24 & 15/30 & 23/35 \\ 19/24 & 0 & 20 & 13/15 \\ 15/30 & 20 & 0 & 14/04 \\ 23/35 & 13/15 & 14/04 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi = 3, \quad \alpha = 0/75, \quad \delta = 2, \quad \beta = 15$$

$$C_{ij}^1 = T_{ij}^1, \quad C_{ij}^2 = 1/4 \times C_{ij}^1, \quad C_{ij}^3 = 1/7 \times C_{ij}^2$$

$$T_{ij}^4 = 0/6 \times T_{ij}^1, \quad T_{ij}^5 = 0/3 \times T_{ij}^1$$

پس از حل مدل با نرم‌افزار GAMS، تابع هدف بهینه برابر  $50739/74$  می‌شود. مقادیر غیرصفر برای متغیرهای  $X$  به صورت  $X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{44}$  به دست می‌آید. این مقادیر برای متغیرهای  $Z$  به صورت  $Z_{13}, Z_{21}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{33}, Z_{44}$  است. مقادیر متغیرهای غیرصفر متغیر  $Y$  برای این مثال به صورت  $Y_{13}^1 = 54, Y_{13}^2 = 24, Y_{21}^2 = 24, Y_{21}^3 = 17, Y_{33}^3 = 61, Y_{33}^4 = 66, Y_{44}^4 = 55, Y_{44}^5 = 25, Y_{44}^6 = 18$  و  $Y_{44}^7 = 18$  است. در شکل ۱ شبکه‌ی محور چندلایه‌ی این جریان نشان داده شده است.

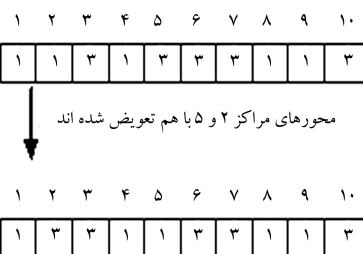
به‌طور کلی مدل مطرح شده در این مقاله دارای  $2n^2l + n$  متغیر دودویی و  $n^2l + n$  متغیر نامنفی است. همچنین تعداد محدودیت‌های این مدل  $n^2l + 6n^2$  است که در آن  $n$  تعداد مراکز و  $l$  تعداد لایه‌هاست. این مدل چهار مشخصه‌ی اصلی دارد: ۱. در نظر گرفتن پوشش زمانی انتقال جریان بین جفت مبدأ-مقصد؛ ۲. تخصیص یگانه‌ی نقاط غیر محور به محور؛ ۳. استفاده از پوشش کامل؛ ۴. چندلایه بودن شبکه‌ی محور. در قسمت بعدی یک روش حل فرابابتکاری پیشنهاد می‌شود.

(۱) کمترین تعداد محور را برابر ۱ قرار دهید  
 (۲) تا هنگامی که مجموعه وزنها تقسیم بر مجموع capsort از یک تا کمترین تعداد محور بزرگتر از ۱ بود، محاسبه زیر را انجام دهید  
 به کمترین تعداد محور یک واحد اضافه کنید  
 پایان

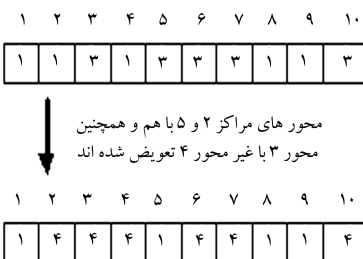
شکل ۲. رویه یافتن تعداد کمیته مراکز محور.



شکل ۳. همسایگی نوع اول.



شکل ۴. همسایگی نوع دوم.



شکل ۵. همسایگی نوع سوم.

جواب هاست.  $Z$  مقدار تابع هدف و  $Z^*$  بهترین این مقدار هاست.  $T$  دمای الگوریتم در هر تکرار است که به روز می‌شوند.  $T$  دمای انجام الگوریتم و  $RR$  نرخ سرد شدن است.

الگوریتم شبیه‌سازی پیشنهادی دارای دو حلقه داخلی  $inloop_1$  و  $inloop_2$  است.  $inloop_1$  و  $inloop_2$  به ترتیب نمایش‌گر حد بالای این حلقه‌هاست. این حلقه‌ها باعث می‌شوند تصادفی‌سازی در تعداد دفعات تکرار الگوریتم گماشته شود. مقادیر این پارامترها بعد از انجام آزمایشات متعدد و تحلیل کیفیت جواب و زمان حل مناسب انتخاب شده است. گفتنی است مقادیر دمای الگوریتم و دمای انجام بستگی کامل به داده‌های مسئله دارد، زیرا باید طوری تنظیم شوند که احتمال پذیرش جواب بدتر در اوایل الگوریتم بیشتر از انتهای الگوریتم باشد تا فرایند سرد شدن شبیه‌سازی شود. مقادیر این پارامترها براساس

مبدأ مقصدها از یک حد زمانی تعیین شده کم‌تر است و شرایط ظرفیت محورها نیز در نظر گرفته می‌شود. برای هر لایه یک ماتریس پوشش  $n \times n$  (CM) تعریف کرده‌ایم. اگر  $T_{ij}^l \leq \beta/2$  باشد، آنگاه  $CM_{ij}^l$  برابر ۱ خواهد بود و در غیر این صورت برابر صفر خواهد شد. از این ماتریس در تخصیص مراکز غیر محور به محور، و تعیین لایه‌ی تخصیص استفاده می‌شود. جزئیات مورد استفاده در روش حل پیشنهادی عبارت است از:

**تعیین تعداد مراکز محور.** به دلیل نامشخص بودن تعداد مراکز محور در مدل و تصمیم‌گیری آن توسط مدل، در روش حل پیشنهادی می‌خواهیم ابتدا این مقدار را مشخص کنیم تا در مراحل جست‌وجو، الگوریتم دغدغه‌ی درمورد تعداد مراکز محور نداشته باشد. لذا ابتدا یک مقدار کمیته و بیشینه برای تعداد مراکز محور در مدل ارائه شده است. تعداد کمیته براساس ظرفیت نقاط و جریان بین آن‌ها تعیین می‌شود. ابتدا ظرفیت‌ها به صورت نزولی مرتب و capsort نامیده می‌شوند. در شکل ۲ طریقه‌ی تعیین تعداد کمیته مراکز محور نشان داده شده است. تعداد بیشینه مراکز محور برابر  $\lfloor N/2 \rfloor$  است که در آن  $N$  تعداد نقاط موجود است. برای تعیین تعداد دقیق مراکز محور، صد جواب شدنی تصادفی برای هر یک از تعداد کمیته و بیشینه مراکز محور و مقادیر بین آن‌ها تولید، و مقدار تابع هدف هر جواب را محاسبه کردیم. تعداد مراکز محوری که کم‌ترین میانگین مقدار تابع هدف را دارند به‌عنوان تعداد مراکز محور در ابتدای الگوریتم انتخاب می‌شود. اکنون که اولین مرحله از الگوریتم اجرا و تعداد مراکز محور مشخص شده، براساس این تعداد یک جواب ممکن اولیه برای روش شبیه‌سازی تریید پیشنهادی ایجاد می‌شود.

استراتژی‌های همسایگی. در هر مرحله از الگوریتم، یک حرکت جواب براساس سه استراتژی زیر انتخاب می‌شود.

۱. یک یا دو مرکز محور به‌طور تصادفی انتخاب و با یک مرکز غیر محور در خوشه‌ی خودش یا خوشه‌ی دیگر تعویض شود. گفتنی است احتمال انتخاب یک یا دو مرکز برابر هم هستند. به‌طور کلی احتمال انتخاب این استراتژی  $0.3$  است. نمونه‌ی از این همسایگی در شکل ۳ آمده است. جایگشت بالا در شکل ۳ به این معناست که مکان ۱ و ۳ مراکز محورند و مکان‌های ۲، ۴، ۸ و ۹ به محور ۱ و مکان‌های ۵، ۶، ۷ و ۱۰ به محور ۳ تخصیص یافته‌اند.

۲. دو مرکز غیر محور تصادفی از خوشه‌های مختلف با هم تعویض شوند. احتمال انتخاب این استراتژی  $0.5$  است. شکل ۴ این نوع استراتژی را به نمایش گذاشته است.

۳. استراتژی اول و دوم با هم انجام شوند که احتمال این استراتژی  $0.2$  تعیین شده است. در شکل ۵ نمونه‌ی از این همسایگی نشان داده شده است.

انتخاب و تعیین این احتمال‌ها بدان سبب است که جابه‌جایی مکرر مراکز محور مناسب نیست، بهتر است که مراکز غیر محور بیشتر با هم تعویض شوند؛ زیرا گستردگی فضای جواب مدل بیشتر در تفاوت مراکز غیر محور با هم است. نکته‌ی که باید توجه شود این است که استراتژی‌های بیان شده باعث می‌شوند تعداد مراکز تخصیص یافته به یک محور نیز تغییر کند.

اکنون پس از تعریف انواع همسایگی، مراحل الگوریتم پس از تعریف برخی از نمادهای مورد استفاده، بیان می‌شود.  $K$  یک جواب شدنی و  $K^*$  بهترین این

بودن ماتریس‌های ورودی مسئله همانند ماتریس زمان سفر، ممکن است ماتریس شکل ۶ نامتقارن شود. به‌عنوان مثال، برای سفر از محور  $k$  به محور  $m$  از لایه‌ی دوم و برای سفر از محور  $m$  به  $k$  از لایه‌ی سوم استفاده می‌شود. در قسمت بعدی عملکرد مدل روی داده‌های معروف مکان‌یابی محور (AP data set) ارزیابی می‌شود.

## ۵. تحلیل عددی

برای بررسی مدل، اندازه‌های متفاوتی از داده‌های معروف پست استرالیا حل شده‌اند. داده‌های پست استرالیا در سال ۱۹۹۶ ارائه شد.<sup>[۲]</sup> این داده‌ها، یک مثال واقعی برای سیستم پستی در استرالیا هستند. داده‌ها شامل ۲۰۰ نقطه است که ناحیه‌های پستی را به نمایش می‌گذارد و شامل حجم مبادله‌ی پستی برای این نقاط است. برای این داده‌ها  $\chi = 3$ ،  $\alpha = 0.75$  و  $\delta = 2$  است. از مشخصه‌های مهم این داده‌ها، نامتقارن بودن ماتریس حجم جریان پست‌هاست، بدین معنی که  $W_{ij} \neq W_{ji}$  و  $W_{ii} \neq 0$ . این داده‌ها در آدرس اینترنتی:

<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/phubinfo.html>

در دسترس است. در این تحقیق نتایج مدل برای داده‌های ۱۰، ۲۰، ۲۵، ۴۰ و ۵۰ تایی آورده شده است. این داده‌ها با استفاده از رویه‌ی بیان شده در سال ۱۹۹۶، از داده ۲۰۰ تایی نتیجه می‌شود.<sup>[۲]</sup> برای این داده‌ها در آدرس اینترنتی بیان شده، هزینه‌ی تاسیس محورها برای دو حالت گفته شده است.

برای تأسیس مکان‌های محور دو نوع هزینه‌ی سخت (T) و آزاد (L) در نظر گرفته شده است. برای هر حالت از این مسائل دو نوع حد پوشش لحاظ شده که حد دومی آزادتر از حد پوشش اول است. از آنجا که در این نمونه داده‌ها چندلایه بودن مد نظر نبوده، فرضیاتی که در ادامه می‌آید به‌منظور تولید داده برای این موضوع استفاده شده است.  $C_{ij}^1 = 1.7 \times C_{ij}^2$ ،  $C_{ij}^1 = T_{ij}^1$  و  $T_{ij}^2 = 0.3 \times T_{ij}^1$  در ضمن تنها دو لایه برای این داده‌ها در نظر گرفته شده است.

تمامی اجراها توسط رایانه با پردازنده ۲٫۵۳ GHz و حافظه‌ی ۲٫۹۹ GB انجام شده است. از نرم‌افزار ۲۲٫۲ GAMS و ابزار حل ۱۰/۱۰۰ CPLEX استفاده شده و نتایج انجام آزمایش‌ها در جدول ۲ آورده شده است. در این جدول فاصله‌ی نسبی<sup>۱۱</sup> جواب چنین محاسبه شده است:

$$100 \times (\text{جواب به دست آمده} / (\text{حد پایین} - \text{جواب به دست آمده})) = \text{فاصله نسبی}$$

نتایج این جدول نشان می‌دهد که هرچه حد پوشش آزادتر می‌شود، حد پایین مسئله کم‌تر خواهد شد و نیز در بیشتر مواقع زمان حل نیز کاهش پیدا می‌کند. همچنین با آزادتر شدن حد پوشش تعداد مکان‌های محور کم‌تر یا مساوی حالت سخت خواهد بود. همان‌طور که مشخص است، با افزایش تعداد مراکز، زمان حل نیز افزایش پیدا می‌کند.

مقدار فاصله‌ی بهترین روش پیشنهادی این پژوهش و ابزار بهینه‌سازی CPLEX به‌صورت برجسته<sup>۱۲</sup> نمایش داده شده است. نتایج حاکی از آن است که این میزان فاصله در روش پیشنهادی مبتنی بر شبیه‌سازی تیرید، بهتر از روش CPLEX است. میانگین زمان حل در روش پیشنهادی برابر ۱۴۵/۱۵۷ و در ابزار حل CPLEX برابر ۱۷۶/۵۰۵۷ ثانیه است، لذا می‌توان گفت که روش حل پیشنهادی به‌طور میانگین دارای زمان حل کم‌تری نسبت به ابزار بهینه‌سازی است.

داده‌های مسئله‌ی نمونه در این پژوهش به‌صورت روش سعی و خطا تعیین شده است. گام‌های الگوریتم در ادامه توضیح داده می‌شود. یادآور می‌شود قبل از اجرای این گام‌ها، تعداد مکان‌های محور توسط رویه‌ی بیان‌شده تعیین شده است.

گام ۱:  $S$  را به‌عنوان یک جواب اولیه قرار دهید و مقدار  $Z$  مربوط به این جواب را به دست آورید.  $S^* = S$ ،  $Z^* = Z$ ،  $T = 10^8$ ،  $T = 100$ ،  $RR = 0.99$ ،  $inloop2\_max = 8$ ،  $inloop1\_max = 3$

گام ۲:  $inloop2 = 0$  و  $inloop1 = 0$

گام ۳: استراتژی‌های تعریف‌شده را با توجه به احتمال وقوع آن‌ها اجرا کنید و براساس ماتریس پوشش لایه‌ها را تخصیص دهید و شدنی بودن جواب را چک کنید، اگر جواب شدنی نبود، دوباره به ابتدای این گام بروید. مقدار  $Z$  این جواب را محاسبه کنید.

گام ۴: اگر  $Z^* \geq Z$ ، آنگاه این جواب را پذیرفته و تثبیت کرده ( $S^* = S$ )،  $inloop2 = inloop2 + 1$  و  $inloop1 = inloop1 + 1$ ،  $Z^* = Z$  اگر  $inloop1 = inloop1\_max$  یا  $inloop2 = inloop2\_max$  به گام ۶ بروید؛ در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

گام ۵: مقدار  $P = \exp((Z^* - Z)/T)$  را محاسبه کنید. اگر  $P$  بزرگ‌تر از یک عدد تصادفی بین ۰ و ۱ بود، آنگاه این جواب را پذیرفته و تثبیت کرده ( $S^* = S$ )،  $inloop2 = inloop2 + 1$  و  $inloop1 = inloop1 + 1$ ،  $Z^* = Z$  اگر  $inloop1 = inloop1\_max$  یا  $inloop2 = inloop2\_max$  به گام ۶ بروید؛ در غیر این صورت به گام ۳ بروید. اگر  $P$  کوچک‌تر از این عدد تصادفی بود، آنگاه  $inloop2 = inloop2 + 1$ ، حال اگر  $inloop2 = inloop2\_max$ ، آنگاه به گام ۶ بروید؛ در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

گام ۶:  $T = RR \times T$ . اگر  $T < T_0$ ، آنگاه به گام ۷ بروید، در غیر این صورت به گام ۲ بروید.

گام ۷: مقادیر  $S^*$  و  $Z^*$  به‌عنوان جواب نهایی نشان داده شوند.

در شکل ۶ الف، نحوه‌ی کددهی ارتباط مکان‌های محور و غیر محور نمایش داده شده که به‌صورت برداری است؛ در شکل ۶ ب نیز ماتریس نشان داده شده همان نحوه‌ی کددهی لایه‌های ارتباطی بین آن‌هاست. گفتنی است در صورت نامتقارن

شماره مکان	۱	۲	۳	۴
تخصیص	۱	۲	۳	۳
نوع لایه	۱	۱	۱	۳

(الف)

محور \ محور	۱	۲	۳
۱	-	۱	۲
۲	۱	-	۲
۳	۲	۲	-

(ب)

شکل ۶. نحوه‌ی کددهی شبکه جواب نمونه.

جدول ۲. نتایج حل با CPLEX و الگوریتم شبیه سازی تبرید و مقایسه آن‌ها.

SA						CPLEX			مسئله		
Max CPU time (s)	Avg CPU time (s)	Min CPU time (s)	Max gap	Avg gap	Min gap	CPU time (s)	Gap	Lower bound	$\beta$	N	Name
۲۰,۱۳	۱۹,۳۸	۱۸,۸۵	۱۲,۸۴	۹,۶۱	۷,۹۸	۱,۶	۶,۸۹	۲۵۸۵۱۶,۹۷۸	۱۷,۹۰۵۴۸	۱۰	۱۰-LL
۲۰,۶۹	۱۹,۶۳	۱۷,۸۱	۱۲,۰۱	۹,۳۴	۸,۸۲	۱,۵	۹,۳۶	۲۵۱۷۶۲,۱۲۵	۱۹,۶۹۶۰۳		
۲۰,۰۴	۱۹,۹۳	۱۷,۶۹	۷,۲۱	۳,۲۷	۱,۳۲	۱,۹	۹,۰۱	۲۸۱۳۲۸,۰۲۶	۱۷,۹۰۵۴۸	۱۰	۱۰-LT
۲۰,۰۳	۱۹,۶۳	۱۷,۴۸	۷,۳۴	۲,۸۴	۰,۲۹	۱,۶	۹,۷۸	۲۷۷۹۵۷,۷۴۴	۱۹,۶۹۶۰۳		
۲۰,۷۴	۱۹,۲۴	۱۷,۰۵	۱۰,۲۵	۶,۳۷	۱,۶۶	۱,۶	۵,۹۰	۳۰۳۸۵۰,۱۰۳	۱۷,۹۰۵۴۸	۱۰	۱۰-TL
۲۰,۴۱	۱۹,۳۶	۱۷,۲۳	۱۲,۲۴	۹,۶۴	۶,۵۹	۱,۸	۷,۳۱	۲۹۶۴۸۴,۶۰۵	۱۹,۶۹۶۰۳		
۲۰,۹۱	۱۹,۵۲	۱۷,۸۷	۱۲,۰۲	۸	۶,۴۴	۱,۹	۶,۴۵	۳۰۲۲۶۹,۴۱۴	۱۷,۹۰۵۴۸	۱۰	۱۰-TT
۲۱,۲۱	۱۹,۹۷	۱۸,۰۱	۱۰,۰۲	۸,۶۸	۶,۵۹	۱,۷	۷,۳۱	۲۹۶۴۸۴,۶۰۵	۱۹,۶۹۶۰۳		
۶۵,۲۷	۶۳,۲۱	۶۱,۱۱	۱۰,۸۶	۹,۵۵	۸,۴۶	۳۸,۶	۱۱,۱۰	۲۸۶۳۴۵,۱۸۵	۲۶,۰۰۰۷۸	۲۰	۲۰-LL
۶۵,۰۱	۶۳,۱۳	۶۱,۰۳	۱۰,۳۵	۶,۱۰	۲,۵۹	۴,۲	۹,۷۰	۲۷۸۲۸۱,۵۴۵	۲۸,۶۰۰۸۶		
۶۵,۷۸	۶۳,۵۶	۶۱,۳۳	۱۱,۴۶	۷,۸۴	۳,۸۴	۵,۵	۱۰,۵۰	۲۸۱۲۰۶,۲۶۱	۲۶,۰۰۰۷۸	۲۰	۲۰-LT
۶۶,۱۰	۶۴,۰۱	۶۱,۷۸	۱۰,۳۴	۸,۴۳	۴,۹۴	۳,۷	۹,۷۷	۲۷۸۲۶۶,۵۹۷	۲۸,۶۰۰۸۶		
۶۶,۴۳	۶۴,۶۴	۶۱,۳۴	۱۱,۶۶	۹,۴۲	۵,۸۴	۲,۷	۱۰,۶۰	۳۳۳۵۰۸,۷۵۰	۲۶,۰۰۰۷۸	۲۰	۲۰-TL
۶۶,۹۸	۶۴,۵۵	۶۱,۲۰	۹,۳۳	۴,۲۱	۱,۷۸	۲,۵	۶,۷۹	۳۳۱۰۲۵,۶۰۳	۲۸,۶۰۰۸۶		
۶۷,۰۹	۶۴,۱۲	۶۱,۴۷	۱۱,۱۶	۵,۳۶	۲,۹۰	۲,۸	۱۰,۶۰	۳۳۳۵۰۸,۷۵۰	۲۶,۰۰۰۷۸	۲۰	۲۰-TT
۶۷,۸۲	۶۴,۸۷	۶۱,۱۲	۱۰,۲۹	۵,۲۱	۳,۲۰	۲,۶	۶,۷۹	۳۳۱۰۲۵,۶۰۳	۲۸,۶۰۰۸۶		
۱۰۸,۷۸	۱۰۷,۳۲	۱۰۵,۰۶	۱۱,۰۵	۱۰,۸۰	۹,۱۷	۱۹,۱	۱۰,۴۸	۲۶۷۱۸۷,۷۶۸	۲۷,۵۸۳۹۵	۲۵	۲۵-LL
۱۰۸,۳۱	۱۰۷,۱۲	۱۰۵,۲۳	۱۰,۹۹	۷,۵۷	۶,۷۲	۲۵,۱	۸,۲۱	۲۶۴۶۴۲,۹۲۵	۳۰,۳۴۲۳۴		
۱۰۹,۱۱	۱۰۷,۸۰	۱۰۵,۸۷	۱۱,۵۲	۷,۰۶	۴,۳۳	۸,۴	۹,۷۹	۲۹۵۲۱۳,۸۸۶	۲۷,۵۸۳۹۵	۲۵	۲۵-LT
۱۰۸,۹۲	۱۰۷,۵۲	۱۰۶,۷۱	۹,۸۲	۷,۷۷	۴,۲۵	۸,۴	۹,۷۹	۲۸۸۳۰۷,۹۵۵	۳۰,۳۴۲۳۴		
۱۰۸,۸۲	۱۰۷,۷۷	۱۰۶,۱۲	۹,۱۵	۹,۰۸	۸,۰۴	۲۲,۷	۸,۰۷	۳۵۷۷۲۲,۶۳۸	۲۷,۵۸۳۹۵	۲۵	۲۵-TL
۱۰۸,۴۴	۱۰۷,۳۱	۱۰۶,۲۰	۷,۶۱	۶,۷۹	۶,۱۴	۱۹,۷	۷,۴۰	۳۵۰۰۱۳,۶۷۳	۳۰,۳۴۲۳۴		
۱۰۸,۲۸	۱۰۷,۵۰	۱۰۶,۶۶	۹,۵۲	۸,۴۱	۶,۸۷	۲۷,۸	۸,۴۳	۳۸۵۲۱۱,۵۱۹	۲۷,۵۸۳۹۵	۲۵	۲۵-TT
۱۰۸,۸۱	۱۰۷,۹۲	۱۰۶,۷۱	۱۰,۲۱	۹,۳۴	۸,۳۸	۲۷,۴	۷,۵۲	۳۷۶۸۴۲,۸۷۹	۳۰,۳۴۲۳۴		
۲۱۲,۶۴	۲۱۱,۷۶	۲۱۰,۲۱	۱۱,۲۳	۹,۱۲	۸,۰۱	۷۲,۹	۷,۷۴	۲۶۵۶۵۲,۶۵۹	۳۳,۷۸۵۹۳	۴۰	۴۰-LL
۲۱۲,۳۷	۲۱۱,۴۳	۲۱۰,۱۹	۱۲,۴۶	۱۰,۴۲	۸,۱۲	۴۲,۶	۱۰,۸۸	۲۶۳۲۷۵,۴۰۶	۳۷,۱۶۴۵۲		
۲۱۲,۸۱	۲۱۱,۹۲	۲۱۰,۷۸	۱۲,۹۲	۹,۷۳	۷,۴۲	۱۰۰,۰	۱۰,۳۸	۳۷۵۰۳۹,۲۴۹	۳۳,۷۸۵۹۳	۴۰	۴۰-LT
۲۱۲,۳۱	۲۱۱,۵۳	۲۱۰,۷۷	۱۲,۷۱	۹,۳۲	۷,۶۷	۱۰۰,۰	۱۰,۹۱	۳۶۷۹۰۰,۶۳۷	۳۷,۱۶۴۵۲		
۲۱۲,۸۹	۲۱۱,۵۸	۲۱۰,۶۵	۱۰,۹۰	۹,۳۸	۷,۰۲	۵۴,۶	۳,۸۹	۳۳۳۰۶۲,۲۹۶	۳۳,۷۸۵۹۳	۴۰	۴۰-TL
۲۱۲,۷۴	۲۱۱,۴۲	۲۱۰,۵۶	۸,۹۲	۶,۶۱	۴,۰۸	۱۶,۹	۴,۲۳	۳۲۲۰۰۴,۷۷۷	۳۷,۱۶۴۵۲		
۲۱۳,۱۷	۲۱۱,۹۹	۲۱۱,۱۱	۱۲,۰۱	۱۰,۹۱	۸,۱۳	۱۰۰,۰	۱۱,۴۳	۳۷۴۶۵۰,۷۰۶	۳۳,۷۸۵۹۳	۴۰	۴۰-TT
۲۱۳,۰۹	۲۱۱,۸۲	۲۱۱,۰۳	۱۲,۷۲	۹,۸۷	۸,۵۲	۱۰۰,۰	۱۱,۹۳	۳۶۷۹۰۰,۶۳۷	۳۷,۱۶۴۵۲		
۳۸۴,۵۲	۳۸۲,۳۹	۳۸۰,۱۲	۱۱,۵۶	۹,۰۷	۸,۱۰	۹۹,۳	۱۰,۰۲	۲۶۱۴۸۱,۶۳۳	۳۴,۰۳۷۹۶	۵۰	۵۰-LL
۳۸۴,۳۴	۳۸۲,۲۱	۳۷۹,۹۲	۱۰,۱۹	۸,۸۲	۶,۷۸	۹۷,۲	۸,۴۴	۲۵۷۵۰۱,۹۵۷	۳۷,۴۴۱۷۶		
۳۸۴,۸۶	۳۸۲,۸۴	۳۸۰,۴۲	۱۲,۵۰	۹,۲۱	۷,۲۱	۵۸,۸	۹,۳۱	۲۸۷۰۷۱,۷۵۹	۳۴,۰۳۷۹۶	۵۰	۵۰-LT
۳۸۴,۸۱	۳۸۲,۳۶	۳۸۰,۲۱	۱۱,۹۱	۹,۸۳	۷,۷۲	۴۶,۴	۱۰,۵۲	۲۸۲۳۵۰,۱۸۲	۳۷,۴۴۱۷۶		
۳۸۴,۶۳	۳۸۲,۹۰	۳۸۰,۸۲	۱۲,۷۳	۹,۳۱	۶,۸۱	۸۷,۳	۱۰,۲۷	۳۴۸۷۵۰,۴۷۳	۳۴,۰۳۷۹۶	۵۰	۵۰-TL
۳۸۶,۸۳	۳۸۲,۶۲	۳۸۰,۷۴	۱۰,۸۱	۸,۴۹	۶,۹۸	۴۰,۸	۸,۲۸	۳۴۲۰۵۴,۴۶۷	۳۷,۴۴۱۷۶		
۳۸۴,۹۲	۳۸۲,۱۲	۳۸۱,۱۱	۱۶,۸۹	۱۲,۷۹	۹,۲۱	۱۰۰,۰	۱۴,۵۸	۴۲۳۸۲۹,۲۴۹	۳۴,۰۳۷۹۶	۵۰	۵۰-TT
۳۸۵,۳۲	۳۸۲,۹۳	۳۸۱,۰۳	۱۶,۲۴	۱۰,۱۹	۸,۴۳	۱۰۰,۰	۱۴,۷۵	۴۱۸۵۵۰,۵۶۱	۳۷,۴۴۱۷۶		
۱۵۸,۱۵۹	۱۵۷,۱۴۵	۱۵۴,۸۱۵	۱۱,۱۴۹	۸,۳۴۴	۶,۱۸۳۷۵	۱۷۶,۵۰۵۷	۹,۱۶۰۵				Avg
۳۸۶,۸۳	۳۸۳,۱۲	۳۸۱,۱۱	۱۶,۸۹	۱۲,۷۹	۹,۲۱	۱۰۰,۰	۱۴,۷۵				Max

## ۶. نتیجه‌گیری

مدل ارائه شده در این پژوهش یک مدل ریاضی جدید برای مسئله مکان‌یابی محور پوششی بوده است. در این مدل، از پوشش زمانی استفاده شده و پوشش کامل تمامی مسیرها مورد نظر بوده است. به دلیل اهمیت ظرفیت مکان‌های محور در دنیای واقعی، این محدودیت برای مدل پیشنهادی لحاظ شده است. همچنین این مدل می‌تواند تصمیم بگیرد که کدام لایه‌ی مسیر برای انتقال جریان کالا در یک پیوند ارتباطی شبکه مناسب است. براساس ادبیات موضوع، ثابت شده که مکان‌یابی محور پوششی یک مسئله NP-Hard است<sup>[۱۸]</sup> و بنابراین، با افزایش تعداد مراکز حل این مدل از طریق نرم‌افزارهای بهینه‌سازی زمان بسیار زیادی را صرف می‌کند و این فرایند را تقریباً غیرممکن می‌سازد. از این رو، از الگوریتمی مبتنی بر شبیه‌سازی تریید استفاده شده، که یکی از روش‌های فرایندکاری آشنا در بهینه‌سازی است. این الگوریتم با الگوریتمی از فرایند سرد شدن آهن باعث می‌شود که الگوریتم در فرایند حل از تله‌های محلی فرار کند تا به جواب مناسبی دست یابد. برای سنجش عملکرد روش پیشنهادی حل، این روش با ابزار حل CPLEX برای داده‌های معروف پست

استرالیا مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش حل مطرح شده در این مطالعه، به‌طور میانگین برای داده‌های استرالیا از دو برتری -- نسبت به CPLEX -- برخوردار است:

۱. از فاصله کم‌تری نسبت به حد پایین برخوردار است؛
۲. در زمان کم‌تری به یک جواب مناسب می‌رسد.

با توجه به این که داده‌های پست استرالیا واقعی‌اند، لذا به‌طور کلی می‌توان گفت روش حل پیشنهادی برای داده‌های با مراکز بیشتر، نسبت به CPLEX به زمان حل کم‌تری در حین رسیدن به یک جواب مناسب خواهد بود. مدل پیشنهادی در مسائل دنیای واقعی کاربردهای متفاوتی دارد. در توزیع مواد فاسد شدنی، به دلیل محدود بودن زمان انتقال آن‌ها می‌توان از این مدل چندلایه استفاده کرد. شرکت‌های پستی که ظرفیت ۲۴ ساعت باید کالاها را از یک مبدأ به یک مقصد برسانند، می‌توانند از این مدل بهره برداری کنند. همچنین پیاده‌سازی این مدل در شبکه‌ی محورهای تجاری یکی از مهم‌ترین کاربردهای کلان این مدل است.

## پانویس‌ها

1. hub
2. multi-layer single allocation hub set covering problem
3. trade hubs
4. multimodal
5. australian post
6. maximal covering
7. cluster
8. covering matrix
9. tight
10. loose
11. relative gap
12. bold

## منابع (References)

1. Kim, H. and O'Kelly, M.E. "Reliable p-hub location problems in telecommunication networks", *Geographical Analysis*, **41**, pp. 283-306 (2009).
2. Sasaki, M., Suzuki, A. and Drezner, Z. "On the selection of hub airports for an airline hub-and-spoke system", *Computers & Operations Research*, **26**, pp. 1411-1422 (1999).
3. Tan, P.Z. and Kara, B.Y. "A hub covering model for cargo delivery systems", *Networks*, **49**, pp. 28-39 (2007).
4. Ernst, A.T. and Krishnamoorthy, M. "Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem", *Location Science*, **4**, pp. 139-154 (1996).
5. Campbell, J.F. "Integer programming formulations of discrete hub location problems", *European Journal of Operational Research*, **72**, pp. 387-405 (1994).

6. Kara, B.Y. and Tansel, B.C. "The single assignment hub covering problem", *Journal of The Operational Research Society*, **54**, pp. 59-64 (2003).
7. Wagner, B. "Model formulations for hub covering problems", Working paper, Institute of Operations Research, Darmstadt University of Technology, Hochschulstrasse 1, 64289 Darmstadt, Germany (2004).
8. Ernst, A., Jiang, H., and Krishnamoorthy, M. "Reformulations and computational results for uncapacitated single and multiple allocation hub covering problems", *CSIRO Mathematical and Information Sciences*, Australia (2005).
9. Hamacher, H., and Meyer, T. "Hub cover and hub center problems", Working Paper, Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, Gottlieb-Daimler-Strasse, 67663 Kaiserslautern, Germany (2006).
10. Weng, K., Yang, C. and Ma, Y.F. "Two artificial intelligence heuristics in solving multiple allocation hub maximal covering problem", *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 4113 LNCS - I, pp. 737-744 (2006).
11. Weng, K. and Wang, Y. "Evolutionary algorithms for multiple allocation hub set covering problem", *International Conference on Networking, Sensing and Control*, Sanya pp. 408-411 (2008).
12. Qu, B. and Weng, K. "Path relinking approach for multiple allocation hub maximal covering problem", *Computers and Mathematics with Applications*, **57**, pp. 1890-1894 (2009).
13. Calik, H., Alumar, S., Kara, B. and Karasan, O. "A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub", *Computers & Operations Research*, **36**, pp. 3088-3096 (2009).



14. Ghodsi, R., Mohammadi, M., and Rostami, H. "Hub covering location problem under capacity constraints", *4th International Conference on Mathematical Modelling and Computer Simulation*, Kota Kinabalu, pp. 204-208 (2010).
15. Sahraeian, R. and Korani, E. "The hierarchical hub maximal covering problem with determinate cover radiuses", *International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*, Macao pp. 1329-1333 (2010).
16. Kara, B.Y., and Tansel, B.C. "On the single-assignment p-hub center problem", *European Journal of Operational Research*, **125**, pp. 648-655 (2000).
17. Glover, F. and Kochenberger, G.A., *Handbook of Metaheuristics*, New York, Kluwer Academic Publishers (2003).
18. Collins, N.E., Eglese, R.W. and Golden, B.L., "Simulated annealing: An annotated bibliography", *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **8**, pp. 209-307 (1988).

## MULTI-LAYER SINGLE ALLOCATION HUB SET COVERING PROBLEM

H. Karimi

hkarimi@shahed.ac.ir

M. Bashiri (corresponding author)

bashiri@shahed.ac.ir

Dept. of Industrial Engineering  
Shahed University

Sharif Industrial Engineering and Management Journal  
Volume 29, Issue 2, Page 117-125, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 9 July 2011; received in revised form 5 March 2012; accepted 30 April 2012.

### Abstract

Finding the location of hub facilities and the allocation of non-hub nodes to these located hub facilities are the aim of hub location problems. Commodities flow in the hub and spoke network in three phases; 1) Collecting: they move along their origin nodes to the assigned hub nodes. 2) Transferring: commodities flow through the hub arcs if necessary. 3) Distributing: commodities depart the hub network and arrive at destination nodes. Typical applications of hub locations include: airline passenger travel, telecommunication systems and postal networks. The hub location problem was originally introduced by O'Kelly (1986). Campbell (1994) provided the hub set and hub maximal covering problem with single and multiple allocations. In this work, we propose a multi-layer single allocation hub set covering problem over fully interconnected hub networks, and provide a formulation to this end. The postal service can be a multi-layer hub covering application. Postal companies offer different delivery time pledges, such as next day delivery, to their customers. However, due to geographical distribution of cities and the structure of highways, delivery within 24 hours between all city pairs is impossible if only ground transportation is employed. Chiefly, due to competitiveness, it is better for postal companies to check the feasibility of including airlines in their distribution networks. This issue motivates us to introduce a multi layer model for hub covering problems, which can determine whether a ground or air route for each link is better in the hub network, in which the delivery time bound is guaranteed, as the covering radius. Trade hubs are another real application of the proposed approach. The trade growth of each country can occur if trade hubs are designed and developed properly. On the other hand, trade hubs connect most trade routes with some facilities to decrease total transportation costs with lowest delivery times, so, according to their geographic position, they should employ different modes of transportation system. We provide a clear example to intro-

duce the model. For better illustration of the proposed model, a numerical example with four nodes is provided and solved by the CPLEX solver. Moreover, we test the performance of the model on the AP data set. Results of the AP data set for problems of size  $n = 10, 20, 25, 40$  and  $50$ , are given. Since the AP data set does not consider multi-layer data, we consider two layers for these benchmarks as assumptions. The computed gap from the lower bound, using the CPLEX solver, shows the efficiency of the proposed approach. The results show that the problem lower bounds increase in a tighter covering radius, and the number of hub locations decreases in a looser covering radius.

**Key Words:** Hub location, covering, network design, multi-layer, simulated annealing.