

کاربرد رویکرد زنجیره‌ی مارکوف در طراحی نمودار کنترل جمع تجمعی برای پایش رضایت و وفاداری براساس مشاهدات رضایت‌سنجی

یاسر صمیمی (دکتری)

عبدا... آقایی* (استاد)

حمید شوریاری (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۳ (دوره ۱ - شماره ۲، ص. ۱۵-۲۵)

در این نوشتار روشی مبتنی بر آماری جمع تجمعی برای پایش روند تغییرات میزان رضایت و وفاداری مشتریان در سطح انفرادی ارائه می‌شود. برای این منظور تلاش می‌شود تا مقدار آماری کنترل و پارامترهای نمودار کنترل مطابق با ویژگی‌های منحصر به فرد هر مشتری و با در نظر گرفتن آخرین اطلاعات موجود از رفتار مشتری تنظیم شود. فرض می‌شود داده‌های رضایت‌سنجی مشتریان در دوره‌های زمانی منظم با استفاده از متغیرهای ترتیبی مناسب در دسترس قرار دارد. در این نوشتار با تأکید بر این موضوع که یک رابطه‌ی تابعی وابسته به زمان بین سطح رضایت و وفاداری مشتری برقرار است، از مدل رگرسیون لجستیک برای نمایش رابطه‌ی دو متغیر مذکور استفاده شده است. به علاوه، با در نظر گرفتن پارامتری که بیانگر اطلاعات نامشهود مشتری است امکان به‌روزرسانی توزیع آماری جمع تجمعی براساس آخرین مشاهده از رضایت‌سنجی مشتری فراهم شده است. نمودار کنترل جمع تجمعی متناسب با اطلاعات خاص مشتری به کمک رویکرد زنجیره‌ی مارکوف طراحی می‌شود. به این ترتیب، امکان محاسبه‌ی حد کنترل نمودار جمع تجمعی با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد هر مشتری برای دست‌یابی به مقدار مطلوب شاخص متوسط طول دنباله در وضعیت تحت کنترل و همچنین ارزیابی توانایی نمودار در شرایط تغییر پارامترهای رفتار مشتری فراهم شده است.

واژگان کلیدی: نمودار کنترل جمع تجمعی، مدل رگرسیون لجستیک ترتیبی، مدیریت ارتباط با مشتری، پایش رضایت و وفاداری مشتریان.

۱. مقدمه

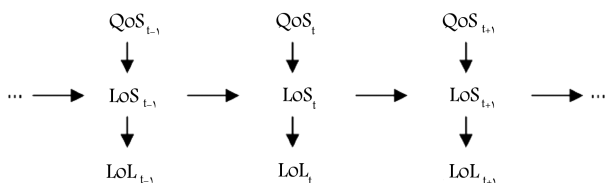
جمع تجمعی برای پایش سطح رضایت و میزان وفاداری مشتری مورد بحث قرار می‌گیرد. برای این منظور داده‌های حاصل از طرح رضایت‌سنجی مشتریان مبنای طراحی نمودار کنترل بوده و آنچه مورد تأکید قرار گرفته، وجود رابطه‌ی تابعی بین سطح رضایت‌مندی و میزان وفاداری مشتری است. لازم به ذکر است که نویسندگان مقاله تغییرات محتمل در مدل رضایت - وفاداری را در نگاهی جامع‌تر به سه دسته کلی، جزئی و انفرادی تقسیم کرده‌اند. تغییرات کلی شامل نوعی از تغییرات است که در برگیرنده‌ی تمامی اعضای جامعه‌ی مشتریان است؛ در حالی که تغییرات جزئی و انفرادی تنها شامل بخشی خاص از جامعه‌ی مشتریان، یا تنها متمرکز بر فرد به‌خصوصی است. این نوشتار موضوع پایش تغییرات را در سطح انفرادی مورد توجه قرار می‌دهد و بررسی سایر انواع تغییرات به‌منظور جلوگیری از طولانی شدن مطلب به‌گزارشی دیگری واگذار شده است.^[۱]

از آنجا که در این مقاله وجود وابستگی بین دو شاخص رضایت و وفاداری

در تحلیل ارزش دوره‌ی عمر مشتریان سازمان، تعدادی از مشتریان از نقطه نظر شاخص‌های متداول برای ارزش‌گذاری مشتری -- نظیر تناوب خرید، حجم خرید و زمان سپری شده از آخرین خرید -- از اولویت بالاتر برخوردارند. طبیعتاً در اجرای سیاست‌های مدیریت ارتباط با مشتری، این گروه از مشتریان که تحت عنوان مشتریان ویژه یا کلیدی نیز شناخته می‌شوند نیازمند برنامه‌ریزی ویژه و ازجمله لزوم پایش دقیق شاخص‌های عینی و استنباطی هستند. حال اگر پایش سطح رضایت یا میزان وفاداری یک مشتری خاص مد نظر باشد می‌توان با استفاده از یک روش پایش خاص با دقت بیشتری روند تغییرات معیارهای رفتاری یا استنباطی مشتری را مورد بررسی قرار داد. با این هدف، در این مقاله نحوه‌ی به‌کارگیری نمودار کنترل

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۷/۱۱، اصلاحیه ۱۳۹۱/۸/۱۴، پذیرش ۱۳۹۱/۱۰/۱۰.



شکل ۱. ارتباط بین متغیرهای مدل شامل کیفیت خدمت (QoS)، سطح رضایت (LoS) و سطح وفاداری (LoL) در رویکرد اول.

می‌کند، در شکل ۱ ارائه می‌شود. فرض می‌کنیم: ۱. در هر دوره رضایت مشتری براساس داده‌های رضایت‌سنجی از طریق مقیاس لیکرت در K سطح اندازه‌گیری می‌شود؛ [۱۵] ۲. تمایل مشتری برای ادامه یا قطع ارتباط با عرضه‌کننده از طریق اقدام او برای تمدید یا عدم تمدید قرارداد قابل تشخیص است.

LoL_t ، LoS_t ، QoS_t به ترتیب بیان‌گر سطح کیفیت خدمت ارائه شده، میزان رضایت و سطح وفاداری مربوط به یک مشتری در دوره زمانی t است. مقادیر متغیر تصادفی LoS_t با S_i ، $(i = 1, \dots, K)$ ، نشان داده می‌شود و بیان‌گر K سطح رضایت در طیف مقادیر رضایت کامل تا عدم رضایت کامل است. مقدار متغیر تصادفی LoL_t که وفاداری مشتری را در دوره زمانی t نشان می‌دهد با احتمال مشخصی که وابسته به سطح رضایت مشتری است یکی از دو مقدار ۱ (به معنای تمایل برای خرید مجدد) یا صفر (به معنای عدم تمایل برای ادامه‌ی استفاده از خدمت) را می‌پذیرد. بنابراین در هر دوره تعدادی از مشتریان تصمیم به جدایی از سازمان می‌گیرند. در مقابل، سازمان در ابتدای هر دوره اقدام به جذب مشتریان جدید می‌کند. اگرچه موضوع بهینه‌سازی نرخ جذب مشتریان جدید برای ایجاد روند مورد نظر در تعداد مشتریان در این بخش بررسی نمی‌شود، فرض می‌کنیم نرخ جذب مشتری جدید که با نماد λ_t نمایش داده می‌شود چنان تنظیم می‌شود که متوسط تعداد مشتریان در یک سطح مشخص ثابت باقی بماند.

در اینجا روابط مدل بیان می‌شود. فرض می‌شود میزان رضایت‌مندی در هر دوره متأثر از سطح رضایت در دوره‌های پیشین است. در این مقاله از یک فرایند مارکوف گسسته با K سطح و یک واحد تأخیر زمانی برای بیان این ارتباط استفاده می‌شود. در نظر بگیرید ماتریس Q_t بیان‌گر ماتریس انتقال سطح رضایت برای دوره t باشد که مؤلفه‌های آن تابعی از سطح کیفیت خدمت در دوره t ، مشخصات منحصر به فرد هر مشتری، و همچنین اقدامات بازاریابی سازمان همچون قیمت‌گذاری یا تخفیفات ویژه طی دوره مورد نظر است.

$$Q_t = \begin{bmatrix} q_{1 \rightarrow 1, t} & \dots & q_{1 \rightarrow k, t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k \rightarrow 1, t} & \dots & q_{k \rightarrow k, t} \end{bmatrix} \quad (1)$$

به طوری که $\sum_{j=1}^K q_{i \rightarrow j, t} = 1$ ($\forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$) و داریم:

$$q_{i \rightarrow j, t} = P(LoS_t = j | LoS_{t-1} = i, CDV, QoS_t, \mathbf{a}_{1t}, \theta_t); \quad i, j \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (2)$$

CDV بیان‌گر مشخصات مشهود و منحصر به فرد مشتری، مانند مشخصات جمعیت‌شناختی، اجتماعی یا جغرافیایی است. اگرچه به نظر می‌رسد استفاده از بردار برای نمایش ویژگی‌های مذکور مناسب‌تر است، در نمونه‌های عددی مقاله از نماد CDV به عنوان اسکالری که می‌تواند یک امتیاز خلاصه برای ویژگی‌های قابل مشاهده‌ی مشتری تلقی شود استفاده خواهد شد، و مقادیر آن از یک متغیر تصادفی با

مورد توجه بوده است در اینجا به نقل از مطالعات و بررسی‌های متعدد شواهدی در این خصوص ارائه می‌شود. مدل‌سازی معادلات ساختاری به وضوح بیان می‌دارد که میزان وفاداری مشتری به‌شکلی معنادار متأثر از سطح رضایت‌مندی است. [۲-۴] بررسی‌های متعدد مبتنی بر به‌کارگیری روش‌های طبقه‌بندی حاکی از تأثیر معنادار میزان رضایت‌مندی مشتری بر تصمیم او برای قطع یا ادامه‌ی ارتباط با عرضه‌کننده است. [۵-۶] همچنین، مدل‌سازی رگرسیون بقا نشان می‌دهد رضایت‌مندی مشتری از مهم‌ترین عوامل مؤثر بر طول دوره‌ی ارتباط تا لحظه‌ی خاتمه‌ی همکاری با عرضه‌کننده است. [۷-۸] به علاوه، نتایج یک بررسی نشان می‌دهد که قدرت تشخیص کاهش در نرخ وفاداری مشتریان در روشی که براساس رابطه‌ی تابعی دو متغیر وفاداری و رضایت توسعه می‌یابد به میزان قابل توجهی بیش از روشی است که در تحلیل میزان وفاداری، مشتریان را به لحاظ سطح رضایت‌مندی به شکل بک‌نواخت مورد توجه قرار داده است. [۹]

استفاده از ابزار کنترل فرایند آماری برای پیش‌نگرش و رفتار مشتری، به‌ویژه در سال‌های اخیر توسط محققین مورد بررسی قرار گرفته است. موضوع پیش‌مستمر شاخص‌های عینی و استنباطی ذی‌نفعان همچنین در الگوهای سرآمدی کسب و کار، مدل‌های مدیریت کیفیت و نظام ارزیابی عملکرد سازمانی مورد تأکید واقع شده است. البته دسته‌بندی بررسی‌های انجام شده در زمینه‌ی پیش‌رفتار مصرف‌کننده از نقطه‌نظر هدف پیش، موضوعی قابل تأمل است. در این خصوص شاید بتوان شناسایی تغییر در نرخ وفاداری مشتری، تشخیص تقلب یا سوء استفاده در مصرف خدمت و همچنین کشف ایجاد تداخل در عملکرد شبکه‌های رایانه‌ی را به عنوان برخی از مهم‌ترین اهداف مورد توجه در مطالعات برشمرد. برای نمونه، جیانگ و همکاران (۲۰۰۷) براساس یک مدل خطی پویا از نمودار شوهارت برای پیش‌تغییرات سطح مصرف‌کاربر در خدمات مخابراتی استفاده می‌کنند. [۱۰] همچنین تیسانگ و همکاران (۲۰۰۷) به بررسی کاربرد روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی چندطرفه برای تشخیص تقلب کاربر در استفاده از خدمات مخابراتی پرداخته‌اند. [۱۱] همچنین، یه و چن (۲۰۰۷) از روشی مبتنی بر مدل شوهارت برای شناسایی داده‌های غیرطبیعی در فعالیت کاربران یک شبکه‌ی رایانه‌ی استفاده می‌کنند. [۱۲] نهایتاً، در رابطه با موضوع مطالعه‌ی حاضر، می‌توان به مقالاتی اشاره کرد که مستقیماً بر به‌کارگیری نمودار کنترل برای پیش‌رضایت‌مندی یا وفاداری مشتریان متمرکز بوده‌اند. [۱۳، ۱۴] ایمپلیزری و همکاران (۲۰۰۹) به کاربرد نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب برای پیش‌داده‌های رضایت‌سنجی بیماران اشاره می‌کنند. [۱۳] همچنین کنت و همکاران (۲۰۱۱) به بررسی پیشرفت‌های صورت گرفته در خصوص تحلیل آماری داده‌های رضایت‌سنجی مشتری، مانند کاربرد نمودارهای کنترل، پرداخته‌اند. [۱۴]

ساختار ارائه‌ی مطالب در این مقاله در دو بخش اصلی بر این اساس که «آیا متغیر پاسخ رابطه‌ی رضایت - وفاداری به شکل باینری یا به شکل ترتیبی گزارش می‌شود؟» تعریف شده است. در هر بخش پس از توصیف مدل اصلی، بیان فرضیات و روابط رگرسیونی مربوطه نحوه‌ی طراحی نمودار جمع‌تجمعی مفصلاً توضیح داده می‌شود.

۲. رویکرد اول: وفاداری به‌عنوان یک متغیر تصادفی

برنولی

مدلی که در این قسمت ساختار ارتباط درجه کیفیت خدمت، سطح رضایت‌مندی مشتری و در نهایت تصمیم او مبنی بر ادامه یا قطع ارتباط با عرضه‌کننده را تبیین

کوتاه مدت و بلندمدت برنامه های بازاریابی بدین شکل در مونتایا و همکاران (۲۰۱۰) نیز مورد استفاده قرار گرفته است.^[۱۶] نهایتاً لازم به ذکر است در این قسمت توزیع پیشین برای پارامتر θ ، یک توزیع بتای محدود به دامنه ی صفر تا ۱ با پارامترهای مشخص r و s در نظر گرفته شده است. تابع چگالی مربوطه و نحوه ی به روزرسانی توزیع پارامتر θ براساس آخرین مشاهده در دسترس از رفتار مشتری و با استفاده از تابع درست نمایی مشاهدات در ضمیمه ارائه شده است.

پیش از بحث درباره ی نحوه ی توسعه ی نمودار کنترل، خاطر نشان می سازد پارامترهای مدل ارائه شده -- شامل ضرایب روابط رگرسیونی و همچنین پارامترهای توزیع پیشین متغیر θ -- با استفاده از مشاهدات طرح رضایت سنجی مشتریان و به کمک روش بیشترین درست نمایی قابل برآورد است. در اینجا برای جلوگیری از طولانی شدن مطلب از بیان توضیحات در این خصوص خودداری شده اما برای کسب اطلاعات در این ارتباط می توان به مطالعات انجام شده^[۱۷] رجوع کرد.

۱.۲. طراحی نمودار کنترل جمع تجمعی در سطح انفرادی

چنانچه کشف تغییرات افزایشی در سطح رضایت مشتری مورد توجه باشد، با رجوع به رابطه ی ۳ و در نظر گرفتن پارامتر α_1 به عنوان پارامتر طراحی نمودار کنترل، مطابق هاوکینز و اولول (۱۹۹۹)، رابطه ی مرسوم برای نمودار جمع تجمعی را چنین در نظر می گیریم:^[۱۸]

$$C_t^+ = \max(0, C_{t-1}^+ + \omega_t); \quad t = 1, 2, \dots \quad (6)$$

به طوری که $C_t^+ = 0$. همچنین ω_t وزن تخصیص یافته به مشاهده در زمان t است که چنانچه به شکل $\omega_t = \log [L(\alpha_1^{0c}; LoS_t) / L(\alpha_1^{1c}; LoS_t)]$ تعریف شود^[۱۹] با در نظر گرفتن مقداری مشخص برای متوسط طول دنباله در وضعیت تحت کنترل (ARL_0)، نموداری با حداقل متوسط طول دنباله، برای کشف تغییر در پارامتر مورد نظر از مقدار تحت کنترل α_1^{1c} به مقدار جدید α_1^{0c} به دست می آید. بالاترین پارامتر α_1 یعنی نمادهای Ic و Oc به ترتیب بیانگر مقادیر تحت کنترل و خارج از کنترل هستند. بدین ترتیب برای استفاده از نمودار کنترل جمع تجمعی، پس از دریافت مشاهده در زمان t و محاسبه ی وزن مربوطه (ω_t)، در صورتی که مقدار آماره ی کنترل C_t^+ از حد کنترل نمودار که با نماد H_t^+ نمایش داده خواهد شد تجاوز کند نتیجه می گیریم که مقدار پارامتر مورد نظر با تغییر معنادار مواجه شده است. حد کنترل H_t^+ برای دست یابی به مقدار مشخصی از معیار ARL تعیین می شود.

به دلیل وجود وابستگی در مقادیر آماره جمع تجمعی برخلاف نمودارهای شوهرت تعیین مقدار متوسط طول دنباله به راحتی امکان پذیر نیست. برای ارزیابی عملکرد نمودار جمع تجمعی روش های مختلفی به منظور تعیین شاخص متوسط طول دنباله معرفی شده است. در اینجا نحوه ی استفاده از رویکرد زنجیره ی مارکوف برای محاسبه ی متوسط طول دنباله شرح داده می شود.^[۲۰] چنان که در رابطه ی ۶ بیان شد مقدار آماره ی جمع تجمعی در هر دوره برحسب مقدار آن در دوره ی قبل، و وزنی که برحسب مقدار مشاهده در دوره ی حاضر محاسبه می شود قابل حصول است. در نظر بگیرید برای بررسی نحوه ی انتقال آماره ی جمع تجمعی از مرحله ی $1 - t$ به مرحله ی t ، مقادیر قابل پذیرش در فاصله ی صفر تا H^+ ، در m بخش با طول مساوی $w = H^+ / m$ تقسیم بندی شود. به عبارت دیگر، نواحی تشکیل شده در فضای اعداد حقیقی مثبت شامل $1 + m$ ناحیه به صورت $(H^+, +\infty)$ ، $(H^+, (m-1)w)$ ، $(w, 2w)$ ، $(0, w)$ خواهد بود. بدین ترتیب می توان با استفاده از رابطه ی ۷، احتمال انتقال آماره ی جمع تجمعی را طی مرحله ی

توزیع نرمال استاندارد حاصل می شود. α_{1t} نمادی برای اقدامات بازاریابی سازمان و در نهایت θ_t نشان دهنده ی بخش نامشهود اطلاعات مشتری است. به عبارت دیگر، از آنجا که ممکن است کلیه ی اطلاعات لازم برای تفکیک مشتریان در دسترس نباشد، بخشی از اطلاعات به عنوان اطلاعات مشهود و بخشی دیگر در قالب یک متغیر تصادفی به عنوان بخش نامشهود اطلاعات مشتری در این رابطه منظور شده است. در اینجا مطابق رابطه ی ۳ از مدل رگرسیون لجستیک ترتیبی برای بیان نحوه ی تأثیر سطح کیفیت خدمت بر میزان رضایت مندی مشتری استفاده می شود.

$$q_{i \rightarrow 1, t} = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha_{11} + \alpha_{11} \times i + CDV' \alpha_1 + \alpha_1 QoS_t + a_{1t} \alpha_1 + \theta_t)}}$$

$$q_{i \rightarrow j, t} = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha_{1j} + \alpha_{1j} \times i + CDV' \alpha_1 + \alpha_1 QoS_t + a_{1t} \alpha_1 + \theta_t)}}$$

$$q_{i \rightarrow k, t} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-(\alpha_{1k} + \alpha_{1k} \times i + CDV' \alpha_1 + \alpha_1 QoS_t + a_{1t} \alpha_1 + \theta_t)}}$$

$$i \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad j \in \{2, \dots, K-1\} \quad (3)$$

در مدل فوق $(i = 1, \dots, K-1)$ ، مقادیر عرض از مبدأ α_{1j} ($j = 1, \dots, 4$)، سایر ضرایب مدل را نشان می دهد. به علاوه، برای تعیین سطح رضایت مشتری در پایان اولین دوره از رابطه ی ۴ استفاده می شود که در آن γ_i ($i = 1, \dots, K$)، بیانگر احتمال کسب سطح رضایت i در پایان اولین دوره ی شروع ارتباط با عرضه کننده است.

$$\gamma_i = P(LoS_1 = i | CDV, QoS_1, \alpha_{11}, \theta_1); \quad i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (4)$$

به طوری که $\sum_{i=1}^K \gamma_i = 1$. مدل رگرسیون لجستیک برای محاسبه ی مقادیر γ_i در ضمیمه ارائه شده است. در سطح دوم مدل، از مدل رگرسیون لجستیک باینری برای نمایش مقدار وفاداری که متأثر از میزان رضایت مندی مشتری است استفاده می شود. ارزش انتظاری میزان وفاداری که در اینجا به عنوان یک متغیر صفر و ۱ منظور شده است به کمک رابطه ی ۵ نشان داده می شود. در این رابطه، β_{0i} ($i = 1, \dots, K$)، مقادیر عرض از مبدأ مدل، و β_1 و β_2 سایر ضرایب مدل محسوب می شوند. همچنین فرض می شود $\beta_{01} < \beta_{02} < \dots < \beta_{0K}$.

$$p_{it} = P(LoL_t = 1 | LoS_t = i, CDV, \alpha_{1t}, \theta_t)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-(\beta_{0i} + CDV' \beta_1 + a_{1t} \beta_2 + \theta_t)}}; \quad i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (5)$$

p_{it} ($i = 1, \dots, K-1$)، نشان دهنده ی تمایل مشتری برای خرید در دوره ی t است که به صورت تابعی از سطح رضایت مندی او در دوره ی t ، مشخصات معلوم و نامعلوم او و همچنین اقدامات بازاریابی سازمان تعریف شده است. فاکتور α_{1t} بیانگر اقدامات بازاریابی سازمان با تأثیر کوتاه مدت است. شایان توجه است که وجود α_{1t} در رابطه ی ۳ بر ماتریس انتقال سطح رضایت مشتری تأثیرگذار است و بدین ترتیب می تواند روند بلندمدت رفتار مشتری را تحت تأثیر قرار دهد. این گونه برنامه های بازاریابی ممکن است شامل ارائه ی امتیاز از طریق به کارگیری کارت وفاداری، یا ارائه ی خدمات ویژه به شکل مستمر به مشتریانی با حجم یا تناوب خرید بالا باشد. در مقابل فاکتور α_{2t} به گونه یی در مدل ۵ منظور شده است تا بر سطح وفاداری مشتری در دوره ی t تأثیرگذار باشد. اقداماتی همچون ارائه ی تخفیفات کلی یا قیمت های ویژه برای یک دوره زمانی خاص می تواند صرف نظر از سطح رضایت مشتری بر تصمیم مشتری برای خرید مجدد یا جدایی در یک دوره ی مشخص مؤثر باشد. تفکیک تأثیر

$t - 1$ به مرحله‌ی t محاسبه کرد:

$$f_{ij} = P[(j - 1) \cdot w < C_t^+ < j \cdot w | (i - 1) \cdot w < C_{t-1}^+ < i \cdot w];$$

$$i = (1, \dots, m), \quad j = (1, \dots, m) \quad (7)$$

به منظور تسهیل محاسبات، چنانچه به ازای m بزرگ، عبارت پس از علامت شرط به صورت تقریبی به شکل $C_{t-1}^+ = (2i + 1)w/2$ خلاصه شود، می‌توان f_{ij} را چنین محاسبه کرد:

$$f_{ij} = P[(j - 1)w - (2i + 1)w/2 < \omega_t < jw - (2i + 1)w/2]$$

$$= F_{\omega_t}(jw - (2i + 1)w/2) - F_{\omega_t}((i - 1)w - (2i + 1)w/2)$$

$$i = (1, \dots, m), \quad j = (1, \dots, m) \quad (8)$$

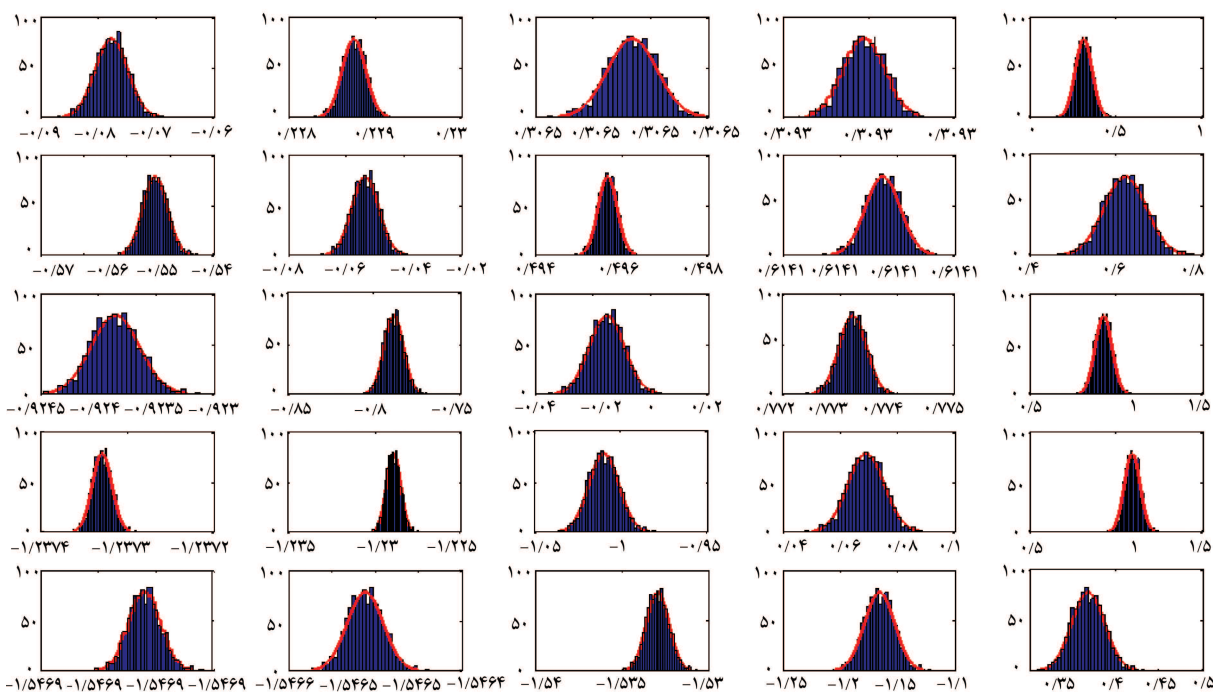
که در آن F_{ω_t} نماد تابع توزیع تجمعی متغیر ω_t است. برای محاسبه‌ی مقدار f_{ij} به طور مشخص لازم است توزیع آماری متغیر ω_t تعیین شود. خاطرنشان می‌شود متغیر LOS_t در هر دوره یکی از سطوح S_i ، $(i = 1, \dots, K)$ را با احتمالات ارائه شده در رابطه‌ی ۳ می‌پذیرد. بر این اساس مقدار وزن مربوط به مشاهده در هر دوره، ω_t ، با لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega_t = \log \left[\frac{L(\alpha_1^{Oc}; LOS_t)}{L(\alpha_1^{Ic}; LOS_t)} \right] = \log \left[\frac{\int_0^1 q_{i \rightarrow j, t}^{Oc} g(\theta_t | r, s) d\theta_t}{\int_0^1 q_{i \rightarrow j, t}^{Ic} g(\theta_t | r, s) d\theta_t} \right];$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (9)$$

که در آن $q_{i \rightarrow j, t}^{Oc}$ و $q_{i \rightarrow j, t}^{Ic}$ ، به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مقدار احتمال مربوط به مشاهده‌ی مورد نظر به ازای مقادیر α_1^{Oc} و α_1^{Ic} هستند.

در رابطه‌ی ۳ صرف‌نظر از متغیر a_{1t} که بیان‌گر نوع اقدام بازاریابی در دوره‌ی t است، متغیرهای QoS_t ، LoS_{t-1} و CDV نقش ایفا می‌کنند. چون نمودار کنترل جمع تجمعی در این قسمت برای یک مشتری خاص طراحی می‌شود متغیر CDV دارای مقدار معینی خواهد بود. اگر مقدار متغیر مستقل QoS_t در رابطه‌ی ۳ ثابت بود، در حقیقت توزیع آماری ω_t با توجه به حضور متغیر LoS_{t-1} ، به کمک یک توزیع گسسته شامل $K \times K$ مقدار مختلف قابل تعریف بود. اما از آنجا که مقدار ω_t تابعی از سطح کیفیت خدمت در دوره‌ی t نیز هست برای تعیین نحوه‌ی تغییرپذیری آن ناچار به در نظر گرفتن توزیع آماری متغیر QoS_t خواهیم بود. مطابق فرض، QoS_t یک متغیر تصادفی برخوردار از توزیع نرمال و پارامترهای معلوم در نظر گرفته می‌شود. در اینجا برای تعیین توزیع آماری ω_t برحسب متغیر QoS_t ، چون استفاده از روش‌های محاسباتی به‌سادگی امکان‌پذیر نیست، ابتدا به کمک روش تولید اعداد تصادفی، حجم زیادی از مقادیر متغیر QoS_t تولید کرده و سپس با ارائه‌ی مقادیر تصادفی ایجادشده به تابع ω_t و حصول مقادیر این آماره، توزیع مناسبی به آن برآزش می‌شود. برای نمونه، به ازای $K = 5$ ، چنانچه اطلاعات یک مشتری خاص به صورت $CDV = 0.5$ ارائه شده باشد و پارامترهای متغیر θ به صورت $r = 3$ و $s = 3$ در نظر گرفته شود و مقادیر ضرایب مدل رگرسیون لجستیک ترتیبی نیز به صورت $\alpha_{0.1} = 37.94$ ، $\alpha_{0.2} = 7.55$ ، $\alpha_{0.3} = 11.02$ ، $\alpha_{0.4} = 14.62$ ، $\alpha_{0.5} = -37.09$ در دست باشد می‌توان در شکل ۲ توزیع مربوط به آماره‌ی ω_t را که به کمک این روش به دست آمده مشاهده کرد. این توزیع به ازای مقدار $\alpha_1^{Ic} = 1/1 \times \alpha_1^{Oc}$ و به ازای مقادیر $\mu_{QoS} = 3$ و $\sigma_{QoS} = 0.5$ در این شبیه‌سازی، داده تصادفی برای متغیر تصادفی QoS_t مورد استفاده قرار گرفته است. چنان‌که از روی شکل نیز استنباط می‌شود، بررسی به کمک آزمون نیکویی برآزش مربع کای نشان می‌دهد که در هیچ‌یک از موارد نمی‌توان فرض برقراری توزیع نرمال را به‌عنوان توزیع مقادیر حاصل از شبیه‌سازی رد کرد.



شکل ۲. توزیع وزن مشاهدات در آماره‌ی جمع تجمعی برای کشف تغییرات افزایشی در میزان رضایت برای مشتری با $CDV = 0.5$.

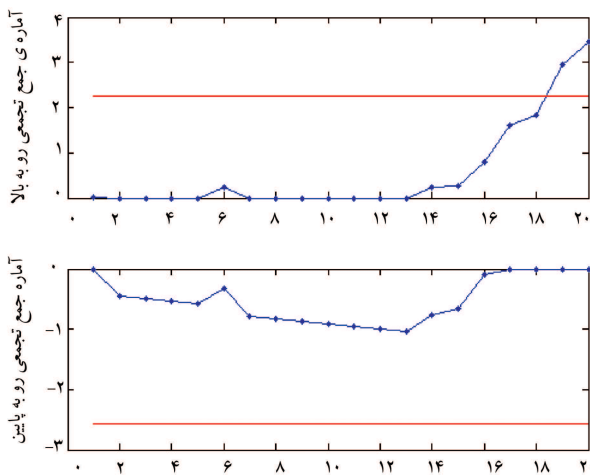
به طوری که $C_0^- = 0$ ، توجه به تفاوت آماری وزن در روابط ۱۲ و ۶ لازم است. در رابطه‌ی فوق، مقدار پارامتر طراحی در شرایط خارج از کنترل (α^{QC}) از مقداری متفاوت با مقدار منظور شده در رابطه‌ی ۶ برخوردار است. برای محاسبه‌ی مقدار متوسط طول دنباله در شرایط تحت کنترل و به تبع آن تعیین مقدار مطلوب برای حد کنترل نمودار که در این مورد با نماد H^- نشان داده می‌شود می‌توان از رویه‌ی مشابهی که در قبل برای تعیین حد کنترل H^+ بیان شد استفاده کرد.

به عنوان یک نمونه عددی وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در طراحی آماری جمع تجمعی، رابطه‌ی $\alpha^{QC} = 1/1 \times \alpha^{IC}$ منظور شده است. این مقادیر برای طراحی آماری جمع تجمعی مطابق رابطه‌ی ۶ و با هدف کشف تغییرات افزایشی در پارامتر مورد نظر تعیین شده است. همچنین مقدار $\alpha^{IC} = 0/9 \times \alpha^{QC}$ برای طراحی نمودار آماری C_t^- مطابق رابطه‌ی ۱۲ برای کشف تغییرات کاهش‌ی انتخاب می‌شود. برای مثال، اگر مشتری با مقدار $CDV = 0/5$ در نظر گرفته شود نمودارهای کنترل جمع تجمعی در شکل ۳ برای کشف تغییری برابر با $1/5 \times \alpha^{IC}$ به ازای $\alpha^{IC} = -3/09$ و مقادیر پارامترهای بیان شده در قبل مشاهده می‌شود.

موضوعی که در اینجا به طور مختصر به آن پرداخته می‌شود نحوه‌ی تعیین متوسط طول دنباله در زمانی است که از نمودار دوطرفه برای کشف همزمان تغییرات افزایشی یا کاهش‌ی در پارامتر طراحی استفاده می‌شود. بین مقادیر متوسط طول دنباله‌ی کل و مقادیر مربوطه برای آماری C_t^+ و C_t^- رابطه‌ی ۱۳ برقرار است.^[۱۱]

$$\frac{1}{ARL_T} \geq \frac{1}{ARL_U} + \frac{1}{ARL_L} \quad (13)$$

در شرایطی که توزیع متغیر مورد نظر نرمال باشد رابطه‌ی ۱۳ به شکل تساوی برقرار خواهد بود. در اینجا برای محاسبه‌ی مقدار متوسط طول دنباله هنگام استفاده‌ی همزمان از هر دو نمودار جمع تجمعی با استفاده از رابطه‌ی فوق به ذکر نامساوی بسنده می‌شود. در نهایت به بررسی نحوه‌ی محاسبه‌ی متوسط طول دنباله در شرایط خارج از کنترل می‌پردازیم. با مراجعه به رابطه‌ی ۱۰ می‌توان برای محاسبه‌ی مقدار متوسط طول دنباله در وضعیت خارج از کنترل (ARL_1) ، پس از تجدید نظر در مقدار ماتریس انتقال سطح رضایت و سپس محاسبه‌ی مجدد ماتریس R اقدام کرد. البته در اینجا مقدار بردار احتمالات حدی شامل همان مقادیری خواهد بود که در شرایط تحت کنترل محاسبه شد. به این معنا که چنانچه در بلندمدت با قبول فرض وضعیت



شکل ۳. یک نمونه از نمودار کنترل جمع تجمعی دو طرفه با $ARL_0 = 200$ برای کشف تغییر در مقدار پارامتر α_1 برای یک مشتری با $CDV = 0/5$ (اندازه‌ی تغییر $1/5 \times \alpha^{IC}$ ، زمان ایجاد تغییر $t = 11$ ، زمان کشف تغییر $t = 20$).

نکته‌ی قابل توجه در بررسی مشابهی که برای مقادیر مختلف متغیرهای CDV و QoS_t انجام شد آن است که توزیع نرمال در اغلب موارد برازش کافی برای مقادیر تصادفی حاصل از شبیه‌سازی برای متغیر ω_t نشان می‌دهد. پس از دست‌یابی به توزیع وزن مشاهدات در آماری جمع تجمعی، برای تعیین مقدار f_{ij} در رابطه‌ی ۸ نیازمند محاسبه‌ی احتمال پذیرش هر یک از $K \times K$ توزیع حاصله مطابق روش تشریحی خواهیم بود. برای این منظور با توجه به آن که نمودار جمع تجمعی برای هر مشتری به طور خاص تعیین می‌شود؛ ابتدا ارزش انتظاری مؤلفه‌های ماتریس انتقال یعنی q_{i-j} ، $(i, j = 1, \dots, K)$ ، در رابطه‌ی ۳ به ازای متغیرهای QoS_t ، θ_t و به شکل $E(q_{i-j}) \int_0^\infty \int_0^1 q_{i-j} q(\theta|r, s) h(QoS|\mu_{QoS}, \sigma_{QoS}) d\theta dQoS$ و در وضعیت تحت کنترل محاسبه می‌شود.

بر این اساس می‌توان به یک ماتریس انتقال مشخص با اندازه $K \times K$ برای انتقال LOS_{t-1} به LOS_t دست یافت که چنانچه احتمالات حدی آن با استفاده از مجموعه معادلات ۱۰ تعیین شود می‌توان توزیع احتمالی آماری ω_t را که با نماد π_j ، $(j = 1, \dots, K)$ نشان داده شده، تعیین کرد.

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=1}^K \pi_i E(q_{i-j}), & \forall j \in \{1, \dots, K\} \\ \sum_{j=1}^K \pi_j = 1, \end{cases} \quad (10)$$

ماتریس انتقال سطح رضایت را با R نشان می‌دهیم. گفتنی است که مقادیر ماتریس انتقال سطح رضایت برای شرایط خارج از کنترل به طور مشابه پس از تعیین مقدار پارامتر α_1 در وضعیت خارج از کنترل و سپس تجدید نظر در مقادیر $E(q_{i-j})$ قابل حصول است. این بدان معناست که برای محاسبه‌ی شاخص متوسط طول دنباله در وضعیت خارج از کنترل بدون نیاز به تعیین مجدد مقدار اوزان مشاهدات، لازم است صرفاً در توزیع احتمال پذیرش اوزان بازنگری شود. پس از تعیین مقادیر f_{ij} به کمک رابطه‌ی ۸، برای محاسبه‌ی مقدار متوسط طول دنباله‌ی نمودار جمع تجمعی در شرایط پایدار از رابطه‌ی ۱۱ استفاده می‌کنیم.

$$ARL_0 = \pi'_{CUSUM} (I - Q_{CUSUM})^{-1} \quad (11)$$

به طوری که π_{CUSUM} بردار احتمالات حدی با ابعاد $m \times 1$ مربوط به شرایط تحت کنترل برای نمودار کنترل جمع تجمعی است. این بردار توسط رابطه‌ی ۱۰ و بعد از جای‌گذاری m به جای K ، و همچنین f_{ij} به جای $E(q_{i-j})$ قابل محاسبه است. گفتنی است بردار احتمالات حدی ماتریس انتقال نمودار جمع تجمعی در شرایط تحت کنترل، برای محاسبه‌ی مقدار متوسط طول دنباله در شرایط خارج از کنترل نیز به نحوی که در ادامه خواهیم دید مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ۱ بردار یکه با ابعاد $m \times 1$ است. Q_{CUSUM} ماتریس انتقال نمودار جمع تجمعی شامل مقادیر f_{ij} ، با ابعاد $m \times m$ است.

حال می‌توان مقدار حد کنترل نمودار (H^+) را برای دست‌یابی به مقدار معینی از متوسط طول دنباله در شرایط تحت کنترل (ARL_0) محاسبه کرد. برای مثال مقدار حد H^+ در مورد یک مشتری با مشخصات داده شده در قبل یعنی $CDV = 0/5$ و به ازای مقادیر پارامترهای مدل که در قبل بیان شد، برای مقدار $ARL_0 = 200$ برابر $2/3252$ به دست می‌آید.

در اینجا یادآور می‌شود که اگرچه نمودار کنترل جمع تجمعی ارائه شده در رابطه‌ی ۶ برای کشف تغییرات افزایشی در پارامتر α_1 معرفی شد، اما می‌توان آماری مشابهی برای کشف تغییرات کاهش‌ی نیز طراحی کرد که چنین محاسبه می‌شود:

$$C_t^- = \min(0, C_{t-1}^- - \omega_t); \quad t = 1, 2, \dots \quad (12)$$

اطلاعات داده شده در قبل در جدول ۱ مقدار شاخص متوسط طول دنباله در وضعیت خارج از کنترل برای تغییراتی که در پارامتر α_1 رخ داده است ارائه می‌شود. این جدول به‌ازای $ARL_0 = 200$ ارائه شده است.

۳. رویکرد دوم: وفاداری مشتری به‌عنوان یک متغیر

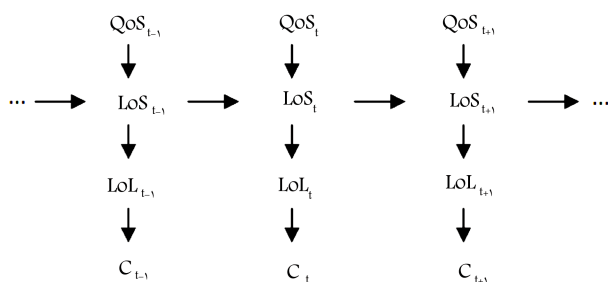
تصادفی‌ترتیبی

در این قسمت، در نظر بگیرید وفاداری همانند میزان رضایت مشتری به‌کمک یک مقیاس ترتیبی با بیش از دو گزینه تعیین شود. در اینجا فرض خواهد شد سطح وفاداری که با نماد LoL_t نشان داده می‌شود براساس یک مقیاس K گزینه‌یی تعریف می‌شود و مقدار L_{jt} ، $(j = 1, \dots, K)$ را می‌پذیرد. مقادیر مذکور یک مقیاس ترتیبی با گزینه‌های مناسب -- شامل دامنه‌ی مقادیر تمایل کامل برای ادامه‌ی خرید از محصول یا استفاده از خدمت تا عدم تمایل کامل برای ادامه‌ی تعامل با عرضه‌کننده -- تشکیل می‌دهند. به‌علاوه در اینجا جدایی مشتری از عرضه‌کننده به‌عنوان رخدادی تلقی می‌شود که احتمال وقوع آن وابسته به سطح وفاداری مشتری است. چگونگی تأثیرگذاری متغیرهای مدل و نحوه‌ی ارتباط آنها در شکل ۴ نشان داده شده است. مطابق نمودار، متغیر C_t به‌عنوان یک متغیر باینری برای نمایش

تحت کنترل، شرایط رفتار مشتری به یک شرایط پایدار منجر شده باشد احتمال قرار گرفتن در هر یک از K سطح رضایت‌مندی برابر با احتمالات حدی ماتریس انتقال خواهند بود. با ایجاد تغییر در پارامتر مورد نظر، مشتری با احتمال مشخصی روند جدید رفتار خود را از هر یک از سطوح رضایت‌مندی آغاز خواهد کرد. این رویه به‌طور معمول در زمان استفاده از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف برای محاسبه‌ی مقدار متوسط طول دنباله به‌هنگام تغییر در مقدار پارامترهای فرایند اعمال می‌شود. اما در اینجا توجه به این نکته لازم است که پس از ایجاد تغییر، برای محاسبه‌ی ماتریس R نمی‌توان بلافاصله توزیع آماری w_t را در شرایط پایدار محاسبه کرد. این مسئله از آنجا ناشی می‌شود که وابستگی دوره‌یی در سطح رضایت مشتری باعث می‌شود تأثیر شرایط قبل تا مدتی در مدل احتمالی رفتار مشتری باقی بماند. بنابراین برای محاسبه‌ی دقیق‌تر مقدار متوسط طول دنباله در شرایط خارج از کنترل از رابطه‌ی ۱۴ استفاده خواهیم کرد.

$$ARL_1 = \pi'_{CUSUM} \left[\sum_{i=1}^T \left(\prod_{j=1}^{i-1} Q_{CUSUM,j} \right) P_{CUSUM,i} + \left(\prod_{j=1}^{T-1} Q_{CUSUM,j} \right) [T(I - Q_{CUSUM} + Q_{CUSUM})(I - Q_{CUSUM})^{-1} P_{CUSUM}] \right] \quad (14)$$

به‌طوری‌که I ماتریس همانی با ابعاد $m \times m$ بوده، بردار $P_{CUSUM,j}$ و همچنین P_{CUSUM} برداری با ابعاد $m \times 1$ است که نشان‌دهنده‌ی احتمال وقوع وضعیت خارج از کنترل در مرحله‌ی بعد از شروع از هر یک از m حالت متصور در وضعیت تحت کنترل است. در این رابطه پس از ایجاد تغییر در پارامتر طراحی به‌جای استفاده مستقیم از رابطه‌ی ۱۱ که برای محاسبه‌ی ARL معرفی شد برای تعداد دوره‌ی مشخص T ، ماتریس انتقال آماری جمع تجمعی به‌طور مستقیم در محاسبات در نظر گرفته می‌شود و سپس با استفاده از محاسبه‌ی حد مجموع یک سری هندسی، در بقیه‌ی دوره‌ها از ماتریس انتقال ثابت استفاده می‌کنیم. این بدان معناست که تا رسیدن مجدد به وضعیت پایدار پس از ایجاد تغییر لازم است ماتریس انتقال نمودار کنترل جمع تجمعی به‌صورت دوره به دوره محاسبه شود. برای نمونه، براساس



شکل ۴. ارتباط بین متغیرهای مدل شامل کیفیت خدمت، سطح رضایت و سطح وفاداری در رویکرد دوم.

جدول ۱. مقادیر متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترل جمع تجمعی برای کشف تغییر در مقدار ضریب α_1 در ماتریس انتقال رضایت برای یک مشتری با $CDV = 0.5$.

$\frac{ARL_U^m \cdot ARL_D^m}{ARL_U^m + ARL_D^m}$	$ARL_{Downward}^{modified}$	$ARL_{Upward}^{modified}$	$\frac{ARL_U^0 \cdot ARL_D^0}{ARL_U^0 + ARL_D^0}$	$ARL_{Downward}^{ordinary}$	$ARL_{Upward}^{ordinary}$	$\Delta = \alpha_1^{Oc} / \alpha_1^{c}$
۱۴,۸۲	۲۳,۰۶	—	۳۱,۰۲	۳۱,۰۲	—	۰,۵
۲۲,۸۹	۲۳,۳۸	—	۳۰,۹۳	۳۰,۹۲	—	۰,۶
۲۴,۹۶	۲۴,۹۸	—	۳۱,۸۲	۳۱,۸۲	—	۰,۷
۲۹,۸۶	۲۹,۸۶	—	۳۵,۶۲	۳۵,۶۲	—	۰,۸
۴۷,۴۸	۴۷,۷۲	—	۵۱,۲۹	۵۱,۵۸	—	۰,۹
۱۰۰,۲۲	۲۰۰,۰۹	۲۰۰,۸۱	۱۰۰,۱۸	۲۰۰,۰۰	۲۰۰,۷۲	۱
۱۳,۹۸	—	۱۴,۰۱	۱۰,۶۱	—	۱۰,۶۳	۱,۱
۷,۰۴	—	۷,۰۴	۵,۶۰	—	۵,۶۰	۱,۲
۵,۰۶	—	۵,۰۶	۵,۲۳	—	۵,۲۳	۱,۳
۴,۲۵	—	۴,۲۵	۵,۱۷	—	۵,۱۷	۱,۴
۳,۸۶	—	۳,۹۲	۵,۱۶	—	۵,۱۶	۱,۵

است. در این رابطه ω_j ، $(j = 1, \dots, K)$ ، مقادیر عرض از مبدأ را نشان می‌دهد که در حضور محدودیت $\omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_K$ تعریف شده و ω_1 مقدار ضربی است که بیانگر چگونگی تأثیر پارامتر مشخصه مشتری بر احتمال جدایی اوست.

خاطر نشان می‌سازد همچون قسمت ۲، می‌توان با استفاده از داده‌های رضایت‌سنجی برای برآورد پارامترهای مدل با استفاده از روش بیشترین درست‌نمایی اقدام کرد. درخصوص نحوه‌ی محاسبه‌ی تابع درست‌نمایی در مطالعات موجود^[۱۷] توضیح داده شده است. قبل از بحث درباره‌ی روش طراحی نمودار کنترل برای پایش سطح وفاداری مشتری، یادآور می‌شود که رابطه‌ی مورد نیاز برای تعیین توزیع پسین پارامتر θ پس از دریافت آخرین مشاهده از رفتار مشتری در ضمیمه ارائه شده است.

۱.۳. طراحی نمودار کنترل جمع تجمعی در سطح انفرادی

با چشم‌پوشی از بیان مجدد مطالب مقدماتی که در بخش ۱.۲ مطرح شد در اینجا بر اساس مدل ارائه شده برای ارتباط متغیرهای رضایت و وفاداری مشتری در شکل ۴، درباره‌ی نحوه‌ی طراحی نمودار جمع تجمعی با هدف کشف تغییر در سطح وفاداری مشتری توضیح داده می‌شود. یادآور می‌شود که برای این منظور، با رجوع به رابطه‌ی ۱۶، پارامتر β_1 را که بیانگر میزان تأثیرپذیری درجه وفاداری مشتری از سطح رضایت‌مندی اوست به‌عنوان پارامتر طراحی نمودار جمع تجمعی انتخاب کرده و برای کشف تغییرات افزایشی در مقدار مفروض این پارامتر، از آماره‌ی نمودار جمع تجمعی که توسط رابطه‌ی ۶ معرفی شد استفاده می‌کنیم. چون در این قسمت نمودار کنترل برای یک مشتری خاص طراحی می‌شود، در ادامه از به کار بردن اندیس مشخصه‌ی مشتری خودداری می‌شود.

در رابطه‌ی ۶، ω_t نشان‌گر وزن تخصیص یافته به مشاهده در زمان t است و در اینجا به شکل $\omega_t = \log [L(\beta_1^{0c}; (LoS_t, LoL_t)) / L(\beta_1^{1c}; (LoS_t, LoL_t))]$ محاسبه می‌شود که در آن β_1^{0c} و β_1^{1c} به ترتیب مقادیر تحت کنترل و خارج از کنترل برای پارامتر طراحی نمودار جمع تجمعی هستند. در حقیقت β_1^{0c} مقدار پیش‌فرض برای حالت خارج از کنترل است که علاقه‌مندیم وقوع این تغییر در سریع‌ترین زمان ممکن کشف شود. بدین ترتیب ω_t بیانگر لگاریتم نسبت درست‌نمایی داده‌ی دوره‌ی t برای مشتری مورد نظر به‌ازای وضعیت خارج از کنترل پیش‌فرض و وضعیت تحت کنترل است.

برای استفاده از نمودار جمع تجمعی، در هر دوره پس از دریافت داده‌های رضایت و وفاداری مشتری، مقدار وزن مشاهده محاسبه می‌شود و مطابق رابطه‌ی ۶، در رابطه‌ی مربوط به نمودار جمع تجمعی قرار داده می‌شود. مادامی که مقدار آماره‌ی جمع تجمعی در فضای تحت کنترل که با ناحیه‌ی $[0, H_t^+]$ مشخص شده است قرار گیرد وضعیت طبیعی رفتار مشتری بدون تغییر تلقی خواهد شد. تعیین حد کنترل H_t^+ منوط به در نظر گرفتن مقداری مشخص برای شاخص متوسط طول دنباله در وضعیت طبیعی، یعنی ARL_0 است. ما در اینجا از روش مدل‌سازی زنجیره‌ی مارکوف برای محاسبه‌ی شاخص متوسط طول دنباله استفاده می‌کنیم.

برای استفاده از رویکرد مدل‌سازی زنجیره‌ی مارکوف، پس از تقسیم فضای $[0, H_t^+]$ به ناحیه با طول برابر، از رابطه‌ی ۸ برای محاسبه‌ی ماتریس انتقال به‌منظور جابه‌جایی آماره‌ی جمع تجمعی طی دو پرئود متوالی t و $t+1$ استفاده می‌شود. در اینجا چنانچه مطابق رابطه‌ی ۱۸ نحوه‌ی محاسبه‌ی وزن مشاهده در نمودار جمع تجمعی را در نظر بگیریم، متوجه خواهیم شد که توزیع وزن مشاهدات یک توزیع گسسته با $K \times K$ مقدار مجزاست که نحوه‌ی محاسبه‌ی احتمالات

رخداد جدایی یا ادامه‌ی تعامل با سازمان انتخاب شده و از سطح وفاداری مشتری تأثیر می‌پذیرد.

در ادامه به تشریح روابط ریاضی متغیرها می‌پردازیم. از آنجا که روند پویای تغییرات رضایت مشتری و تأثیرپذیری آن از کیفیت خدمت ارائه شده همچون قسمت ۲ در نظر گرفته می‌شود، برای جلوگیری از تکرار مطلب، از بیان مدل مربوط به تعیین سطح متغیر LoS_t خودداری، و به ذکر این نکته بسنده می‌شود که به‌منظور تعریف روند تغییرات رضایت‌مندی روابط ریاضی مورد نیاز در قسمت ۲ طی روابط ۱ تا ۳ ارائه شده است. همچنین رابطه‌ی ۴ نحوه‌ی مدل‌سازی میزان رضایت مشتری را در پایان اولین دوره از شروع تعامل با سازمان بیان می‌کند. در ادامه برای بیان رابطه‌ی تابعی رضایت و وفاداری مشتری، از رابطه‌ی ۱۵ استفاده می‌کنیم.

$$p_{i|t} = P(LoL_t = i' | LoS_t = i, CDV, a_{rt}, \theta_t); \quad (15)$$

$$i, i' = 1, 2, \dots, K$$

به طوری که $p_{i|t}$ بیانگر احتمال کسب سطح وفاداری i' ، $(i' = 1, \dots, K)$ برای مشتری با سطح رضایت‌مندی i ، $(i = 1, \dots, K)$ ، در دوره‌ی زمانی t است. بیان ریاضی مربوطه به‌کمک مدل رگرسیون لجستیک ترتیبی توسط رابطه‌ی ۱۶ ارائه شده است.

$$p_{i|t} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_{.i} + \beta_1 \times i + CDV' \beta_t + a_{rt}' \beta_t + \theta_t)}}$$

$$p_{ij|t} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_{.j} + \beta_1 \times j + CDV' \beta_t + a_{rt}' \beta_t + \theta_t)}}$$

$$p_{ikt} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-(\beta_{.j-k} + \beta_1 \times (j-k) + CDV' \beta_t + a_{rt}' \beta_t + \theta_t)}}$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 2, \dots, K - 1 \quad (16)$$

به طوری که $\beta_{i'}$ ، $(i' = 1, \dots, K - 1)$ پارامترهای عرض از مبدأ مدل و β_1 بیانگر میزان تأثیرپذیری سطح وفاداری به‌ازای سطوح مختلف رضایت‌مندی مشتری است که با i ، $(i = 1, \dots, K)$ ، نشان داده شده است. ضرایب β_2 و β_3 سایر پارامترهای مدل را نشان می‌دهد. شایان توجه است که در اینجا بدون لطمه به کلیت مسئله تحت بررسی، تعداد سطوح مورد نیاز برای سنجش مقدار وفاداری همچون متغیر رضایت مشتری برابر با K فرض شده است.

در ادامه به بررسی سطح آخر شکل ۴ یعنی رابطه‌ی متغیر C_t ، به‌عنوان تمایل یا عدم تمایل مشتری برای ادامه تعامل با سازمان در پایان دوره‌ی t ام، با سطح وفاداری مشتری یعنی متغیر LoL_t می‌پردازیم. با پذیرش این فرضیه‌ی منطقی که تصمیم مشتری مبنی بر قطع تعامل یا ادامه‌ی خرید به‌عنوان یک متغیر باینری، تابعی از سطح وفاداری او خواهد بود، مطابق رابطه‌ی ۱۷ از مدل ریاضی مناسب برای نمایش وابستگی مذکور استفاده می‌شود. این وابستگی بر این اساس که در صورت قطع همکاری مشتری با سازمان مقدار C_t برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر خواهد بود، با استفاده از مدل رگرسیون لجستیک در این رابطه نشان داده شده است.

$$w_{jt} = P(C_t = 1 | LoL_t = j, CDV, \theta_t)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-(\omega_{.j} + CDV' \omega_{.j} + \theta_t)}}; \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (17)$$

در رابطه‌ی ۱۷ احتمال تمایل مشتری برای خرید مجدد به‌صورت تابعی از سطح وفاداری او، خصوصیات مشهود و پارامترهای نامعلوم مربوط به مشتری ارائه شده

مربوطه در ادامه توضیح داده خواهد شد.

$$\begin{aligned} \omega_t &= \log \left[\frac{L(\beta_{\lambda}^{Oc}; (LoS_t, LoL_t))}{L(\beta_{\lambda}^{Ic}; (LoS_t, LoL_t))} \right] \\ &= \log \left[\frac{E_{\theta}(q_{LoS_{t-1} \rightarrow LoS_t, t}) E_{\theta}(p_{LoS_t, LoL_t, t}^{Oc})}{E_{\theta}(q_{LoS_{t-1} \rightarrow LoS_t, t}) E_{\theta}(p_{LoS_t, LoL_t, t}^{Ic})} \right] \\ &\quad \times \frac{E_{\theta}(\lambda - w_{LoL_t, t})}{E_{\theta}(\lambda - w_{LoL_t, t})} = \log \left[\frac{E_{\theta}(p_{LoS_t, LoL_t, t}^{Oc})}{E_{\theta}(p_{LoS_t, LoL_t, t}^{Ic})} \right] \\ &= \log \left[\frac{\int_0^{\lambda} p_{LoS_t, LoL_t, t}^{Oc} g(\theta_t | r, s) d\theta_t}{\int_0^{\lambda} p_{LoS_t, LoL_t, t}^{Ic} g(\theta_t | r, s) d\theta_t} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

به طوری که با توجه به رابطه‌ی ۱۶ $p_{ij_t}^{Oc}$ و $p_{ij_t}^{Ic}$ ($i, j = 1, \dots, K$) به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مقدار احتمال مربوط به مشاهده مورد نظر به‌ازای مقادیر β_{λ}^{Oc} و β_{λ}^{Ic} هستند.

با در نظر گرفتن رابطه‌ی ۱۶، صرف‌نظر از متغیر a_{rt} که بیان‌گر نوع اقدام بازاربایی در دوره‌ی t است، مقدار متغیر ω_t تابعی از متغیرهای LoS_t و CDV است که از این بین با تمرکز بر یک مشتری خاص متغیر CDV دارای مقدار مشخصی خواهد بود. بنابراین توزیع آماری ω_t با توجه به حضور متغیر LoS_t ، توسط یک توزیع گسسته شامل $K \times K$ مقدار مختلف قابل تعریف است. پس از تعیین مقادیر ممکن آماری ω_t ، لازم است مقدار احتمال پذیرش هر یک از این مقادیر نیز محاسبه شود. برای این منظور تعیین احتمال وقوع $K \times K$ رخداد، که از تلاقی دو متغیر LoS_t و LoL_t حاصل می‌شود، ضرورت می‌یابد. در اینجا، درگام اول با استفاده از معادله‌ی ۱۰ مقدار احتمالات حدی برای ماتریس انتقال سطح رضایت مشخص می‌شود و در مرحله‌ی بعد از طریق ضرب بردار حاصله در ماتریس احتمالات رابطه‌ی ۱۶، توزیع احتمال آماری ω_t تعیین می‌شود. در این روش ابتدا از رابطه‌ی:

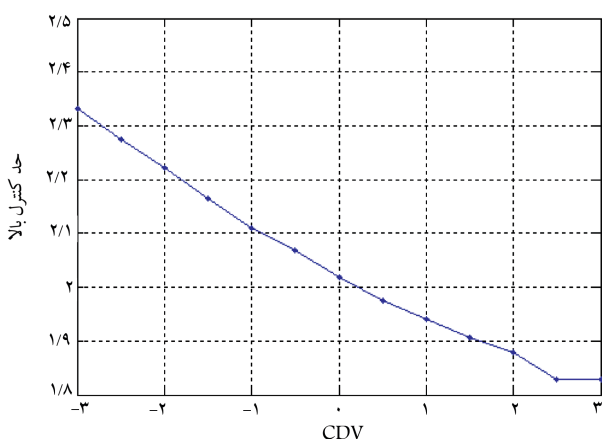
$$E(q_{i \rightarrow j}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\lambda} q_{i \rightarrow j} g(\theta | r, s) h(QoS | \mu_{QoS}, \sigma_{QoS}) d\theta dQoS, \quad (i, j = 1, \dots, K)$$

برای جای‌گذاری در رابطه‌ی ۱۰ و در مرحله بعد از رابطه‌ی:

$$E(p_{ji}) = \int_0^{\infty} p_{ji} g(\theta | r, s) d\theta, \quad (j, l = 1, \dots, K)$$

برای محاسبه‌ی مؤلفه‌های ماتریس احتمالات استفاده می‌شود. بدین ترتیب با در اختیار داشتن مقادیر وزن مشاهدات در آماری جمع تجمعی و توزیع احتمال مربوطه می‌توان ماتریس انتقال مورد نیاز در روش مدل‌سازی زنجیره‌ی مارکوف را تکمیل کرد. نحوه‌ی محاسبه‌ی مقدار شاخص متوسط طول دنباله در وضعیت تحت کنترل توسط رابطه‌ی ۱۱ شرح داده شد و در اینجا از تشریح مجدد جزئیات خودداری می‌شود.

حال با توجه به نحوه‌ی محاسبه‌ی شاخص متوسط طول دنباله که تشریح شد، می‌توان مقدار حد کنترل نمودار (H^+) را برای دست‌یابی به مقدار مطلوب متوسط طول دنباله در شرایط تحت کنترل (ARL_0) محاسبه کرد. در شکل ۵ مقدار حد H^+ در برابر مقادیر مختلف پارامتر مشخصه مشتری (CDV) نشان داده شده است. این نمودار به‌ازای مقدار $ARL_0 = 200$ محاسبه شده و تعداد نواحی فضای تحت کنترل برای انجام محاسبات در روش زنجیره‌ی مارکوف یعنی m برابر با ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است.



شکل ۵. رابطه‌ی حد کنترل نمودار کنترل جمع تجمعی (H^+) برای دست‌یابی به مقدار مطلوب $ARL_0 = 200$ در مقابل مقدار امتیاز مشخصه مشتری (CDV) در دامنه $[-3, +3]$ با اندازه گام $(m = 1000, 0.1)$.

همچون قسمت ۱.۲، چنانچه علاقه‌مند به کشف تغییرات کاهششی در مقدار پارامتر مورد نظر باشیم می‌توان با استفاده از رابطه‌ی ۱۲ برای محاسبه‌ی آماری جمع تجمعی اقدام کرد. در این مورد نیز، برای محاسبه‌ی مقدار متوسط طول دنباله در شرایط تحت کنترل و همچنین به‌منظور محاسبه‌ی مقدار حد کنترل نمودار که با نماد H^- نشان‌دهنده می‌شود می‌توان از رویه‌ی مدل‌سازی زنجیره‌ی مارکوف به‌طور مشابه استفاده کرد.

در اینجا با توجه به این که در قسمت ۱.۲، درباره‌ی نحوه‌ی محاسبه‌ی شاخص متوسط طول دنباله در زمان استفاده‌ی همزمان از دو نمودار جمع تجمعی -- یکی برای کشف تغییرات افزایشی و یکی برای کشف تغییرات کاهششی -- توضیحات لازم ارائه شده است، به ذکر این نکته بسنده می‌کنیم که برای محاسبه‌ی شاخص متوسط طول دنباله در شرایط خارج از کنترل می‌توان مستقیماً از رابطه‌ی ۱۱ استفاده کرد به طوری که در آن π_{CUSUM} همان بردار احتمالات حدی ماتریس انتقال نمودار جمع تجمعی در وضعیت تحت کنترل است اما Q_{CUSUM} برای شرایط خارج از کنترل باید مجدداً محاسبه شود. در واقع تفاوت در این نکته است که در شرایط خارج از کنترل، توزیع احتمالی وزن مشاهدات تغییر می‌یابد.

در اینجا برای توضیح از یک نمونه‌ی عددی استفاده می‌کنیم. برای مثال، در حالتی که $K = 5$ در نظر گرفته شود، چنانچه اطلاعات یک مشتری خاص به‌صورت $CDV = 0.5$ ارائه شده باشد و پارامترهای توزیع متغیر θ به‌صورت $r = 3$ و $s = 3$ منظور شود، دو نمودار شکل‌های ۶ و ۷ توزیع احتمال وزن مشاهدات را در دو وضعیت که مقدار پارامتر β_1 دچار تغییر شده است در کنار توزیع اوزان در وضعیت تحت کنترل نشان می‌دهد. در این مورد، مشابه قسمت ۱.۲، مقدار ضرایب مدل رگرسیون لجستیک ترتیبی در رابطه‌ی ۱۶ برابر با $\beta_{0,1} = 3.94$ ، $\beta_{0,2} = 7.55$ ، $\beta_{0,3} = 11.02$ ، $\beta_{0,4} = 14.62$ ، $\beta_{0,5} = -3.09$ ، $\beta_{1,1}^c = 0.2$ و $\beta_{1,2}^c = 0.2$ منظور شده است.

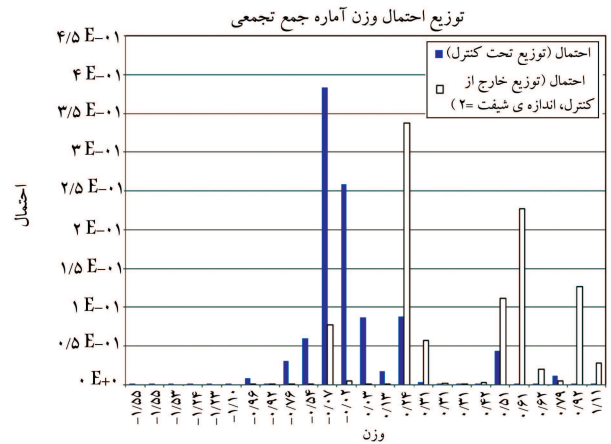
بنابراین می‌توان با محاسبه‌ی مجدد ماتریس انتقال نمودار کنترل جمع تجمعی (Q_{CUSUM}) ، براساس توزیع احتمال جدید، مقدار شاخص متوسط طول دنباله را با استفاده از رابطه‌ی ۱۱ محاسبه کرد. در نهایت برای ارزیابی عملکرد نمودار جمع تجمعی با هدف کشف تغییرات کاهششی یا افزایشی در پارامتر طراحی نمودار (β_1) ، در جدول ۲ مقادیر شاخص متوسط طول دنباله برای کشف تغییرات مشخص شده ارائه شده است. مقدار متوسط طول دنباله در اینجا با استفاده از رویکرد مدل‌سازی

جدول ۲. مقادیر متوسط طول دنباله برای نمودار کنترل جمع تجمعی برای کشف تغییر پارامتر β_1 ($\beta_1^{OC} = \Delta \times \beta_1^{IC}$) در رابطه رضایت - وفاداری برای یک مشتری با $CDV = 0,5$ ، $H^+ = 1,9729$ و $H^- = -1,9170$.

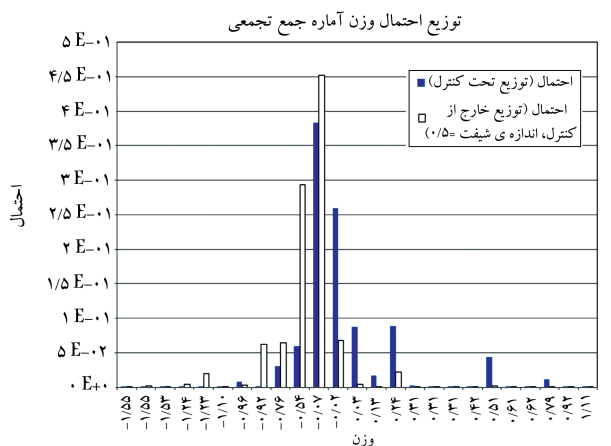
$\frac{ARLU \cdot ARLD}{ARLU + ARLD}$	$ARL_{Downward}$	SRL_{Upward}	Δ
6,50	6,50	--	0,5
11,81	11,81	--	0,75
15,10	15,10	--	0,8
34,49	34,84	--	0,9
65,82	72,17	--	0,95
100,28	202,17	198,96	1
35,31	--	35,68	1,1
15,25	--	15,25	1,2
5,73	--	5,73	1,5
4,03	--	4,03	2

وفاداری مشتریان از طریق برنامه رضایت‌سنجی مناسب در دوره‌های زمانی منظم گردآوری و گزارش می‌شود. این مقاله در دو بخش اصلی که بر پایه روش ثبت داده‌های وفاداری مشتری تشکیل شده‌اند، نحوه طراحی و ارزیابی عملکرد نمودار کنترل جمع تجمعی مورد بررسی قرار گرفت. در بخش اول موضوع پیش سطح رضایت مشتری و در بخش دوم موضوع پیش درجه وفاداری مورد توجه قرار گرفت. در هر دو قسمت از مدل رگرسیون لجستیک برای توضیح رابطه رضایت و وفاداری مشتریان استفاده شد و فرض شده است رضایت مندی مطابق مدل همبستگی با تأخیر زمانی یک واحد تغییر می‌یابد. محاسبه آماری جمع تجمعی در هر لحظه پس از دریافت آخرین مشاهده از میزان رضایت، وفاداری مشتری در لحظه قبل -- با استفاده از توزیع احتمالی به‌روزرسانی شده برای پارامتر بخش نامشهود اطلاعات مشتری ممکن بوده و این موضوع دستاورد اصلی مقاله برای ایجاد امکان پیش روند تغییرات نوع نگرش مشتری در سطح انفرادی بر مبنای داده‌ی در دسترس از رفتار خاص هر مشتری است. توزیع پیشین برای پارامتر اطلاعات نامشهود یک توزیع بتا در نظر گرفته شد و توزیع پسین در هر لحظه براساس مشاهدات تا لحظه قبل به کمک قاعده بیز تعیین و برای تسهیل محاسبات با توزیع بتای مناسب تقریب زده می‌شود.

معیار متوسط طول دنباله در دو وضعیت تحت کنترل و خارج از کنترل مطابق رویکرد زنجیره‌ی مارکوف و براساس تعیین توزیع احتمالی آماره نسبت درست‌نمایی به عنوان وزن مشاهدات در نمودار جمع تجمعی محاسبه شد. این رویکرد امکان محاسبه مقدار حد کنترل را مطابق با شرایط منحصر به فرد هر مشتری فراهم کرده که این موضوع به عنوان دستاورد دیگر مقاله قابل طرح است. پس از تعیین حد کنترل، نمونه‌ی از نتایج مربوط به کشف تغییرات در رابطه رضایت - وفاداری در جداول ۱ و ۲ ارائه شده و مورد بحث قرار گرفت.



شکل ۶. توزیع وزن مشاهدات در آماری جمع تجمعی در وضعیت خارج از کنترل برای یک مشتری خاص با $CDV = 0,5$ ($\beta_1^{OC} = 2 \times \beta_1^{IC}$)



شکل ۷. توزیع وزن مشاهدات در آماری جمع تجمعی در وضعیت خارج از کنترل برای یک مشتری خاص با $CDV = 0,5$ ($\beta_1^{OC} = 0,5 \times \beta_1^{IC}$)

زنجیره‌ی مارکوف محاسبه شده است. این نمودار کنترل برای یک مشتری خاص با ویژگی $CDV = 0,5$ ، و به ازای $\beta_1^{OC} = 1,1 \times \beta_1^{IC}$ برای نمودار جمع تجمعی یکطرفه‌ی بالا و $\beta_1^{OC} = 0,9 \times \beta_1^{IC}$ برای نمودار جمع تجمعی یکطرفه‌ی پایین طراحی شده است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله با توجه به اهمیت روزافزون پیش به‌هنگام شاخص‌های نظام مدیریت ارتباط با مشتری، روش طراحی نمودار کنترل جمع تجمعی برای دو متغیر وفاداری و رضایت مندی مشتری بر مبنای یک مدل مفروض برای روند تغییرات دو شاخص مذکور و براساس به‌کارگیری داده‌هایی که معمولاً از طریق روش‌های متداول رضایت‌سنجی مشتری قابل دسترسی است ارائه شد. دریافت سیگنال هشدار در سریع‌ترین زمان ممکن در صورت بروز تغییر در الگوی رفتار طبیعی مشتری با هدف بهبود سیاست‌های مدیریت ارتباط با مشتری به‌عنوان ضرورت پرداختن به موضوع تحقیق در این مقاله به‌شمار می‌رود.

در طراحی نمودار کنترل، وجود رابطه‌ی تابعی بین دو متغیر رضایت و وفاداری مشتری مورد توجه قرار گرفت. فرض شده است مشاهدات مربوط به سطح رضایت

در پایان می‌توان از عدم به‌کارگیری داده‌های واقعی برای اعتبارسنجی مدل مفروض برای تغییرات شاخص رضایت و وفاداری مشتری که تا حد زیادی متأثر از مضیقه زمانی برای انجام تحقیق است به‌عنوان یکی از محدودیت‌های مقاله‌ی حاضر نام برد. همچنین استفاده از مدل رگرسیون بیزی که در صورت عدم وجود داده‌های مستقیم برای سطح رضایت و وفاداری مشتری یا در صورت بروز داده‌ی مفقوده، امکان برآورد سطح واقعی رضایت‌مندی را به‌کمک شواهدی همچون زمان بین دو خرید متوالی یا میزان مصرف مشتری در دوره زمانی معین فراهم می‌سازد به‌عنوان مسیر توسعه‌ی مطالعه حاضر مورد توجه نویسندگان مقاله است.

به‌طور کلی، چنان که پیش از این توضیح داده شد هنگامی که عرضه‌کننده علاقه‌مند به پایش رفتار یک مشتری یا تعدادی از مشتریانش به شکلی دقیق‌تر باشد، می‌توان مشابه طریقی که در این مقاله پیشنهاد شد از روش‌های کنترل با حساسیت بالا همچون نمودارکنترل جمع تجمعی که از توانایی کشف تغییرات کوچک در پارامترهای فرایند برخوردار است استفاده کرد. اگرچه شناسایی نقطه‌ی تغییر در مدل طبیعی رفتار مشتری در این مقاله مورد بررسی قرار نگرفت اما تخمین نقطه‌ی تغییر از جمله قابلیت‌های جالب توجه و یکی از علل تمایل محققین برای استفاده از نمودارکنترل جمع تجمعی است.

منابع (References)

1. Aghaie A., Shahriari H. and Samimi Y. "Monitoring customer loyalty on the basis of a time series model for ordered categorical data", Working Paper, Industrial Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology (2012).
2. Fornell, C., Johnson, M.D., Anderson, E.W., Cha, J. and Bryant, B.E. "The American customer satisfaction index: Nature, purpose, and findings", *Journal of Marketing*, **60**(4), pp. 7-18 (1996).
3. Johnson, M.D., Gustafsson, A., Andreassen, T. W., Lervik, L. and Cha J. "The evolution and future of national customer satisfaction index models", *Journal of Economic Psychology*, **22**, pp. 217-245 (2001).
4. Kim, M.-K., Park, M.-C. and Jeong, D.-H. "The effects of customer satisfaction and switching barrier on customer loyalty in Korean mobile telecommunication services", *Telecommunications Policy*, **28**, pp. 145-159 (2004).
5. Kim, H.-S. and Yoon, C.-H. "Determinants of subscriber churn and customer loyalty in the Korean mobile telephony market", *Telecommunications Policy*, **28**, pp. 751-765 (2004).
6. Ahn, J.-H., Han, S.-P. and Lee, Y.-S. "Customer churn analysis: Churn determinants and mediation effects of partial defection in the Korean mobile telecommunications service industry", *Telecommunications Policy*, **30**, pp. 552-568 (2006).
7. Bolton, R.N. "A dynamic model of the duration of the customer's relationship with a continuous service provider: The role of satisfaction", *Marketing Science*, **17**(1), pp. 45-65 (1998).
8. Mavri, M. and Ioannou, G. "Customer switching behavior in Greek banking services using survival analysis", *Managerial Finance*, **34**(3), pp. 186-197 (2008).
9. Samimi, Y., Aghaie, A. and Tarokh, M.J. "Analysis of ordered categorical data to develop control charts for monitoring customer loyalty", *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **26**(6), pp. 668-688 (2010).
10. Jiang, W., Au, T. and Tsui, K.-L. "A statistical process control approach to business activity monitoring", *IIE Transactions*, **39**, pp. 235-249 (2007).
11. Tsung, F., Zhou, Z. and Jiang, W. "Applying manufacturing batch techniques to fraud detection with incomplete customer information", *IIE Transactions*, **39**, pp. 671-680 (2007).
12. Ye, N. and Chen, Q. "Attack-norm separation for detecting attack-induced quality problems on computers and networks", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**, pp. 545-553 (2007).
13. Impellizzeri, F.M., Bizzini, M., Leunig, M., Maffioletti, N.A. and Mannion, A.F. "Money matters: Exploiting the data from outcomes research for quality improvement initiatives", *European Spine Journal*, **18**(3), pp. 348-359.
14. Kenett, R.S., Deldossi, L. and Zappa, D. "Quality standards and control charts applied to Customer surveys", in *Modern Analysis of Customer Surveys: With Applications Using R* (eds R. S. Kenett and S. Salini), John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK. doi: 10.1002/9781119961154.ch20 (2011).
15. Hayes, B.E., *Measuring Customer Satisfaction, Development and Use of Questionnaires*, ASQ Quality Press, USA (1992).
16. Montoya, R., Netzer, O. and Jedidi, K. "Dynamic allocation of pharmaceutical detailing and sampling for long-term profitability", *Marketing Science*, DOI: 10.1287, **29**(5), pp.909-924 (2010).
17. Samimi, Y. "Integrating statistical process control (SPC) techniques and probability models to develop model-based monitoring methods for customer usage behavior", PhD Dissertation, Chapter 3, K.N. Toosi University of Technology, Iran (2011).
18. Hawkins, D.M. and Olwell, D.H., *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*, Springer-Verlag New York, Inc (1998).
19. Moustakides, G.V. "Optimal stopping times for detecting changes in distributions", *The Annals of Statistics*, **14**, pp. 1379-1387 (1986).
20. Brook, D. and Evans, D.A. "An approach to the probability distribution of CUSUM run length", *Biometrika*, **59**, pp. 539-549 (1972).
21. Reynolds, M.R. and Stoumbos, Z.G. "A CUSUM chart for monitoring a proportion when inspecting continuously", *Journal of Quality Technology*, **31**(1), pp. 87-108 (1999).

۱. مدل سطح رضایت در پایان اولین دوره

در خصوص رابطه‌ی ۴، مدل رگرسیون لجستیک ترتیبی برای تعریف پارامتر γ_i ، $(i = 1, \dots, K)$ ، که بیانگر احتمال کسب سطح رضایت i در پایان اولین دوره ارتباط با عرضه‌کننده است چنین استفاده می‌شود:

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + e^{-(\eta_{\cdot 1} + CDV' \eta_1 + \eta_r QoS_{i+1} + a'_{i+1} \eta_r + \theta_t)}}$$

$$\gamma_j = \frac{1}{1 + e^{-(\eta_{\cdot j} + CDV' \eta_1 + \eta_r QoS_{i+1} + a'_{i+1} \eta_r + \theta_t)}}$$

$$- \frac{1}{1 + e^{-(\eta_{\cdot j-1} + CDV' \eta_1 + \eta_r QoS_{i+1} + a'_{i+1} \eta_r + \theta_t)}}$$

$$\gamma_K = 1 - \frac{1}{1 + e^{-(\eta_{\cdot K-1} + CDV' \eta_1 + \eta_r QoS_{i+1} + a'_{i+1} \eta_r + \theta_t)}}$$

$$j \in \{2, \dots, K-1\} \quad (\text{ض } ۱)$$

به طوری که $\eta_{\cdot i}$ ، $(i = 1, \dots, K)$ ، مقادیر عرض از مبدا و η_j ، $(j = 1, \dots, 3)$ سایر ضرایب مدل را نشان می‌دهد.

۲. به‌هنگام‌سازی توزیع پارامتر θ در مدل اول

توزیع پیشین برای پارامتر θ ، در روابط ۳ تا ۵ یک توزیع بتای محدود به دامنه‌ی صفر و ۱ با پارامترهای مشخص r و s در نظر گرفته می‌شود که تابع چگالی آن توسط رابطه‌ی زیر نشان داده شده است.

$$g(\theta|r, s) = \frac{1}{B(r, s)} \theta^{r-1} (1-\theta)^{s-1};$$

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad r > 0, \quad a > 0 \quad (\text{ض } ۲)$$

به طوری که $B(r, s)$ بیانگر تابع بتا است و به صورت $B(r, s) = \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx$ یا با استفاده از تابع گاما به شکل $B(r, s) = \Gamma(r)\Gamma(s)/\Gamma(r+s)$ قابل محاسبه است. در اینجا نحوه‌ی به‌روزرسانی توزیع احتمالی پارامتر θ پس از دریافت آخرین مشاهده از رفتار مشتری ارائه می‌شود. برای این منظور تابع درست‌نمایی مشاهدات با استفاده از قاعده‌ی بیز برای توزیع احتمال θ در دوره $t+1$ براساس توزیع پیشین در دوره‌ی t و مشاهده‌ی حاصل از رضایت‌سنجی به کار برده می‌شود.

$$g_i(\theta_{t+1}) = \frac{g_i(\theta_t) l_{i,t}(\theta_t | LoS_{i,t+1}, LoL_{i,t+1})}{l_{i,t}(r_t, s_t | LoS_{i,t+1}, LoL_{i,t+1})}$$

$$= \frac{g_i(\theta_t) \left[\begin{array}{c} q_{LoS_{i,t} \rightarrow LoS_{i,t+1,t+1}} \\ \times p_{LoS_{i,t+1}, LoL_{i,t+1,t+1}} \\ (W_{LoL_{i,t+1,t+1}})^{C_{i,t+1}} \\ \times (1 - W_{LoL_{i,t+1,t+1}})^{1-C_{i,t+1}} \end{array} \right]}{\int_0^1 \left\{ \left[\begin{array}{c} q_{LoS_{i,t} \rightarrow LoS_{i,t+1,t+1}} \\ \times p_{LoS_{i,t+1}, LoL_{i,t+1,t+1}} \\ (W_{LoL_{i,t+1,t+1}})^{C_{i,t+1}} \\ \times (1 - W_{LoL_{i,t+1,t+1}})^{1-C_{i,t+1}} \end{array} \right] \times g_i(\theta_t | r_t, s_t) d\theta_t \right\}}$$

$$= \frac{g_i(\theta_t) \left[\begin{array}{c} q_{LoS_{i,t} \rightarrow LoS_{i,t+1,t+1}} \\ (p_{LoS_{i,t+1,t+1}})^{LoL_{i,t+1}} \\ \times (1 - p_{LoS_{i,t+1,t+1}})^{1-LoL_{i,t+1}} \end{array} \right]}{\int_0^1 \left\{ \left[\begin{array}{c} q_{LoS_{i,t} \rightarrow LoS_{i,t+1,t+1}} \\ (p_{LoS_{i,t+1,t+1}})^{LoL_{i,t+1}} \\ \times (1 - p_{LoS_{i,t+1,t+1}})^{1-LoL_{i,t+1}} \end{array} \right] \times g_i(\theta_t | r_t, s_t) d\theta_t \right\}} \quad (\text{ض } ۳)$$

که در آن $l_{i,t}(\theta)$ بیانگر تابع درست‌نمایی مشاهدات است که توضیحات مربوط به نحوه‌ی محاسبه‌ی آن در دسترس است.^[۱۷] از آنجا که تابع چگالی حاصل پس از

عملیات به‌روزرسانی و بعد از جای‌گذاری روابط ۳ و ۵ دارای شکل ریاضی قابل خلاصه‌سازی نیست و این امر به پیچیدگی محاسبات و همچنین طولانی شدن زمان انجام آن خواهد انجامید، براساس یک روش تقریبی، توزیع متغیر تصادفی θ_{t+1} با توزیع بتای مناسب تقریب زده می‌شود. برای این منظور پس از محاسبه‌ی امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی θ_{t+1} با استفاده از رابطه‌ی فوق به کمک روش انتگرال‌گیری عددی، از طریق حل مجموعه معادلات زیر مقادیر r_{t+1} ، s_{t+1} تعیین می‌شود.

$$\begin{cases} E(\theta_{t+1}) = \frac{r_{t+1}}{r_{t+1} + s_{t+1}} \\ Var(\theta_{t+1}) = \frac{r_{t+1}}{(r_{t+1} + s_{t+1} + 1)} \times \frac{s_{t+1}}{(r_{t+1} + s_{t+1})^2} \end{cases} \quad (\text{ض } ۴)$$

بدین ترتیب، امکان به‌روزرسانی توزیع پارامتر θ تسهیل شده و انجام محاسباتی که نیازمند استفاده از توزیع به‌روزرشده‌ی این پارامتر است با پیچیدگی کم‌تر و با سرعت بالاتر قابل انجام است.

۳. به‌هنگام‌سازی توزیع پارامتر θ در مدل دوم

در اینجا، درباره‌ی نحوه‌ی به‌روزرسانی توزیع پارامتر θ برای دوره $t+1$ با در دست داشتن اطلاعات پیشین در دوره‌ی t و آخرین مشاهده از رفتار مشتری توضیح می‌دهیم. این پارامتر در روابط ریاضی مربوط به مدل ارائه شده در قسمت ۳ مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از قاعده‌ی بیز می‌توان براساس مقدار تابع درست‌نمایی برای آخرین مشاهده از رفتار یک مشتری، به شکل زیر توزیع پسین متغیر θ را تعیین کرد:

$$g_i(\theta_{t+1}) = \frac{g_i(\theta_t) l_{i,t}(\theta_t | LoS_{i,t+1}, LoL_{i,t+1}, C_{i,t+1})}{l_{i,t}(r_t, s_t | LoS_{i,t+1}, LoL_{i,t+1}, C_{i,t+1})}$$

$$= \frac{g_i(\theta_t) \left[\begin{array}{c} q_{LoS_{i,t} \rightarrow LoS_{i,t+1,t+1}} \\ \times p_{LoS_{i,t+1}, LoL_{i,t+1,t+1}} \\ (W_{LoL_{i,t+1,t+1}})^{C_{i,t+1}} \\ \times (1 - W_{LoL_{i,t+1,t+1}})^{1-C_{i,t+1}} \end{array} \right]}{\int_0^1 \left\{ \left[\begin{array}{c} q_{LoS_{i,t} \rightarrow LoS_{i,t+1,t+1}} \\ \times p_{LoS_{i,t+1}, LoL_{i,t+1,t+1}} \\ (W_{LoL_{i,t+1,t+1}})^{C_{i,t+1}} \\ \times (1 - W_{LoL_{i,t+1,t+1}})^{1-C_{i,t+1}} \end{array} \right] \times g_i(\theta_t | r_t, s_t) d\theta_t \right\}} \quad (\text{ض } ۵)$$

مانند قبل، $l_{i,t}(\theta)$ تابع درست‌نمایی مشاهدات است که توضیحات مربوطه به نحوه‌ی محاسبه‌ی آن در دسترس است.^[۱۷] برای دست‌یابی به توزیعی که انجام محاسبات به کمک آن با پیچیدگی کم‌تر و با سهولت بیشتر ممکن باشد، توزیع حاصل با توزیع بتای مناسب تقریب زده می‌شود. برای این منظور از مجموعه معادلاتی که در رابطه‌ی (ض ۴) معرفی شد برای تعیین پارامترهای توزیع مورد نظر استفاده می‌شود.