مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۳)
دوره‌ی ۱ - ۳۰، شماره‌ی ۲، ص. ۳۹-۵۱

Original Article

زمان‌بندی خطوط ریلی و ظرفیت ایستگاه‌ها در شبکه‌های چندخطه با ارائه‌ی حدود بالای ابتکاری

افشین اروجلوی جدید* (دانشجوی کارشناسی ارشد)

کوروش عشقی (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

یکی از مهم‌ترین و ارزان‌ترین منابع حمل و نقل مسافر و بار «خطوط ریلی» است. مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی به‌عنوان یکی از ابزارهای افزایش بهره‌وری مطرح است. هدف این مسئله استفاده‌ی بیشینه از منابع موجود، مانند لوکوموتیوها، خطوط ریلی و کارکنان است که می‌توان با استفاده از یک زمان‌بندی دقیق و بهینه به این مهم دست یافت. در این مطالعه یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای زمان‌بندی خطوط چندخطه[۱] ارائه شده است. تابع هدف مورد بررسی کمینه‌کردن مجموع زمان‌های سفر است. با توجه به این که مسئله‌ی فوق به‌لحاظ پیچیدگی NP-Hard است، برای حل مسئله چند حد بالا[۲] با استفاده از روش‌های ابتکاری نیز به دست آمده است. در نهایت با ارائه‌ی مثالی از دنیای واقعی، کارایی مدل و حدود بالا سنجیده شده و پیشنهاداتی نیز برای توسعه‌ی مطالعه ارائه شده است.

a_oroojlooy@ie.sharif.edu
eshghi@sharif.edu

واژگان کلیدی: خطوط ریلی، زمان‌بندی، برنامه‌ریزی ریاضی، الگوریتم ابتکاری.

۱. مقدمه

خطوط ریلی از قدیمی‌ترین روش‌های حمل و نقل است. براساس مطالعات موجود تاریخچه‌ی نخستین خط ریل به سال ۱۳۵۰ میلادی در آلمان بازمی‌گردد.[۱] قدیمی‌ترین بازمانده‌های سازه‌های ریلی که از جنس چوب است در موزه‌یی در استرالیا نگه‌داری می‌شود و تاریخچه‌ی آن به سال ۱۵۱۵ میلادی بازمی‌گردد. به‌دلیل اصطکاک پایین ریل‌ها با تجهیزات نقلیه‌ی خطوط ریلی[۲] هزینه‌های این نوع حمل و نقل نسبت به سایر انواع روش‌های موجود بسیار کم‌تر است. از این رو خطوط ریلی به‌سرعت در سراسر دنیا توسعه یافت.

با وجود تقاضای بالای خطوط ریلی، به‌دلیل زیاد بودن هزینه‌های اولیه‌ی لازم برای سرمایه‌گذاری، گسترش این خطوط با ملاحظات خاصی همراه است. از این‌رو استفاده‌ی بهینه و بیشینه از زیرساخت‌های موجود بسیار بااهمیت است. تهیه‌ی برنامه‌ریزی‌های دقیق استفاده از خطوط و لوکوموتیوها، برنامه‌های نگه‌داری و تعمیرات دقیق برای جلوگیری از بروز خرابی‌های اضطراری، برنامه‌ریزی تأمین سوخت و موارد مصرفی شبکه، و نیز برنامه‌ریزی منابع انسانی از مهم‌ترین مواردی هستند که به استفاده‌ی بیشینه از زیرساخت‌های موجود در شبکه کمک می‌کنند. بهینه‌سازی مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی نقش بسیار مهمی در استفاده‌ی مؤثر از زیرساخت‌های موجود ریلی دارد. زمان‌بندی تعیین‌کننده‌ی توالی و ترتیب ورود و خروج قطارها به ایستگاه‌هاست و برای هر قطار نیز مشخص می‌کند که چه زمانی به هر ایستگاه وارد شود، در کدام جایگاه درون ایستگاه قرار گیرد، چه مدت در آن ایستگاه توقف کند و چه زمانی از آن خارج شود.

در تهیه‌ی این زمان‌بندی معمولاً هدف بیشینه‌کردن استفاده از خطوط ریلی و قطارهای موجود است به‌نحوی که محدودیت‌های ناشی از نوع ریل‌ها (تک‌ریل یا خطوط چندگانه)، سرعت حرکت قطارها، محدودیت زمانی، مکان و موقعیت ایستگاه‌ها، محدودیت تعداد خطوط در هر ایستگاه، و محدودیت‌های ایمنی و ملاحظات مربوط به آن تأمین شود. علاوه بر محدودیت‌های فوق که در تمام مسائل بهینه‌سازی خطوط ریلی عمومیت دارد، برخی محدودیت‌های جغرافیایی و نیز محدودیت‌های زمان حرکت و تقاطع خطوط مختلف نیز ممکن است به مسئله افزوده شوند.

برای تهیه‌ی زمان‌بندی شبکه، اطلاعاتی از قبیل تعداد ایستگاه‌ها در هر خط، ظرفیت توقف قطارها در هر ایستگاه، تعداد قطارها در شبکه، کمینه و بیشینه زمان پیمودن فاصله‌ی دو ایستگاه توسط هر قطار، کمینه و بیشینه زمان توقف هر قطار در هر ایستگاه، و کم‌ترین فاصله‌ی ایمنی بین ورود و خروج برای هر ایستگاه مورد نیاز است. در ساختن مدل‌های زمان‌بندی معمولاً جزئیات بیشتری مورد نیاز نیست زیرا عملاً زمان‌بندی مدل‌های به دست آمده کاملاً واقعیت را مدل نمی‌کنند؛ مثلاً هنگامی که یک قطار در ایستگاهی توقف کرده، قطارهای موجود در برخی از بلاک‌های قبل آن ایستگاه با بیشینه سرعت اسمی قابل استفاده نیستند.

مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی مسئله‌یی دشوار است که بدون کمک رایانه و قدرت محاسباتی بالا قابل حل نیست.[۳] در ادبیات موضوع چندین دسته‌بندی برای حل مسئله‌ی زمان‌بندی ارائه شده است.[۴و۵] در این تقسیم‌بندی‌ها سه دسته‌ی کلی برای حل این مسئله در نظر گرفته می‌شود:

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۷/۱۹، اصلاحیه ۱۳۹۲/۷/۹، پذیرش ۱۳۹۲/۸/۶.

- استفاده از مدل‌سازی ریاضی و ابزارهای حل مسائل برنامه‌ریزی ریاضی؛
- استفاده از شبیه‌سازی و ابزارهایی بر پایه‌ی بهینه‌سازی شبیه‌سازی؛
- استفاده از روش‌های مبتنی بر سیستم‌های خبره.

اغلب مقاله‌های موجود در ادبیات موضوع مسئله‌ی زمان‌بندی را می‌توان در دسته‌بندی فوق جای داد، اگر چه در برخی از مقالات روش‌های ترکیبی مورد استفاده قرارگرفته است.[۶] در این مطالعه رویکرد استفاده از مدل‌سازی ریاضی و استفاده از ابزارهای مبتنی بر حل دقیق مورد توجه قرارگرفته است. براین اساس، در ادامه ابتدا مطالعات ادبیات موضوع ارائه شده است. سپس مدل برنامه‌ریزی پیشنهادی ارائه شده که در آن، ظرفیت ایستگاه به همراه زمان‌بندی ورود و خروج هم‌زمان قطارها در نظر گرفته شده است. در ادامه، دو روش ابتکاری برای ارائه‌ی حد بالا در مدل پیشنهادی ارائه شده است. در انتها نیز برای بررسی کارایی مدل، زمان‌بندی یک مدل و نتایج عددی حاصل از مقایسه‌ی روش‌های ابتکاری مورد بررسی قرارگرفته است.

۲. مطالعات ادبیات موضوع

اولین مدل برنامه‌ریزی ریاضی که برای حل مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی مورد استفاده قرار گرفت در سال ۱۹۷۱ ارائه شد.[۷] سپس در سال ۱۹۷۳ نخستین مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح[۳] برای حل این مسئله ارائه شد.[۸] در سال ۱۹۹۱ محققین یک مدل غیرخطی برای کاهش مقدار انحراف زمان‌بندی از برنامه‌ی در نظر گرفته شده ارائه کردند، و برای حل مسئله نیز یک روش شاخه و کران که قادر به ساختن یک جواب ممکن بود ارائه کردند.[۹] قبل از دهه‌ی ۸۰ میلادی، روش‌های حل عمدتاً بر شبیه‌سازی و روش‌های بهینه‌سازی (مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی) متمرکز بوده است، اگرچه به‌دلیل پیچیدگی بالای مسئله‌ی روش‌های بهینه‌سازی بسیار دور از واقعیت بودند. بعد از دهه‌ی ۸۰ و با ظهور روش‌های ابتکاری و فراابتکاری هوش مصنوعی مورد توجه قرارگرفت.[۱۰و۱۱] با افزایش توان محاسباتی در دهه‌ی ۹۰ میلادی دوباره تمرکز بر روش‌های بهینه‌سازی افزایش یافت و استفاده از روش‌های ابتکاری و دقیق برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی ریاضی مورد توجه قرار گرفت.

مدل‌ها و روش‌های حل ارائه‌شده تا سال ۱۹۸۰ در مطالعه‌ی برخی از محققین به‌صورت کامل ارائه شده است.[۱۲] در سال ۱۹۹۶ یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح برای زمان‌بندی معرفی شد.[۱۳] در این مدل محدودیت‌های عمومی سیستم شامل تعیین توالی قطارها در خطوط با در نظرگرفتن فاصله‌ی ایمنی در نظرگرفته شده و برای نخستین بار زمان طی مسیرها به‌صورت پویا لحاظ شده است. همچنین تابع هدف به‌صورت مجموع وزن‌دار میزان تأخیر قطارها و هزینه‌های اجرایی در نظرگرفته شده است. در راستای کاهش زمان حل مسئله نیز، روش‌هایی برای به دست آوردن حد پایین[۴] ارائه شده است. در سال ۱۳۷۸ پژوهش‌گران ایرانی مدلی بر پایه‌ی مدل فوق ارائه کردند که همانند مدل اولیه، امکان سبقت گرفتن در آن وجود نداشت. در طرح ایشان با در نظرگرفتن شرایط منطقی و ارائه‌ی چند برش مبتنی بر آن، تعداد متغیرهای صفر و ۱ کاهش یافته و زمان حل نیز به مقدار قابل توجهی کم شده است، اگرچه در برخی مسائل تابع هدف حاصل از روش ابتکاری رشد ناچیزی داشته است.[۱۴] در سال ۱۳۸۴ نیز، با فرض آن که هر قطار در مسئله‌ی برنامه‌ریزی حرکت قطارها معادل یک شهر در مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد باشد، توالی و زمان‌بندی حرکت قطارها به دست آمد.[۱۵] در این مدل حرکت قطارها در مسیرهایی مستقیم و بدون انشعاب صورت می‌گیرد و حق سبقت بین قطارها وجود ندارد. با استفاده از توسعه‌های موجود در حل مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد، و با استفاده از روش فراابتکاری الگوریتم مورچگان، ساختاری برای حل مسئله ارائه شده است.[۱۵] برای نخستین‌بار در سال ۲۰۰۳، در یک مدل زمان‌بندی دوره‌یی، زمان‌های سفر، آغاز حرکت، توقف در ایستگاه، زمان‌های ایمنی و زمان‌های مورد نیاز برای توقف فنی به‌صورت بازه‌یی در نظرگرفته شد. مدل فوق در یک شبکه‌ی تک‌ریلی ارائه شد و از این رو محدودیت‌های مربوط به عدم تقاطع نیز در آن وارد شد. در این مدل برخلاف مدل برنامه‌ریزی دوره‌یی[۵]، امکان در نظرگرفتن زمان‌های سفر متفاوت وجود داشت و زمان‌های توقف در ایستگاه‌ها نیز به‌صورت متغیر بیان شد. همچنین چهار تابع هدف کمینه‌سازی زمان سفر، کمینه‌سازی انحرافات نسبت به زمان‌بندی، کمینه‌سازی هزینه‌ها و موجه‌کردن یک مدل غیرموجه در نظرگرفته شد.[۱۶] در سال ۲۰۰۴ برای یک مدل مخلوط دوخطه و تک‌خطه، یک مدل دوهدفه ارائه شد[۱۷] که در آن دو تابع هدف کمینه‌سازی میزان مصرف سوخت به‌عنوان تابع هدف مورد نظر شرکت ارائه‌دهنده‌ی خدمات و مدت زمان سفر به‌عنوان تابع هدف مورد نظر مسافران در نظر گرفته شده است. برای حل مدل در ابتدا مرز پارتو برای مسئله تعیین، و سپس بهترین جواب مسئله انتخاب شده است.

اغلب مطالعات ارائه شده در حوزه‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی دارای یک تابع هدف هستند، اگرچه مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی در دنیای واقعی یک مسئله‌ی چندهدفه است. بنابراین مهم است که هنگام حل مسئله‌ی زمان‌بندی تابع هدف مورد نظر به‌درستی انتخاب شود. برخی از مهم‌ترین توابع هدف مورد استفاده عبارت‌اند از:

- انواع توابع هدف مورد نظر استفاده‌کنندگان خطوط ریلی،[۱۸] به‌صورت کمینه‌سازی زمان سفر، کمینه‌سازی تأخیر و کمینه‌سازی زمان انتظار در ایستگاه.
- ترکیب توابع هدف مورد نظر استفاده‌کنندگان و صاحبان خطوط ریلی،[۱۷] که از مهم‌ترین آنها کمینه‌سازی میزان مصرف سوخت و انرژی است.
- تابع هدف کمینه‌سازی مدت زمان سفر،[۱۹] که در آن مجموع زمان حرکت تمامی قطارها کمینه می‌شود؛ و بدین‌ترتیب بیشترین بهره‌وری را برای خطوط ریلی و قطارها می‌توان متصور بود. همچنین این تابع هدف باعث کاهش زمان سفر می‌شود که به افزایش رضایت‌مندی مصرف‌کنندگان از زمان‌بندی به‌دست آمده می‌انجامد.
- تابع هدف کمینه‌سازی میزان تأخیر،[۵] که می‌توان از آن به دو صورت کمینه‌سازی میانگین تأخیر یا کمینه‌سازی بیشترین[۶] تأخیرها بهره گرفت.

در سال ۲۰۰۲ محققین رویکردی متفاوت ارائه کردند.[۲۰] در این مطالعه هر روز به ۱۴۴۰ نقطه‌ی زمانی تقسیم می‌شود. به این ترتیب در شبکه به‌ازای هر ایستگاه و هر نقطه‌ی زمانی یک گره در نظر گرفته شده و یک گراف حاصل می‌شود. براین اساس در شبکه‌یی با سه ایستگاه، ۴۳۲۰ گره وجود دارد. در این مدل‌سازی هر قطار طبق مسیر تعیین‌شده، از ایستگاهی مشخص در شبکه شروع به حرکت می‌کند و به ایستگاه‌های تعیین شده می‌رود. برای هر قطار تعدادی کمان معرفی شده که تنها می‌تواند یکی از اینها را در حرکت بین ایستگاه‌ها و توقف در ایستگاه‌ها انتخاب کند. این کمان‌ها در مسئله‌یی دیگر و با استفاده از الگوریتم عمق نخستین به دست می‌آیند. بدین‌ترتیب برای هر قطار مجموعه‌یی کمان‌های قابل قبول ارائه شده است. برای هر کمان نیز یک مقدار سود مشخص شده که چنانچه قطار آن کمان را انتخاب کند (زمان خارج شدن از ایستگاه قبل و زمان وارد شدن به ایستگاه جدید طبق آن کمان باشد) و تأخیری وجود نداشته باشد، تمام مقدار سود مورد نظر آن کمان به تابع هدف مسئله اضافه می‌شود؛ در صورت تأخیر نیز مقداری از سود، براساس

میزان تأخیر کسر می‌شود. برای حل این مسئله نیز یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح خالص[۷] ارائه شده است.[۲۰]

مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی از نظر سختی حل در رده‌ی مسائل NP-Hard قرار می‌گیرد.[۲۰و۲۱] به‌دلیل وجود متغیرهای صفر و ۱ فراوان در مدل، در حل آن استفاده از الگوریتم شاخه و کران یا الگوریتم‌های مرتبط که نیاز به زمان و حافظه‌ی زیادی دارند، ضرورت دارد. در حل مسئله به روش شاخه و کران بعد از یافتن بهترین جواب، غالباً زمان زیادی صرف یافتن جواب بهینه‌ی آن می‌شود. علت بروز این مسئله آن است که مسئله‌یی با ۳۰ متغیر صفر و ۱ منجر به تولید درختی با بیش از یک میلیارد گره خواهد شد.[۲۲] اگر هیچ شرطی برای اتمام زودهنگام مسئله وضع نشود، حل مسئله آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا تمامی گره‌های درخت فوق بررسی شوند یا این که به‌دلیل کمبود حافظه حل مسئله متوقف شود. از این رو در حل این مسئله الگوریتم‌هایی مورد نظرند که منجر به کاهش تعداد متغیرهای صفر و ۱، و به دنبال آن فضای حل و زمان مورد نیاز برای حل مسئله می‌شوند. بر این اساس الگوریتم‌های مورد استفاده در مسائل ترافیکی را می‌توان به دو دسته‌ی اصلی تقسیم کرد:

- **روش‌های تقریبی:** به‌دلیل حجم وسیع محاسبات مسئله و کم بودن احتمال به دست آوردن یک روش حل در زمان چندجمله‌یی، مطالعات زیادی برای به دست آوردن پاسخ‌های تقریبی انجام شده است. با استفاده از این روش‌ها جواب بهینه‌ی مسئله به دست نمی‌آید و هیچ اظهار نظری درمورد کیفیت جواب به دست آمده و فاصله‌ی آن با جواب بهینه نمی‌توان داشت. در اغلب این روش‌ها سعی می‌شود با ایجاد جواب‌هایی با کیفیت مناسب فضای جست‌وجو را محدود کرد تا جواب‌هایی خوب در زمان محدود به دست آید.[۱۸،۲۳و۲۴]

- **روش‌های دقیق:** چنان که بیان شد مسائل برنامه‌ریزی ریاضی زمان‌بندی خطوط ریلی به‌صورت مسائل صفر و ۱ مدل‌سازی می‌شوند و نیازمند حجم بالای محاسبات و حافظه‌اند. این مشکل ناشی از وجود تعداد بسیار زیاد متغیرهای صفر و ۱ است؛ اگرچه تعداد زیادی از این متغیرها بدون استفاده‌اند، ولی نمی‌توان در ابتدای حل مسئله آن‌ها را حذف کرد. کاهش این متغیرهای صفر و ۱ در کاهش زمان حل مسئله بسیار مؤثر خواهد بود. ژو[۳۰] در سال ۲۰۰۷ روشی بسیار پیچیده ارائه کرد که در آن حجم زیادی از فضای جواب (که قطعاً جواب بهینه در آن حضور ندارد) در روش ارائه شده حذف می‌شود و بر این اساس مسائل تا ۳۰ قطار را به‌صورت بهینه حل می‌کند. روشی مشابه نیز توسط D'Ariano ارائه شده است.[۲۵]

در مطالعه‌ی ژو و ژانگ[۳۰] یک الگوریتم شاخه و کران برای حل مسئله ارائه شده که در آن انتخاب گره با استفاده از الگوریتم‌های «جست‌وجوی عمق نخستین[۸]» یا «جست‌وجوی آخرین شاخه[۹]» انجام شده است. همچنین با استفاده از الگوریتم آزادسازی لاگرانژ[۱۰] و یک روش ابتکاری یک حد پایین برای مسئله به دست آوردند. تابع هدف مورد استفاده‌ی آن‌ها کمینه‌سازی مجموع زمان‌های رسیدن قطارها به ایستگاه آخر بوده است.

کاپرارا و همکارانش بعد از مدل سال ۲۰۰۲، و با توجه به این که مدل فوق به‌صورت عملی برای حل مسائل دنیای واقعی قابل استفاده نیست، در سال ۲۰۰۶ یک روش آزادسازی لاگرانژ برای ارائه‌ی حد پایین ارائه کردند. در این مطالعه با روشی ابتکاری محدودیتی با ضرایب لاگرانژ به تابع هدف اضافه شده و برای کاهش زمان حل و ارائه حد پایین مورد استفاده قرار گرفته است.[۲۶] در سال ۲۰۱۱ مین و همکارانش مدلی برای متروی شهری سئول ارائه کردند. برای کاهش زمان حل مسئله آن‌ها یک الگوریتم تجزیه تولید ستون[۱۱] ارائه کردند که در آن ثابت شده است که هر زیرمسئله خود یک مسئله‌ی NP-Hard است و الگوریتم ابتکاری برای به دست آوردن جواب‌های خوب برای هر زیرمسئله ارائه شده است. با استفاده از این الگوریتم مسئله‌ی اصلی با استفاده از روش تولید ستون حل شده است.[۲۷] در مدل‌سازی ارائه شده تخصیص قطارها در شبکه‌ی دارای ریل‌های موازی در نظر گرفته شده است. در واقع در مدل مورد نظر مسیر و زمان‌بندی به‌طور هم‌زمان انتخاب می‌شود. همچنین مدل قادر به تصمیم‌گیری برای توقف در هر ایستگاه است. کاستیلو و همکارانش روشی بر پایه‌ی «تجزیه‌ی دوبخشی[۱۲]» ارائه کرده‌اند که در آن با در نظر گرفتن تابع هدف کمینه‌کردن نسبت زمان سفر، زمان حل به‌صورت قابل توجهی کاهش یافته است.[۲۲و۲۸] این مدل براساس شبکه‌ی خطوط پرسرعت مادرید در کشور اسپانیا نوشته شده و شبکه‌یی با خطوط چندگانه یا تک‌خطه را در نظر می‌گیرد. زمان حرکت بین دو ایستگاه و توقف در هر ایستگاه به‌صورت پویا در نظر گرفته شده است. امکان سبقت گرفتن درون مدل در نظر گرفته نشده و به نظر می‌رسد که زمان‌بندی قطارها درون ایستگاه توسط مدلی مجزا انجام می‌شود. در این مطالعه برخلاف ژو و ژانگ و سایر مطالعات موجود در ادبیات موضوع، نسبت زمان سفر به زمان سفرِ مورد انتظار به‌عنوان تابع هدف قرار گرفته است.

اغلب محققین سعی در حل مسائلی با تعداد قطارهای بیشتر دارند، اما بیشترشان توان حل مسائل دنیای واقعی را ندارند. تلاش آنان غالباً در جهت تولید حدود بالای قدرت‌مند است که باعث کاهش زمان حل مسئله می‌شود. همچنین تلاش‌هایی در جهت حذف محدودیت‌ها و متغیرهای صفر و ۱ غیرفعال از مسئله صورت گرفته که باعث کاهش فضای حل مسئله می‌شود.[۱۹،۲۲،۲۴،۲۵،۲۸و۲۹]

با وجود مطالعات فراوان، چنان که بیان شد اغلب روش‌های موجود قادر به حل مسئله‌های با ابعاد بزرگ نیستند. از این‌رو امکان استفاده از این روش‌ها در دنیای واقعی وجود ندارد و خلأ وجود روشی برای حل مسئله‌های دارای ابعاد وسیع به شدت حس می‌شود. روش مورد نظر باید توانایی به دست آوردن جوابی کارا در زمان قابل قبول را داشته باشد، به‌نحوی که بعد از به دست آوردن جواب همچنان قابل استفاده باشد و به بیان دیگر جوابی مرده به دست نیاید.

۳. مدل برنامه‌ریزی ریاضی پیشنهادی

در این بخش مدل برنامه‌ریزی ریاضی پیشنهادی ارائه شده است. در این مدل سعی شده با استفاده از تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی مدلی برای به دست آوردن زمان‌بندی حرکت قطارها در یک شبکه‌ی متروی شهری ارائه شود به‌نحوی که ظرفیت ایستگاه‌ها را نیز در نظر بگیرد. شرایط عمومی مدل براساس واقعیت‌های عملی متروی شهری تهران به دست آمده و سعی شده است با توسعه‌ی آن به‌صورت منطقی شرایط کلی‌تر نیز پوشش داده شود. در خط ۵ از این شبکه، در هر ایستگاه یک کناره وجود دارد که قطار می‌تواند در آن توقف کند و قطار دیگر از مسیر اصلی عبور کند. براین اساس امکان سبقت گرفتن در این خط فراهم شده است. از این رو در مدل مورد بررسی شبکه‌یی در نظر گرفته شده که در آن امکان سبقت گرفتن وجود داشته باشد. همچنین در برخی از ایستگاه‌ها امکان توقف و سوارکردن بیش از یک قطار در هر لحظه وجود دارد. از این‌رو محدودیت‌هایی نیز برای در نظر گرفتن محدودیت

ظرفیت ایستگاه‌ها در نظرگرفته شده است. براین اساس فرضیات مدل عبارت است از:

۱. تمامی زمان‌های حرکت بین ایستگاه‌ها به‌صورت بازه زمانی موجود و به‌صورت قطعی است.
۲. تمامی زمان‌های توقف درون ایستگاه‌ها به‌صورت بازه زمانی موجود و به‌صورت قطعی است.
۳. شبکه در هر مسیر رفت یا برگشت دارای یک خط مجزاست.
۴. هر ایستگاه حداقل دارای یک مکان توقف برای قطار است.
۵. تعداد ایستگاه‌های درون هر خط عددی مشخص و قطعی است.
۶. زمان لازم برای شتاب‌گیری و توقف در هر ایستگاه به‌عنوان قسمتی از زمان حرکت بین دو ایستگاه در نظرگرفته شده است.
۷. تعداد قطارها و مسیر حرکت آن‌ها در ابتدا مشخص و قطعی است.

۱.۳. معرفی نمادها

l: اندیس مربوط به شماره خط ($l = ۱, ۲, ۴, ۵$) است. همچنین L را مجموعه‌ی حاوی شماره‌های خطوط، و L_E را مجموعه‌ی خطوط دارای قابلیت سبقت‌گیری می‌نامیم.

t: اندیس مربوط شماره قطارها $t = ۱, ۲, ۳, ..., n$ است. همچنین T مجموعه‌ی حاوی شماره‌های قطارهاست و چون تعداد قطار در خطوط متفاوت است، تعداد آن را با T_l نمایش می‌دهیم.

s: اندیس مربوط به شماره ایستگاه‌هاست. با توجه به متفاوت بودن تعداد ایستگاه‌ها در خطوط مختلف، تعداد ایستگاه‌ها را در هر خط با S_l نمایش می‌دهیم.

۱.۱.۳. پارامترهای مدل

در اینجا به مهم‌ترین پارامترهای مدل اشاره می‌شود؛ تمامی این پارامترها براساس واحد ثانیه بیان شده و مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$SF_{l,s}$: حداقل فاصله‌ی ایمنی بین ورود و خروج به یک ایستگاه یا بلاک s در خط l؛

SC_s: تعداد ظرفیت توقف قطار در ایستگاه s؛

$\underline{D}_{l,t,s}$: حداقل زمان توقف در ایستگاه s توسط قطار t؛

$\overline{D}_{l,t,s}$: حداکثر زمان توقف در ایستگاه s توسط قطار t؛

$\underline{T}_{l,t,s,s+۱}$: حداقل فاصله‌ی زمانی طی ایستگاه s و $s+۱$ توسط قطار t؛

$\overline{T}_{l,t,s,s+۱}$: حداکثر فاصله‌ی زمانی طی ایستگاه s و $s+۱$ توسط قطار t.

۲.۱.۳. متغیرهای تصمیم

متغیرهای تصمیم چنین تعریف شده‌اند:

C_{lts}: زمان خروج قطار t از sامین ایستگاه خط l؛

S_{lts}: زمان ورود قطار t به sامین ایستگاه خط l؛

$x_{t,t',s}$: اگر قطار t' در ایستگاه s از قطار t سبقت بگیرد مقدار ۱، و در غیر این‌صورت صفر می‌گیرد؛

$x'_{t,t',s}$: اگر قطار t' در ایستگاه s از قطار t سبقت نگیرد مقدار ۱، و در غیر این‌صورت صفر می‌گیرد؛

$x''_{t,t',s}$: اگر قطار t' در ایستگاه s قبلاً از قطار t سبقت گرفته باشد مقدار ۱، و در غیر این‌صورت صفر می‌گیرد؛

$y_{t,t',s}$: اگر دو قطار t و t' از ایستگاه s به‌صورت هم‌زمان استفاده کنند مقدار ۱، و در غیر این‌صورت صفر می‌گیرد؛

$y'_{t,t',s}$: اگر دو قطار t و t' از ایستگاه s به‌صورت هم‌زمان استفاده کنند مقدار ۱، و در غیر این‌صورت صفر می‌گیرد.

متغیر $x_{t,t',s}$ شرایطی را در نظر می‌گیرد که قطار t' دیرتر از قطار t وارد ایستگاه s شود و زودتر از آن خارج شود.

متغیر $x'_{t,t',s}$ شرایطی را در نظر می‌گیرد که قطار t' دیرتر از قطار t وارد ایستگاه s شود و دیرتر از آن نیز خارج شود.

متغیر $x''_{t,t',s}$ شرایطی را در نظر می‌گیرد که قطار t' زودتر از قطار t وارد ایستگاه s شود و زودتر از آن نیز خارج شود.

دو متغیر $y_{t,t',s}$ و $y'_{t,t',s}$ نیز برای در نظرگرفتن ظرفیت ایستگاه مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۳.۱.۳. تابع هدف

برای ارزیابی زمان‌بندی به دست آمده معیارهای مختلفی در ادبیات موضوع مطرح شده است. در این مطالعه سعی شده است تابع هدفی انتخاب شود که در مسئله‌ی ساخت زمان‌بندی اولیه منجر به بیشینه‌کردن رضایت مسافران و بهره‌برداران شبکه شود. از این رو تابع هدف کمینه‌کردن مجموع زمان‌های رسیدن به ایستگاه آخر انتخاب شده که عبارت است از:

$$\min z = \sum_{l=۱}^{L} \sum_{t=۱}^{T} C_{ltk}$$
$$k = last\ station(t) \qquad (۱)$$

این تابع هدف باعث کمینه کردن زمان حرکت قطارها در شبکه می‌شود. بدین‌ترتیب بیشترین استفاده از قطارها و خطوط ریلی صورت می‌گیرد و سعی می‌شود بیشترین تعداد قطار ممکن مورد استفاده قرار بگیرد که با کاهش زمان بین دو بار حرکت هر دو قطار، رضایت استفاده‌کنندگان را جلب می‌کند.

۴.۱.۳. محدودیت کمینه و بیشینه فاصله‌ی زمانی پیمودن بین دو ایستگاه

این محدودیت تضمین می‌کند که زمان طی کردن فاصله‌ی بین دو ایستگاه از مقدار مشخصی کم‌تر یا بیشتر نشود. در نظرگرفتن زمان حرکت به‌صورت بازه به محدود شدن فضای حل کمک می‌کند. این محدودیت‌ها در واقع سرعت حرکت قطار را مشخص می‌کنند. تحت شرایط $\forall t \in T_l$، $\forall l$ و $\forall s \in S_l$ خواهیم داشت:

$$S_{l,t,s+۱} \geq C_{lts} + \underline{T}_{l,t,s,s+۱} \qquad (۲)$$

$$S_{l,t,s+۱} \leq C_{lts} + \overline{T}_{l,t,s,s+۱} \qquad (۳)$$

۵.۱.۳. محدودیت کمینه و بیشینه زمان توقف در ایستگاه

این محدودیت‌ها تضمین می‌کنند که برای توقف هر قطار در هر ایستگاه فاصله‌ی کمینه و بیشینه‌ی مشخصی وجود داشته باشد و از حد معینی بیشتر نشود. تحت شرایط $\forall t \in T_i$، $\forall l$ و $\forall s \in S_l$ خواهیم داشت:

$$C_{lts} \geq S_{lts} + \underline{D}_{l,s,t} \qquad (۴)$$

$$C_{lts} \leq S_{lts} + \overline{D}_{l,s,t} \qquad (۵)$$

۶.۱.۳. محدودیت سبقت گرفتن و رعایت فاصله‌ی ایمنی

این محدودیت‌ها امکان سبقت‌گرفتن را فراهم می‌کنند و همچنین فاصله‌ی ایمنی بین عبور قطارها را در مدل اعمال می‌کنند. این دسته‌ی محدودیت‌ها تضمین می‌کنند تا

هیچ دو قطاری به‌صورت هم‌زمان از یک بلاک استفاده نکنند و تلاقی ایجاد نشود. با فرض $\forall t,t' \in T_i$ ،$\forall l \in L_E$ و $\forall s \in S_l$ خواهیم داشت:

$$S_{lt's} \geq S_{lts} + SF_{l,s} - (۱ - x'_{t,t',s})M;\ \forall t > t' \quad (۶)$$

$$C_{lt's} \geq C_{lts} + SF_{l,s} - (۱ - x'_{t,t',s})M;\ \forall t > t' \quad (۷)$$

$$S_{lt's} \geq C_{lts} + SF_{l,s} - (۱ - x'_{t,t',s})M$$
$$SC_s = ۱;\ \forall t > t' \quad (۸)$$

$$S_{lt's} \geq S_{lts} + SF_{l,s} - (۱ - x'_{t,t',s-۱})M$$
$$s > ۱;\ \forall t > t' \quad (۹)$$

$$S_{lt's} \geq S_{lts} + SF_{l,s} - (۱ - x_{t,t',s})M;\ \forall t \neq t' \quad (۱۰)$$

$$C_{lts} \geq S_{lt's} + SF_{l,s} - (۱ - x_{t,t',s})M;\ \forall t \neq t' \quad (۱۱)$$

$$S_{lts} \geq S_{lt's} + SF_{l,s} - (۱ - x_{t,t',s-۱})M$$
$$s > ۱;\ \ \forall t \neq t' \quad (۱۲)$$

$$S_{lts} \geq S_{lt's} + SF_{l,s} - (۱ - x''_{t,t',s})M;\ \forall t > t' \quad (۱۳)$$

$$C_{lts} \geq C_{lt's} + SF_{l,s} - (۱ - x''_{t,t',s})M;\ \forall t > t' \quad (۱۴)$$

$$S_{lts} \geq c_{lt's} + SF_{l,s} - (۱ - x''_{t,t',s})M$$
$$SC_s = ۱;\ \ \forall t > t' \quad (۱۵)$$

$$S_{lts} \geq S_{lt's} + SF_{l,s} - (۱ - x''_{t,t',s-۱})M$$
$$s > ۱;\ \ \forall t > t' \quad (۱۶)$$

$$x''_{t,t',s} + x'_{t,t',s} + x_{t,t',s} + x_{t',t,s} = ۱; \quad \forall t \neq t' \quad (۱۷)$$

$$x_{t,t',s} + x_{t,t',s} \leq ۰; \quad SC_s = ۱; \quad \forall t > t' \quad (۱۸)$$

محدودیت‌های ۶ و ۷ شرایطی را نشان می‌دهند که قطار t' دیرتر از قطار t وارد ایستگاه می‌شود و دیرتر از آن هم خارج می‌شود. محدودیت ۸ فاصله‌ی ایمنی ورود و خروج را در شرایطی که ظرفیت ایستگاه ۱ است و امکان سبقت گرفتن وجود ندارد، تأمین می‌کند و بدین ترتیب اجازه نمی‌دهد که هم‌زمان دو قطار بیش از ظرفیت ایستگاه درون ایستگاه قطار گیرند. این محدودیت تنها برای ایستگاه‌هایی مورد استفاده قرار می‌گیرد که یک جایگاه پیاده و سوار کردن دارند. محدودیت ۹ تضمین می‌کند که سبقت بین دو ایستگاه و خارج از کناره‌ها صورت نگیرد. محدودیت ۱۰ و ۱۱ شرایطی را نشان می‌دهند که قطار t' دیرتر از قطار t وارد ایستگاه می‌شود و زودتر از آن هم خارج می‌شود. این شرایط امکان سبقت گرفتن را فراهم می‌کند. محدودیت ۱۲ تضمین می‌کند که سبقت بین دو ایستگاه و خارج از کناره‌ها صورت نگیرد. محدودیت‌های ۱۳ و ۱۴ نیز شرایطی را فراهم می‌کنند که قطار t' زودتر از قطار t وارد ایستگاه می‌شود و زودتر از آن هم خارج می‌شود. قطارهایی که زودتر از قطار t از ایستگاه s عبور کرده‌اند یا قبلاً از قطار t سبقت گرفته‌اند در این محدودیت‌ها قرار می‌گیرند. محدودیت ۱۵ نیز حداقل فاصله‌ی ایمنی بین دو ورود و خروج را تضمین می‌کند. این محدودیت نیز تنها برای ایستگاه‌هایی مورد استفاده قرار می‌گیرد که فقط یک جایگاه پیاده و سوار کردن دارند. محدودیت ۱۶ تضمین می‌کند که سبقت بین دو ایستگاه و خارج از کناره‌ها صورت نگیرد. محدودیت ۱۷ تضمین می‌کند که فقط و فقط یکی از چهار حالت فوق اتفاق بیفتد. محدودیت ۱۸ نیز تضمین می‌کند در ایستگاه‌هایی که تنها یک ظرفیت وجود دارد، سبقتی انجام نگیرد.

۷.۱.۳. محدودیت ظرفیت ایستگاه

این محدودیت تضمین می‌کند تعداد قطارهای تخصیص یافته به هر ایستگاه در هر لحظه بیشتر از تعداد ظرفیت آن ایستگاه نباشد. در مسئله‌ی مورد بررسی ظرفیت هر ایستگاه حداکثر ۲ است. بدین ترتیب که در برخی از ایستگاه‌ها در هر لحظه یک قطار می‌تواند در ایستگاه توقف کند و قطار دیگر از مسیر اصلی ایستگاه عبور کند. در برخی دیگر از ایستگاه‌ها نیز دو جایگاه برای سوار و پیاده‌کردن مسافران وجود دارد.

$$(x_{t,t',s} + x_{t',t,s}) + (x_{t,t'',s} + x_{t'',t,s}) + (x_{t',t'',s} + x_{t'',t',s}) \leq ۲$$
$$\forall l \in L_E;\ \ \forall t \in T_l;\ \ \forall s \in S_l \quad (۱۹)$$

ابتدا فرض می‌کنیم ایستگاه دارای ظرفیت دو قطار برای توقف و جابه‌جایی مسافران است. در حالت سبقت گرفتن، نقض محدودیت ظرفیت ایستگاه‌ها در صورتی ممکن است که از قطاری که در حال سبقت گرفتن است، قطار دیگری سبقت بگیرد. فرض کنید این شرایط برای دو قطار t و t' اتفاق بیفتد و متغیر $x_{t,t',s}$، ۱ باشد. در این شرایط هر دو ظرفیت ایستگاه پر شده است و امکان حضور قطار دیگری وجود ندارد.

چنانچه قطار دیگری بخواهد از این دو قطار سبقت بگیرد، یعنی دیرتر از دو قطار فوق به ایستگاه وارد شود و زودتر از هر دوی آن‌ها از ایستگاه خارج شود، چنین وضعیتی ایجاد می‌شود. در این شرایط قطار جدید از هر دو قطار موجود سبقت می‌گیرد و از این‌رو باید متغیرهای $x_{t,t'',s}$ و $x_{t'',t',s}$ هر دو ۱ شوند. از این رو معادله‌ی ارائه شده به گونه‌یی عمل می‌کند که در هر لحظه حداکثر یک متغیر می‌توانند مقدار ۱ بگیرد، و لذا اجازه نمی‌دهد در حین سبقت قطار t از قطار t' قطار t'' از دو قطار فوق سبقت بگیرد. باید توجه داشت که محدودیت ۱۷ تضمین می‌کند که از هر دو قطار موجود در هر ایستگاه، تنها یکی از آن‌ها بتواند از دیگری سبقت بگیرد. از این رو در محدودیت ۱۹ نیز، از هر دو متغیر مربوط به دو قطار تنها یکی از آن‌ها می‌تواند مقدار بگیرد و با توجه به ظرفیت ایستگاه نیز در هر لحظه تنها دو متغیر می‌تواند از این دسته عدد بگیرد. از سوی دیگر این دسته از محدودیت‌ها اجازه می‌دهند که از یک قطار مشخص در یک ایستگاه هر چند قطار سبقت بگیرد، و محدودیتی برای آن ایجاد نمی‌شود.

به‌عنوان مثال شرایطی را در نظر می‌گیریم که ۵ قطار در شبکه موجود است. فرض می‌کنیم براساس زمان‌بندی قطار ۲ و ۳ در ایستگاه سوم از قطار ۱ سبقت می‌گیرند. در این شرایط باید محدودیت ۱۹ تأمین شود که به‌صورت $x_{۱,۲,۳} + x_{۱,۳,۳} + x_{۲,۳,۳} + x_{۳,۲,۳} \leq ۲$ است و براساس شرایط بیان شده برقرار شده است. در این شرایط قطار ۱ در ایستگاه توقف می‌کند و قطار ۲ و ۳ براساس توالی مشخصی به ایستگاه وارد می‌شوند و از آن خارج می‌شوند. چنانچه قطار ۲ و ۳ نیز بخواهند در این ایستگاه از یکدیگر سبقت بگیرند، باید یکی از دو متغیر $x_{۲,۳,۳} + x_{۳,۲,۳}$ مقدار ۱ بگیرد که این امکان‌پذیر نیست. همچنین شرایطی متصور می‌شویم که در آن قطار ۲ از ۱ سبقت بگیرد و قطار ۳ نیز از قطار ۲ سبقت بگیرد. با این شرایط محدودیت فوق به ظاهر تأمین می‌شود، در حالی که این مقدار عملاً امکان‌پذیر نیست. در واقع در صورتی که قطار ۳ از قطار ۲ سبقت بگیرد، یعنی دیرتر از آن وارد ایستگاه شده و زودتر از آن نیز خارج شده است. همچنین قطار ۲ نیز شرایطی مشابه دارد، بدین‌ترتیب که دیرتر از قطار ۱ وارد شده و زودتر از آن خارج شده است. براین اساس قطار ۳ نیز دیرتر از قطار ۱ وارد شده و زودتر از آن خارج می‌شود، که براساس محدودیت‌های ۱۰ و ۱۱، $x_{۱,۳,۳}$ نیز مقدار ۱ می‌گیرد. در این شرایط محدودیت $۲ \leq x_{۱,۲,۳} + x_{۱,۳,۳} + x_{۲,۳,۳} + x_{۳,۲,۳}$

نقض می‌شود و لذا چنین اتفاقی نمی‌افتد. برای روشن‌تر شدن موضوع شرایطی را در نظر می‌گیریم که قطار ۴ از قطار ۲ در ایستگاه ۳ سبقت بگیرد. براین اساس محدودیت $x_{2,4,3}+x_{1,4,3}+x_{4,1,3}+x_{1,2,3} \le 2$ را در نظر می‌گیریم. متغیر $x_{1,2,3}$ از محدودیت قبلی مقدار ۱ گرفته است. در صورتی که قطار ۴ از ۲ سبقت بگیرد، متغیر $x_{2,4,3}$ مقدار ۱ خواهد گرفت. به‌صورت مشابه چون قطار ۲ از قطار ۱ سبقت گرفته، لذا قطار ۴ نیز باید از قطار ۱ سبقت بگیرد و متغیر $x_{1,4,3}$ براساس محدودیت‌های ۶ و ۱۱ باید مقدار ۱ بگیرد که امکان‌پذیر نیست.

حال فرض می‌کنیم که ایستگاه دارای سه سکو برای جابه‌جایی مسافران باشد. در این صورت نیز در شرایطی محدودیت مورد نظر نقض می‌شود که علاوه بر سه قطار حاضر در ایستگاه قطار دیگری وارد ایستگاه شود و بخواهد از سایر قطارهای موجود در ایستگاه سبقت بگیرد. براساس استدلالی مشابه محدودیت زیر ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned}&(x_{t,t',s}+x_{t',t,s})+(x_{t,t'',s}+x_{t'',t,s})+(x_{t',t'',s}+x_{t'',t',s})\\&\quad+(x_{t,t''',s}+x_{t''',t,s})+(x_{t''',t',s}+x_{t',t''',s})\\&\quad+(x_{t''',t'',s}+x_{t'',t''',s})\le 5\\&\quad\forall l\in L_E;\ \ \forall t\in T_l;\ \ \forall s\in S_l\end{aligned}\tag{20}$$

این محدودیت نیز شرایطی مشابه را در صورت وجود سه جایگاه ایجاد می‌کند. به‌صورت کلی می‌توان گفت که در صورت وجود تعداد SC_s جایگاه در ایستگاه s، تعداد $(SC_s)!$ جمله ـــ شامل انواع حالات مختلف سبقت گرفتن (SC_s+1) قطار از هم ـــ وجود خواهد داشت. هریک از جملات نیز به‌صورت مجموع $x_{t,t',s}+x_{t',t,s}$ است که مشخص می‌کند تنها یکی از دو قطار می‌تواند از دیگری سبقت بگیرد. همچنین مقدار سمت راست به‌صورت $\binom{SC_s+1}{2}-1$ است که پرانتز نشان‌دهنده‌ی ترکیب c از n است که به‌صورت $\frac{n!}{c!(n-c)}$ محاسبه می‌شود. براین اساس می‌توان به‌صورت کلی نوشت:

$$\begin{aligned}&(x_{t,t',s}+x_{t',t,s})+(x_{t,t'',s}+x_{t'',t,s})+(x_{t',t'',s}+x_{t'',t',s})\\&\quad+(x_{t,t''',s}+x_{t''',t,s})+(x_{t''',t',s}+x_{t',t''',s})\\&\quad+(x_{t''',t'',s}+x_{t'',t''',s})\le 5\\&\quad\forall l\in L_E;\ \ \forall t_1,t_2...t_{sc_s+1}\in T_l\quad \forall s\in S_l\, and\, SC_s>1\end{aligned}\tag{21}$$

این معادله برای هر ایستگاه با توجه به ظرفیت و تعداد جایگاه آن باید نوشته شود و تضمین می‌کند که در حین سبقت گرفتن بیش از تعداد مجاز قطار در آن توقف نکند.

چنان که بیان شد محدودیت ۲۱ ظرفیت ایستگاه را در شرایطی که سبقت گرفته می‌شود، تأمین می‌کند. با این حال در صورتی که دو قطار براساس زمان‌بندی نیازی به سبقت‌گرفتن نداشته باشند نیز باید بتوان از ظرفیت ایستگاه به بهترین نحو ممکن استفاده کرد. برای این منظور محدودیت‌های ۲۲ تا ۲۵ با شرط $SC_s\ge 2$، $\forall s\in S_l$ ، $\forall t,t'\in T_l$ و $\forall l\in L_E$ در نظر گرفته شده‌اند.

$$S_{lt's}\ge C_{lts}+SF_{l,s}-(1-x'_{t,t',s})M-My_{t,t',s}\qquad \forall t>t'\tag{22}$$

$$S_{lts}\ge C_{lt's}+SF_{l,s}-(1-x''_{t,t',s})M-My_{t,t',s}\qquad \forall t>t'\tag{23}$$

$$\sum\nolimits_{t',t\neq t'}^{T} y_{t,t',s}\le SC_s-1\tag{24}$$

$$\sum\nolimits_{t,t\neq t'}^{T} y_{t,t',s}\le SC_s-1\tag{25}$$

محدودیت‌های ۲۲ و ۲۳ تضمین می‌کنند که چنانچه دو قطار با هم در ایستگاه قرار بگیرند، متغیر $y_{t,t',s}$ مقدار ۱ بگیرد. محدودیت ۲۲ برای شرایطی است که قطار t زودتر وارد شده باشد و محدودیت ۲۳ برای شرایط عکس آن است. از سوی دیگر محدودیت ۲۴ و ۲۵ تضمین می‌کنند که برای هر قطار در هر ایستگاه، تعداد متغیرهای $y_{t,t',s}$ برای آن قطار بیش از ظرفیت ایستگاه نشود. در صورتی که یک متغیر $y_{t,t',s}$ عدد بگیرد (در آن ایستگاه دو قطار با هم توقف داشته باشند) یعنی حداقل دو جایگاه از ایستگاه مربوطه به‌صورت هم‌زمان برای هر دو قطار پر شده است. با توجه به این مطلب مقدار سمت راست به‌صورت ظرفیت ایستگاه منهای یک در نظرگرفته شده است و به‌عنوان مثال برای ایستگاهی با دو جایگاه عدد سمت راست معادل ۱ است.

برای روشن‌تر شدن موضوع، شرایط ایستگاهی با ظرفیت سه جایگاه را در نظر می‌گیریم که در آن دو قطار ۲ و ۳ به‌ترتیب بعد از قطار ۱ وارد ایستگاه s می‌شوند. براساس محدودیت ۲۴ رابطه‌ی $y_{2,1,s}+y_{3,1,s}+y_{4,1.s}+y_{5,1,s}\le 2$ را خواهیم داشت که با توجه به شرایط تأمین می‌شود. این محدودیت اجازه نمی‌دهد که متغیر $y_{t,l,s}$ دیگری مقدار ۱ بگیرد و از این‌رو در محدودیت‌های ۲۲ و ۲۳ اجازه داده نمی‌شود که قطار دیگری به همراه قطار ۱ در ایستگاه فوق حضور داشته باشد. بدین ترتیب چون برای هر قطار این محدودیت باید تضمین شود، ظرفیت ایستگاه همواره تأمین می‌شود. این محدودیت‌ها تنها برای ایستگاه‌های با ظرفیت بیش از یک قطار (حداقل دو جایگاه برای سوار و پیاده‌کردن مسافران) مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای سایر ایستگاه‌ها محدودیت‌های ۸ و ۱۵ رعایت ظرفیت ایستگاه را تأمین می‌کنند.

همچنین برای کاهش تعداد متغیرهای عدد صحیح و زمان حل، متغیر $y_{t,t',s}$ تنها برای ایستگاه‌هایی در نظرگرفته می‌شود که بیش از یک سکو برای جابه‌جایی مسافران داشته باشد. براین اساس مقدار این متغیر برای سایر ایستگاه‌ها صفر در نظر گرفته می‌شود و معادله‌ی کمکی ۲۶ به مسئله اضافه می‌شود:

$$\begin{aligned}&y_{t,t',s}\le 0;\ \forall l\in L_E; \forall t,t'\in T_l;\\&\forall s\in S_l\ and\ SC_s=1; \forall t>t'\end{aligned}\tag{26}$$

براساس تعریف کنونی مدل، در محدودیت‌های ۲۲ و ۲۳ ممکن است در شرایطی پارامتر M ضریب ۲ بگیرد. این موضوع با توجه به تمرکز بر حل دقیق مدل، ممکن است مشکلاتی ایجاد کند. به‌عنوان مثال شرایطی را متصور می‌شویم که متغیر مربوط به این محدودیت در پایه‌ی اولیه حضور داشته باشد و در جواب بهینه در مدل حضور نداشته باشد. در این شرایط مدت زمان بسیار زیادی لازم است تا قدر نسبت محاسبه شده $\min\{\frac{b_i}{y_{ij}}\},\ y_{ij}>0$ در جدول سیمپلکس، منجر به انتخاب سطر فوق شود و متغیر مربوطه از پایه خارج شود. این شرایط تنها زمانی رخ می‌دهد که تمامی y_{ij} غیرمثبت باشد. از این‌رو متغیر کمکی[13] $y'_{t,t',s}$ را به مدل اضافه کرده و چهار محدودیت مربوطه را کمی تغییر می‌دهیم؛ نتیجه‌ی این تغییر با رعایت شرط‌های $\forall s\in S_l$، $\forall t,t'\in T_l$ و $\forall l\in L_E$ چنین است:

$$S_{lt's} \geq C_{lts} + SF_{l,s} - (۱ - x'_{t,t',s})M - My_{t,t',s};$$
$$SC_s > ۲;\ \forall t > t' \qquad (۲۷)$$

$$S_{lts} \geq C_{lt's} + SF_{l,s} - (۱ - x''_{t,t',s})M - My'_{t,t',s};$$
$$SC_s > ۲;\ \forall t > t' \qquad (۲۸)$$

$$\sum\nolimits_{t',t\neq t'}^{T} (y_{t,t',s} + y'_{t,t',s}) \leq SC_s - ۱;\ SC_s > ۲ \qquad (۲۹)$$

$$\sum\nolimits_{t,t\neq t'}^{T} (y_{t,t',s} + y'_{t,t',s}) \leq SC_s - ۱;\ SC_s \geq ۲ \qquad (۳۰)$$

$$y_{t,t',s} \leq x'_{t,t',s};\ SC_s \geq ۲; \forall t > t' \qquad (۳۱)$$

$$y'_{t,t',s} \leq x''_{t,t',s};\ SC_s \geq ۲; \forall t > t' \qquad (۳۲)$$

$$y_{t,t',s} + y'_{t,t',s} \leq ۰;\ SC_s = ۱; \forall t > t' \qquad (۳۳)$$

در محدودیت ۲۲ و ۲۳، در شرایطی که یکی از متغیرهای $x''_{t,t',s}$ یا $x'_{t,t',s}$ مقدار ۱ می‌گرفتند، یک محدودیت دارای پارامتر M با ضریب ۱، و محدودیت دیگر با ضریب ۲ می‌شد. به‌عنوان مثال در شرایطی که $x''_{t,t',s}$ طبق زمان‌بندی مقدار ۱ دریافت کرده باشد، محدودیت ۲۳ به‌صورت $S_{lts} \geq C_{lt's} + SF_{l,s} - My_{t,t',s}$ و محدودیت ۲۲ به‌صورت $S_{lts} \geq C_{lt's} + SF_{l,s} - My_{t,t',s} - M$ خواهد بود. در شرایطی که متغیر $y_{t,t',s}$ بتواند مقدار ۱ دریافت کند، محدودیت ۲۲ به $S_{lts} \geq C_{lt's} + SF_{l,s} - ۲M$ تبدیل می‌شود که چنان که بیان شد در فرایند حل ممکن است مشکلاتی ایجاد کند. با توجه به تغییرات انجام شده در محدودیت‌های ۲۷ تا ۳۳، مدل اجازه نمی‌دهد شرایط مشابه ایجاد شود.

از سوی دیگر در نظرگرفتن این موضوع باعث اضافه شدن یک تصمیم عدد صحیح به مدل شد که خود موجب سخت شدن فرایند حل می‌شود. با توجه با این که هیچ‌گونه مطالعه یا رویکرد ریاضی درمورد تصمیم‌گیری در شرایط فوق در دسترس نبوده است، با هر دو رویکرد مسائل یکسان حل شدند و با توجه به عملکرد زمانی بهتر مدل دوم، استفاده از متغیر تصمیم اضافی انتخاب شد.

با توجه به این که در ادبیات موضوع مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی فراوانی وجود دارد، دلایل لزوم ارائه‌ی مدلی جدید و همچنین نقاط قوت این مدل نسبت به سایر مدل‌های موجود در ادبیات موضوع قابل بررسی و تأمل است.

۸.۱.۳. نقاط قوت مدل

با توجه به این که در ادبیات موضوع مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی فراوانی وجود دارد، دلایل لزوم ارائه‌ی مدلی جدید و همچنین نقاط قوت این مدل نسبت به سایر مدل‌های موجود در ادبیات موضوع قابل بررسی و تأمل است.

مدل‌های موجود در ادبیات موضوع اغلب مسئله را در شرایطی مورد توجه قرار می‌دهند که یک مدل اولیه مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط را بدون توجه به ظرفیت ایستگاه در نظر می‌گیرد و مدلی مجزا مسئله را برای تعیین شرایط درون ایستگاه و زمان‌بندی آن براساس ظرفیت موجود در نظر می گیرد.[۲۸،۲۲] در مطالعات دیگر، شرایطی در نظرگرفته شده که تلاقی قطارهای در حال حرکت از دو سمت مختلف اتفاق نیفتد و ظرفیت ایستگاه را برای مهیا کردن سبقت در مدل وارد نکرده‌اند.[۱۳،۱۶،۱۹،۲۷،۳۰ و ۳۱]

در مدل ارائه شده در این مطالعه، امکان زمان‌بندی در شرایطی که ظرفیت هر ایستگاه در نظرگرفته شود برخلاف مدل‌های موجود در ادبیات موضوع در مدل وارد شده است. همچنین متغیرهای تصمیم در نظرگرفته شده در این مدل براساس وقایع موجود در یک شبکه‌ی حداقل دوخطه و با در نظرگرفتن امکان سبقت‌گرفتن معرفی شده است. اگرچه این نوع تعریف متغیر در نگاه اول باعث افزایش تعداد متغیرهای صفر و ۱ می‌شود، با توجه به نوع تعریف متغیر و روابط بین قطارها می‌توان بسیاری از حالات را حذف کرد که در نهایت موجب ساده‌شدن مدل می‌شود. همچنین هدف اصلی از ارائه‌ی مدل بر پایه‌ی وقایع، استفاده از آن‌ها در مدل‌های تجزیه‌ی مرسوم همانند تجزیه‌ی دنتزیک ـ ولف بوده است. با استفاده از این نوع تعریف متغیرها امکان ایجاد زیرمسئله‌ها بر روی وقایع به‌سادگی امکان‌پذیر است. همچنین می‌توان با ارائه‌ی مدل‌های قیمت‌گذاری برای تعیین ارزش زیرمسئله، کیفیت ستون‌های اضافه شده به مسئله‌ی اصلی را ارتقا داد. رویکردی مشابه می‌تواند در مدل آزادسازی لاگرانژ نیز بسیار مؤثر باشد.

۹.۱.۳. تحلیل پیچیدگی

براساس نمادگذاری مرسوم مسائل زمان‌بندی[۳۲] می‌توان مسئله را به‌ترتیب $FF_S|MJ;rJ;block|\gamma$ نمایش داد. مسئله‌ی $FF_S||\sum c_j$ برای s بزرگتر از ۳ اثبات شده است که دارای رده پیچیدگی NP-Hard است.[۳۳]
با توجه به این مطلب مسئله‌ی مورد بررسی در این مطالعه که به‌ترتیب $FF_S|M_J;r_J;block|makespan$ مورد نظر است، و با توجه به این که محدودیت‌های بیشتری به مسئله اضافه شده است، قطعاً مسئله‌ی مورد نظر نیز دارای رده پیچیدگی NP-Hard است. از این رو امکان حل دقیق آن برای مسائل بزرگ در زمان قابل قبول وجود ندارد. براساس دانش نویسنده، مطالعه مشابهی نیز در ادبیات موضوع یافت نشد. هرچند در مطالعه‌هایی جداگانه مسائل محدودیت بلاک، محدودیت زمان ورود، یا محدودیت عدم امکان استفاده از تمامی ماشین‌ها مورد بررسی قرارگرفته، مطالعه‌یی جامع که تمامی این شرایط را در نظرگرفته باشد یافت نشد.[۳۴ و ۳۵]

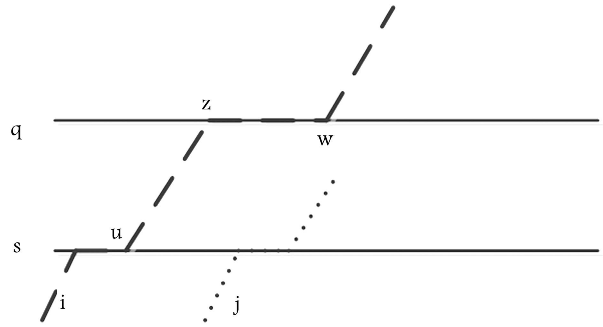
۴. تعیین حد بالا برای مدل پیشنهادی

در این بخش سعی شده برخی شرایط منطقی بین پارامترهای مدل به دست آورده شود و با استفاده از این شرایط تعدادی از متغیرهای عدد صحیح از مسئله حذف شوند. برخی از حالات خاص پارامترهای مدل در این بخش تشریح می‌شود که با استفاده از آن‌ها قواعدی برای تولید جواب‌های خوب ارائه شده است. این جواب‌ها را می‌توان به‌عنوان حد بالا برای کاهش زمان حل مورد استفاده قرار داد. همچنین می‌توان در صورت عمومیت قوانین، آن‌ها را به‌صورت محدودیت‌هایی برای برش قسمتی از فضای حل به مسئله اضافه کرد.

۱.۴. قطارهای با زمان سیر و توقف یکسان

در این قسمت شرایط موجود بین قطارهای کاملاً مشابه مورد بررسی قرار گرفته است. در اغلب شبکه‌های متروی شهری معمولاً چندین دسته قطار با سرعت‌های حرکت و زمان‌های توقف برنامه‌ریزی شده‌ی متفاوت وجود دارد و از هر دسته تعداد مشخصی قطار که دارای ویژگی‌های کاملاً یکسان هستند در حال استفاده است. از این رو مطالعه‌ی روابط بین قطارهای دارای شرایط یکسان می‌تواند در جهت تهیه قوانین بین آن‌ها و کاهش زمان حل مورد استفاده قرارگیرد.

برای این منظور دو قطار i و j را در نظر می‌گیریم که براساس زمان‌بندی انجام شده در ایستگاه‌های دلخواه q و s قرار دارند؛ براساس شرط مطرح شده برای آن‌ها



شکل ۱. شرایط فعلی دو قطار با زمان سیر و توقف برابر.

داریم:

$$d_{i,s}=d_{j,s}, \forall s\in S, \forall i,j \in T;$$
$$t^i_{s,q}=t^j_{s,q}, \forall s,q\in S, i,j\in T \qquad (۳۴)$$

در شکل ۱ شرایط مورد نظر نشان داده شده است. در این شکل q و s نشان‌دهنده‌ی دو ایستگاه میانی دلخواه‌اند. خطوط مورب i و j نشان‌دهنده‌ی دو قطار با شرایط دلخواه است. نقاط z و w به ترتیب نشان‌دهنده‌ی نقاط ورود قطار i به ایستگاه q و خروج از آن ایستگاه‌اند. حد فاصل دو نقطه w و z نشان‌دهنده‌ی زمان توقف قطار i در ایستگاه q است. بدین‌ترتیب نقطه‌ی u نیز نشان‌دهنده‌ی زمان خروج قطار i از ایستگاه s است و بر این اساس حد فاصل دو نقطه‌ی u و z نشان‌دهنده‌ی زمان طی مسیر بین دو ایستگاه q و s توسط قطار i است. برای دو قطار i و j دو حالت قابل تصور است:

$$\begin{aligned}&c_{iq}=c_{is}+t^i_{s,q}+d^i_q\\&s_{jq}\ge c_{is}+t^j_{s,q}+d^j_s+h_s\\&if\ c_{iq}+h_q\le s_{jq}\equiv d^i_q+h_q\le d^j_s+h_s\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

اگر شرایط فوق برقرار باشد، یعنی زمان رسیدن قطار j به ایستگاه q از زمان خروج قطار i به‌علاوه‌ی حداقل زمان ایمنی بیشتر است. با توجه به این که زمان حرکت قطارها برابر است توقف قطار i در ایستگاه q به صرفه نیست و بهتر است که به حرکت خود ادامه دهد. در صورت توقف قطار i در ایستگاه q برای انتظار سبقت گرفتن j به اندازه‌ی $d^j_s+h_s-(d^i_q+h_q)$ قطار i تأخیر خواهد داشت و به همین اندازه تابع هدف افزایش خواهد یافت. همچنین در ازای آن قطار j زودکردی در رسیدن به ایستگاه آخر ندارد. از این رو در این شرایط سبقت گرفتن قطار j از قطار i به صرفه نیست. از این‌رو با توالی کنونی ادامه مسیر طی می‌شود و نیازی به حل محدودیت‌های مربوط به سبقت گرفتن مدل اصلی وجود ندارد.

در حالت دوم شرایطی در نظرگرفته می‌شود که در آن $d^i_q+h_q>d^j_s+h_s$. برای بررسی این حالت شرایط کامل‌تری را در نظر می‌گیریم، بدین ترتیب که $d^i_q+h_q>c_{js}-c_{is}$. در این شرایط برای زمان شروع حرکت قطار j از ایستگاه q خواهیم داشت که:

$$s_{iq}=c_{is}+t^i_{s,q}+\begin{cases}c_{js}-c_{is} & <h_q\\ c_{js}-c_{is} & \ge h_q\end{cases} \qquad (۳۶)$$

هریک از حالات فوق را به‌صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

الف) شرط $d^i_q+h_q>c_{js}-c_{is}$ و $c_{js}-c_{is}<h_q$

در این شرایط با فرض $d^i_q+h_q>c_{js}-c_{is}$ و $c_{js}-c_{is}<h_q$، برای وضعیت سبقت گرفتن و نگرفتن به ترتیب خواهیم داشت:
زمان خروج از ایستگاه q:

$$\begin{aligned}&c_{iq}=c_{is}+t^i_{s,q}+h_q+d^j_q+h_q\\&c_{jq}=c_{is}+(c_{js}-c_{is})+t^j_{s,q}+d^j_q+(h_q-(c_{js}-c_{is}))\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

$$\begin{aligned}&c_{iq}=c_{is}+t^i_{s,q}+d^i_q\\&c_{jq}=c_{is}+(c_{js}-c_{is})+t^j_{s,q}+(d^i_q+h_q-(c_{js}-c_{is}))+d^j_q\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

با مقایسه‌ی دو مقدار فوق می‌توان شرایط سبقت‌گرفتن و سبقت نگرفتن را به دست آورد. در صورتی که براساس پارامترهای مدل شرایط $d^i_q<۲h_q$ برقرار باشد، قطار j بهتر است که در ایستگاه q از قطار i سبقت نگیرد و بالعکس.

در روابط فوق مقدار $h_q-(c_{js}-c_{is})$ در حالتی که سبقت انجام شود نشان‌دهنده‌ی تأخیری است که قطار j باید به‌واسطه‌ی $c_{js}-c_{is}<h_q$ متحمل شود؛ در واقع چون شرط $c_{js}-c_{is}<h_q$ و سرعت‌های برابر وجود دارد، عبارت مورد نظر نشان‌دهنده‌ی حداقل زمان فاصله‌ی ایمنی برای ورود به ایستگاه q است که به زمان حرکت قطار j بین دو ایستگاه s و q اضافه می‌شود. در حالت سبقت نگرفتن نیز مقدار $d^i_q+h_q-(c_{js}-c_{is})$ نشان‌دهنده‌ی زمان توقف اجباری قطار j در ایستگاه قبل یا افزایش زمان حرکت بین دو ایستگاه است. چون زمان توقف دو قطار با هم برابر است زمان توقف قطار i نیز در زمان توقف قطار j تأمین می‌شود. هر دو حالت سبقت‌گرفتن و سبقت نگرفتن با توجه به شرایط مورد بررسی در شکل ۲ نشان داده شده است. در شرایطی که مقدار فاصله‌ی ایمنی تمامی ایستگاه‌ها برابر باشد، یعنی $h_q=h_s\ \forall q,s\in S$، فرض $c_{js}-c_{is}<h_q$ هیچ وقت تأمین نمی‌شود و همواره بین خروج دو قطار از ایستگاه حداقل به اندازه‌ی فاصله‌ی ایمنی زمان وجود دارد.

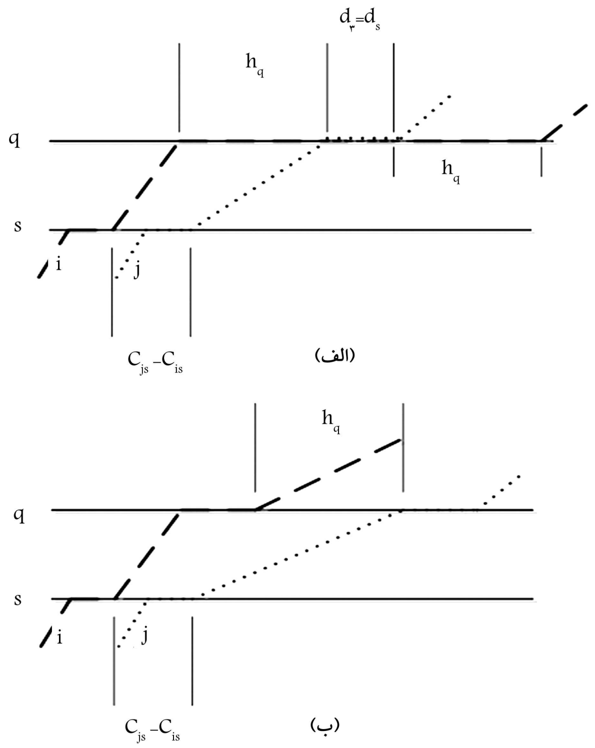
ب) شرط $d^i_q+h_q>c_{js}-c_{is}$ و $c_{is}-c_{is}\ge h_q$

در این شرایط به طریق مشابه می‌توان شرایط سبقت گرفتن و سبقت نگرفتن را به دست آورد. براین اساس در صورتی که طبق پارامترهای مدل شرایط $\frac{۱}{۲}d^j_q>c_{js}-c_{is}\ge d^j_q+h_s$ برقرار باشد، قطار j بهتر است که در ایستگاه q از قطار i سبقت بگیرد و بالعکس. در شرایطی که عکس معادله‌ی فوق برقرار باشد و شرایط سبقت نگرفتن مهیا شود، خواهیم داشت که $\frac{۱}{۲}d^j_q<c_{js}-c_{is}$ که براساس فرض مسئله نیز می‌دانیم که رابطه‌ی $c_{js}-c_{is}<d^j_s+h_s$ برقرار است. با توجه به این دو رابطه خواهیم داشت $\frac{۱}{۲}d^j_q<d^j_s+h_s$ که همواره برقرار است. از این‌رو در این شرایط نیز نیازی به سبقت‌گرفتن وجود ندارد و می‌توان ادعا کرد که در صورت وجود پارامترهای کاملاً یکسان برای تمامی قطارها، عملاً نیازی به سبقت گرفتن وجود ندارد.

ج) تحلیل نتایج

براساس بررسی‌های فوق می‌توان با بررسی پارامترهای مدل برش‌هایی به مدل اضافه کرد یا جواب‌های اولیه‌ی خوبی تولید کرد. این برش‌ها در واقع تعدادی از متغیرهای عدد صحیح و محدودیت‌های مربوط به آن‌ها را از مسئله حذف می‌کند و بدین ترتیب می‌تواند باعث کاهش زمان حل مسئله شود.

فرض کنیم زمان فاصله‌ی ایمنی برای تمامی ایستگاه‌ها برابر است. چنان که بیان شد، در این صورت شرط $d^i_q+h_q<c_{js}-c_{is}$ و $c_{js}-c_{is}<h_q$ هیچ وقت نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا فاصله‌ی زمانی خروج قطار i از ایستگاه و ورود قطار



شکل ۲. سبقت گرفتن و نگرفتن دو قطار با پارامترهای کاملاً برابر طبق فرض‌های موجود.

j به ایستگاه حداقل h_q است، یعنی $s_{js} - c_{is} \geq h_q$ و لذا هیچ وقت شرط $c_{js} - c_{is} < h_q$ تأمین نمی‌شود.

در این شرایط با فرض $c_{js} - c_{is} \geq h_q$ در صورتی که شروط $\frac{۱}{۲}d_q^j < d_s^j + h_s$ و $d_q^j > d_s^j$ برای تمامی ایستگاه‌ها برقرار باشد، می‌توان ادعا کرد که بهتر است هیچ سبقتی اتفاق نیفتد. همچنین در صورتی که هیچ اولویتی برای زمان شروع حرکت قطارها از ایستگاه خاصی وجود نداشته باشد، هر توالی دلخواهی از قطارها با شرایطی که سبقت‌گیری مجاز نباشد، بهینه خواهد بود.

براساس مطالب ارائه شده می‌توان محدودیت ۳۹ را به‌عنوان یک برش تحت شرایط $\forall t \neq t' \in T_l$، $\forall l$ و $\forall s \in S_l$ به مسئله اضافه کرد:

$$
\begin{aligned}
& x_{t,t',s} \leq ۰ \;\; And \\
& if \;\; (\underline{D}_{l,t,s} + SF_{l,s} \leq \underline{D}_{l,s-۱,t'} + SF_{l,s-۱}) \\
& OR \left(\begin{array}{l} (\underline{D}_{l,t,s} + SF_{l,s} > \underline{D}_{l,s-۱,t'} + SF_{l,s-۱}) \\ And \, (\frac{۱}{۲}(\underline{D}_{l,t,s} < \underline{D}_{l,s-۱,t'} + SF_{l,s-۱}) \end{array} \right)
\end{aligned}
\qquad (۳۹)
$$

این محدودیت باعث می‌شود تعداد زیادی از متغیرهای صفر و ۱، و محدودیت‌های مربوط به آن‌ها از مسئله حذف شود و باعث کاهش زمان حل مسئله خواهد شد. به کمک این محدودیت در واقع یک جواب خوب تولید می‌شود که می‌تواند به‌عنوان حد بالای مسئله نیز مطرح شود. باید توجه داشت که در شرایط بررسی شده برای زمان توقف در ایستگاه بازه زمانی در نظر گرفته نشده است. برای واقعی‌تر کردن جواب‌های به دست آمده معمولاً حدود بالا و پایینی برای این زمان‌ها در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که تابع هدف مسئله در پی کمینه‌کردن مجموع زمان‌های رسیدن به ایستگاه آخر است، همواره سعی می‌کند که کم‌ترین مقدار ممکن را برای زمان توقف در هر ایستگاه استفاده کند. از این رو مقدار حداقل زمان توقف در هر ایستگاه نیز به‌عنوان شرط در نظر گرفته شد.

در شرایط عملی نیز چنان که بیان شد در اغلب شبکه‌های مترو تعداد زیادی از قطارهای موجود دارای سرعت و زمان توقف یکسان‌اند که جز فرضیات اولیه‌ی این روابط است. همچنین در اغلب شبکه‌های مترو نیز مشاهده می‌شود که بازه زمان توقف هر قطار در ایستگاه‌های مختلف اغلب مقدار ثابتی است و تنها در برخی از ایستگاه‌ها که تداخل با خطوط دیگر وجود دارد، زمان توقف اندکی افزایش پیدا می‌کند. همچنین زمان‌های ایمنی که نشان‌دهنده‌ی حداقل فاصله‌ی زمانی بین ورود و خروج دو قطار در یک ایستگاه است برای اغلب ایستگاه‌های درون شبکه مقداری ثابت است و تنها در برخی ایستگاه‌ها با شرایط جغرافیایی خاص اندکی تغییر می‌کند. از این رو شرایط بیان شده در محدودیت ۳۹ دور از واقعیت نیست و امکان کاهش چشم‌گیر زمان حل مسئله را فراهم می‌کند.

۲.۴. قطارهایی با زمان سیر برابر و زمان توقف متفاوت

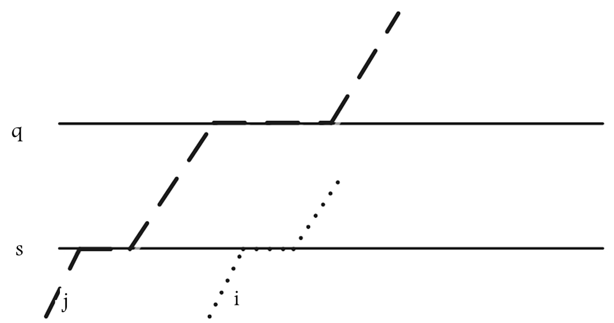
در این قسمت حالتی را در نظر می‌گیریم که دو قطار دلخواه i و j دارای زمان سیر مساوی به‌ازای تمامی بلاک‌ها باشند. همچنین قطار j دارای زمان توقف کم‌تر یا مساوی قطار i باشد و این شرط برای تمامی ایستگاه‌ها برقرار باشد. براین اساس سعی می‌کنیم نشان دهیم که در شرایطی خاص اگر قطار j جلوتر از قطار i در حال حرکت باشد، سبقت گرفتن قطار i از قطار j منجر به افزایش مقدار تابع هدف می‌شود. شرایط مورد نظر در شکل ۳ نشان داده شده است.

همانند حالت قبل تنها شرایطی در نظر گرفته می‌شود که $d_q^j + h_q > c_{is} - c_{js}$. در این شرط s ایستگاه فعلی دو قطار و q ایستگاه بعدی است. در حالت دیگر همان‌طور که بیان شد، سبقت گرفتن عملاً مقرون به صرفه نیست. با توجه به فاصله‌ی ایمنی ایستگاه که وابسته به شرایط جغرافیایی ایستگاه است، دو حالت قابل تصور است که به ترتیب تشریح شده‌اند.

الف) شرط $c_{is} - c_{js} < h_q$ و $d_q^j + h_q > c_{is} - c_{js}$

در این شرایط نیز به طریق مشابه می‌توان شرایط سبقت گرفتن و سبقت نگرفتن را به دست آورد. براین اساس در صورتی که براساس پارامترهای مدل شرایط $۲d_q^j < d_q^i - ۲h_q$ برقرار باشد، قطار i بهتر است که در ایستگاه q از قطار j سبقت نگیرد و بالعکس.

در روابط فوق مقدار $h_q - (c_{is} - c_{js})$ در حالتی که سبقت انجام شود نشان‌دهنده‌ی تأخیری است که قطار j باید به‌واسطه‌ی $c_{is} - c_{js} < h_q$ متحمل شود، در واقع چون شرط $c_{is} - c_{js} < h_q$ و سرعت‌های برابر وجود دارد، عبارت مورد نظر نشان‌دهنده‌ی حداقل زمان فاصله‌ی ایمنی برای ورود به ایستگاه q است



شکل ۳. شرایط اولیه‌ی دو قطار با زمان سیر برابر و زمان توقف متفاوت.

که به زمان حرکت قطار i بین دو ایستگاه s و q اضافه می‌شود. در حالت سبقت نگرفتن نیز مقدار $d_q^j + h_q - (c_{is} - c_{js})$ نشان‌دهنده‌ی زمان توقف اجباری قطار i در ایستگاه قبل یا افزایش زمان حرکت بین دو ایستگاه است. چون زمان توقف قطار i بیشتر است زمان توقف قطار j نیز در زمان توقف قطار i تأمین می‌شود.

ب) شرط $c_{is} - c_{js} < h_q$ و $d_q^j + h_q > c_{is} - c_{js}$

در این شرایط نیز به‌طریق مشابه می‌توان شرایط سبقت گرفتن و سبقت نگرفتن را به دست آورد. براین اساس در صورتی که طبق مدل شرایط $۲d_q^j > ۲(c_{is} - c_{js}) + d_q^i + ۲h_s - d_q^i$ برقرار باشد، قطار j بهتر است که در ایستگاه q از قطار i سبقت بگیرد و بالعکس. به‌عبارت دیگر در صورتی که داشته باشیم $۲d_q^j < ۲d_s^i + ۲h_s + d_q^i$ سبقت گرفتن در ایستگاه q به‌صرفه نیست.

ج) تحلیل نتایج

براساس بررسی‌های فوق می‌توان با مطالعه‌ی پارامترهای مدل برش‌هایی به مدل اضافه، یا جواب‌های اولیه‌ی خوبی تولید کرد.

در این شرایط با فرض $c_{is} - c_{js} \geq h_q$ در صورتی که شروط $۲d_q^j < ۲d_s^i + ۲h_s + d_q^i$، $۲d_q^j < d_q^i + ۲h_q$ و $d_s^j \geq d_s^i$ برای تمامی ایستگاه‌ها برقرار باشد، می‌توان ادعا کرد که بهتر است هیچ سبقتی اتفاق نیفتد.

در حالت $c_{js} - c_{is} < h_q$ نیز همانند گذشته فرض می‌کنیم زمان فاصله‌ی ایمنی برای تمامی ایستگاه‌ها برابر است. همان‌طور که بیان شد، در این صورت شرط $c_{js} - c_{is} < h_q$ و $d_q^i + h_q \geq c_{js} - c_{is}$ هرگز نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا فاصله‌ی زمانی خروج قطار i از ایستگاه و ورود قطار j به ایستگاه حداقل h_q است، یعنی $s_{js} - c_{is} \geq h_q$ و لذا هرگز شرط $c_{js} - c_{is} < h_q$ تأمین نمی‌شود.

فرض برابری فاصله‌های ایمنی ایستگاه‌های مختلف دور از انتظار نیست. این زمان که براساس شرایط جغرافیایی ایستگاه مشخص می‌شود، اغلب در تمامی ایستگاه‌های شبکه‌های متروی شهری و بین شهری یکسان است. از این رو می‌توان ادعا کرد که شرط $c_{js} - c_{is} < h_q$ هرگز تأمین نمی‌شود و لذا تنها باید حالت دیگر مورد بررسی قرار گیرد.

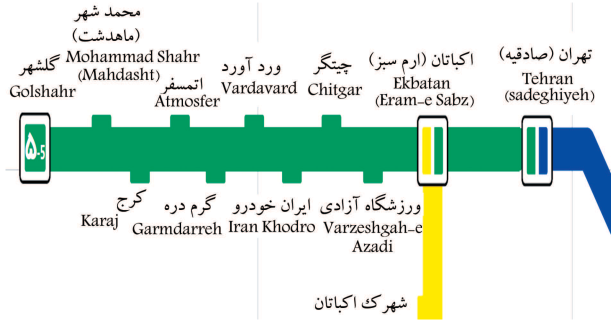
۵. بررسی نتایج محاسباتی

برای بررسی کارایی و صحت مدل ریاضی و قوانین ارائه شده برای کاهش زمان حل، در این قسمت مدل‌هایی ارائه و بررسی می‌شوند. براین اساس سعی شده یک زمان‌بندی برای شبکه‌ی متروی شهری و بین‌شهری تهران ـ کرج ارائه شود. در این شبکه تمامی ایستگاه‌ها به جز ایستگاه‌های مبدأ و مقصد دارای کنارگذر ارتباطی‌اند و یک جایگاه برای پیاده و سوارکردن مسافر دارند. ایستگاه‌های مبدأ و مقصد دارای دو جایگاه پیاده و سوارکردن هستند و نیز تعدادی محل دور زدن (شانت)[۱۴] دارند. همچنین تمامی قطارها مشابه بوده و تنها به‌واسطه‌ی عدم توقف در برخی ایستگاه‌ها، به برخی از آن‌ها سریع‌السیر اطلاق می‌شود. از سوی دیگر زمان‌بندی حرکت قطارها در این شبکه دارای کمینه و بیشینه زمان بین خروج از ایستگاه مبدأ و مقصد است و قطارها باید براساس یک سرفاصله‌ی مشخص شروع به حرکت کنند. نمای کلی این شبکه در شکل ۴ و نمای دقیق‌تر خط ۵ ــ حدفاصل تهران تا گلشهر ــ نیز در شکل ۵ نشان داده شده‌است.

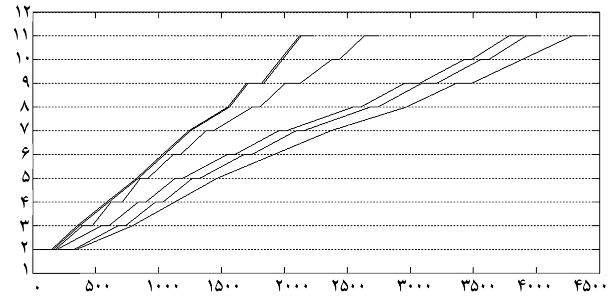
با توجه به کم بودن تنوع قطارها در شبکه و نیز وجود سرفاصله‌ی حرکت قطارها، حل مسئله‌ی جاری شبکه‌ی شهری تهران بسیار ساده می‌شود. از این‌رو برای جلوگیری از کاهش جامعیت مسئله، در شبکه‌ی جاری متروی تهران فرض شده است که تعداد بیشتری از انواع قطارها مورد استفاده قرار بگیرند و زمان‌بندی آن‌ها بر پایه‌ی زمان‌بندی فعلی حرکت و توقف قطارها و به‌صورت منطقی تهیه شده است.

با توجه به این که مسئله از نوع برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای مخلوط[۱۵] است، افزایش تعداد ایستگاه‌ها و قطارها باعث افزایش تعداد متغیرهای عدد صحیح مسئله می‌شود و از این‌رو با افزایش این دو پارامتر زمان حل مسئله به‌صورت نمایی رشد می‌کند. از این رو برای سنجش کارایی قوانین ارائه شده چندین مسئله با تعداد قطارهای متفاوت انتخاب شده است و زمان‌های حل گزارش شده است. تعداد ایستگاه‌ها براساس شرایط خط تهران ـ گلشهر ۱۰ ایستگاه در نظر گرفته شده است، که با توجه

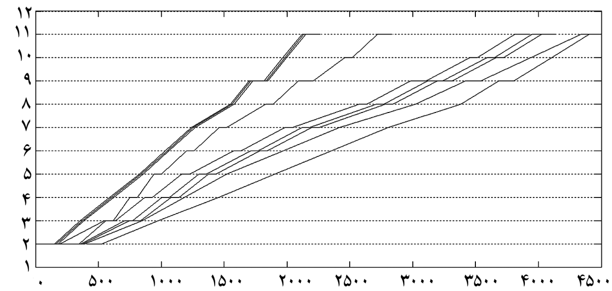
شکل ۴. نمای کلی شبکه متروی تهران و حومه.



شکل ۵. خط ۵ متروی تهران و حومه حد فاصل تهران تا گلشهر.



شکل ۶. زمان‌بندی بهینه‌ی به دست آمده برای ۶ قطار و ۱۲ ایستگاه.



شکل ۷. زمان‌بندی بهینه به دست آمده برای ۹ قطار و ۱۲ ایستگاه.

جدول ۱. زمان حل و تابع هدف به دست آمده.

تعداد قطار	۶	۷	۸	۹
تابع هدف بهینه	۶۳۱۳۹	۶۷۲۸۴	۶۹۷۸۲	۷۴۳۰۷
زمان حل	۳۹٫۵۶	۱۳۴٫۴۶	۱۲۱۸٫۰۹	۱۸۱۸۴٫۹
تابع هدف با وجود برش	۶۳۱۳۹	۶۷۲۸۴	۶۹۷۸۲	۷۴۳۰۷
زمان حل	۱۴٫۶۲	۸۷٫۳۱	۶۸۹٫۵۱	۸۴۴۹٫۳۷
درصد بهبود زمان حل	۶۳	۳۵	۴۳	۵۴

به نیاز ایستگاه‌های مجازی مبدأ و مقصد تعداد ۱۲ ایستگاه در مسئله مورد استفاده قرار گرفته است و زمان‌بندی برای ۱۰ ایستگاه اعلام می‌شود.

برای هر یک از مسائل نتایج زمان‌بندی، تابع هدف و زمان حل به دست آمده با محدودیت‌های بیان شده در مدل گزارش شده است. چنان که بیان شد برای بررسی کارایی قوانین ارائه شده، هر مسئله با استفاده از قوانین ارائه شده نیز حل شده است و مدت زمان حل و تابع هدف به دست آمده در این شرایط نیز گزارش شده است. نتایج محاسباتی با استفاده از یک رایانه‌ی شخصی با پردازنده ۱٫۶GHz و حافظه چهار GB استفاده شده است.

چنان که در جدول ۱ مشاهده می‌شود استفاده از قوانین به دست آمده منجر به حذف جواب بهینه از منطقه‌ی جواب نمی‌شود و جواب بهینه در حالت استفاده از قوانین معرفی شده به دست آمده است. چنان که مشاهده می‌شود زمان حل بیش از ۳۵٪ کاهش یافته، که نشان‌دهنده‌ی کارایی قوانین ایجاد شده است. زمان‌بندی به دست آمده برای مسئله‌ی ۶ و ۹ قطار در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است.

در این مسائل ظرفیت ایستگاه ۹ معادل ۳ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در شکل ۶ تنها از دو ظرفیت این ایستگاه استفاده شده است و در مسائل با هشت، نه و ده قطار از هر سه ظرفیت این ایستگاه استفاده شده است. در سایر ایستگاه‌هایی که ظرفیت آن‌ها ۱ است، حداقل فاصله‌ی ایمنی به‌اندازه‌ی ۱۵ یا ۳۰ ثانیه در نظر گرفته شده است و بین ورود و خروج هر دو قطار از ایستگاه حداقل به این اندازه فاصله وجود دارد.

۶. نتیجه‌گیری

در این مطالعه مسئله‌ی زمان‌بندی خطوط ریلی در شبکه‌های مشابه مترو مورد توجه قرار گرفت. تابع هدف مسئله کمینه‌کردن زمان‌های رسیدن تمامی قطارها به ایستگاه آخر است. ظرفیت ایستگاه‌ها مورد توجه قرارگرفته و اجازه‌ی حضور قطارها بیش از ظرفیت ایستگاه وجود ندارد. محدودیت‌های عمومی شبکه نظیر حداقل و حداکثر زمان حرکت بین ایستگاه‌ها و زمان توقف در هر ایستگاه نیز مورد توجه قرار گرفته است. با توجه به محدودیت‌های فوق یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی ارائه شد. براساس مطالعات موجود در ادبیات موضوع مسئله، مدل مورد بررسی در رده‌ی سختی NP-Hard قرار می‌گیرد.

با توجه به این که مسائل دنیای واقعی از مدل مسئله‌ی فوق در زمان قابل قبول حل نمی‌شود، سعی شد تا با ارائه‌ی قوانینی منطقی تعداد متغیرهای عدد صحیح و درنتیجه زمان حل کاهش یابد. این قوانین بر پایه‌ی روابط بین پارامترهای مدل ارائه شده‌اند. ایده‌ی اصلی ارائه‌ی این قوانین مبنی بر حذف متغیرهای عدد صحیح بین قطارها با شرایط و پارامترهای یکسان بوده است.

برای بررسی کارایی قوانین پیشنهادی ارائه شده دسته‌یی از مسائل بر پایه‌ی اطلاعات متروی بین‌شهری تهران ـ کرج مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج حاصله نشان می‌دهد که قوانین ارائه شده برای تولید حد بالا از کارایی خوبی برخوردار بوده و در تمامی مسائل مورد بررسی جواب بهینه را در زمانی کم‌تر به دست آورده‌اند. این قوانین باعث حذف تعداد زیادی از متغیرهای صفر و ۱ از مسئله شده‌اند و درنتیجه در زمان کم‌تر تعداد گره بیشتری مورد بررسی قرار گرفته است. استفاده از این قوانین می‌تواند در شبکه‌های بزرگ که دارای تعداد زیادی قطار با شرایط مشابه سرعت و زمان توقف در ایستگاه‌ها هستند مورد استفاده قرار گیرد.

توسعه‌ی حدود بالای جدید برای مسئله، ترکیب کردن برش‌های ارائه شده با یک الگوریتم Bisection، استفاده از روش‌های تجزیه‌ی مرسوم در ادبیات موضوع همانند تجزیه دنتزیک ـ ولف یا به‌صورت جامع‌تر Branch and Price و مدل‌سازی و حل مسئله با استفاده از برنامه‌ریزی محدودیت‌ها از جمله مواردی است که می‌توان مطالعه را در راستای آن‌ها توسعه داد.

پانوشت‌ها

1. polynominal time
2. upper bound
3. mixed integer programming
4. lower bound
5. periodic event scheduling problem (PESP)
6. minimax
7. pure integer programing
8. depth first search
9. breath first search
10. Lagrangian relaxation
11. column generation
12. bisection
13. slackness
14. Shunt
15. mixed integer linear programing

منابع (References)

1. Hylton, S., *The Grand Experiment: The Birth of the Railway Age 1820 - 1845*, European Rail Atlas Series, Ian Allan Publishing (2007).
2. Acuna-Agost, R. and et al. "A MIP-based local search method for the railway rescheduling problem", *Networks*, **57**(1), pp. 69-86 (2011).
3. Petersen, E.R., Taylor, A.J. and Martland, C.D. "An introduction to computer aided train dispatching", *J. Adv. Transp,* **20** pp. 63-72 (1986).
4. Ghoseiri, K., Szidarovszky, F. and Asgharpour, M.J. "A multi-objective train scheduling model and solution", *Transportation Research Part B: Methodological,* **38**, pp. 927-952 (2004).
5. Sahin, I. "Railway traffic control and train scheduling based on inter-train conflict management", *Transportation Research Part B: Methodological,* **33**(7), pp. 511-534 (1999).
6. Hellström, P., *Analysis and Evaluation of Systems and Algorithms for Computer-aided Train Dispatching*, Uppsala University, Sweden (1998).
7. Amit, I. and Goldfarb, D. "The timetable problem for railways", *Dev. Oper. Res*, **2**, pp. 379-387 (1971).
8. Szpigel, B. "Optimal train scheduling on a single track railway", *Operations Research*, **72**, pp. 343-352 (1973).
9. Jovanovic, D. and Harker, P.T. "Tactical scheduling of rail operations: the SCAN I system", *Transportation Science, INFORMS*, **25**(1), pp. 46-64 (1991).
10. Jia, L.-M. and Zhang, X.-D. "Distributed intelligent railway traffic control based on fuzzy decision making", *Fuzzy Sets Syst,* **62**(3), pp. 255-265 (1993).
11. Iida, Y. "Timetable preparation by A.I. approach", in *Proceeding of European Simulation Multiconference*, Nice, France, pp. 163-168 (1988).
12. Cordeau, J.F., Toth, P. and Vigo, D. "A survey of optimization models for train routing and scheduling", *Transp. Sci*, **32**(4), pp. 380-404 (1998).
13. Higgins, A., Kozan, E. and Ferreira, L. "Optimal scheduling of trains on a single line track", *Transportation Research Part B: Methodological*, **30**(2), pp. 147-161 (1996).

۱۴. محسن پور سید آقایی، محمد مهدی سپهری، برنامه‌ریزی حرکت قطارها در خطوط یک جمله، نشریه دانشکده فنی، دوره ۳۳، شماره ۲، شماره صفحه ۸۷-۹۷ (شهریور ۱۳۷۰).

۱۵. کیوان قصیری و فهیمه مرشدسلوک، ارایه یک مدل ابتکاری مبتنی بر سیستم اجتماع مورچه‌ها برای حل مسئله زمان بندی حرکت قطار، پژوهشنامه حمل و نقل، سال دوم، شماره ۴، شماره‌صفحه ۲۵۷-۲۷۰ (زمستان ۱۳۸۴).

16. Kroon, L.G. and Peeters, L.W.P. "A variable trip time model for cyclic railway timetabling", *Transportation Science, INFORMS*, **37**(2), pp. 198-212 (2003).
17. Ghoseiri, K., Szidarovszky, F. and Asgharpour, M.J. "A multi-objective train scheduling model and solution", *Transportation Research Part B: Methodological,* **38**(10), pp. 927-952 (2004).
18. Törnquist, J. and Persson, A. "N-tracked railway traffic re-scheduling during disturbances", *Transportation Research Part B: Methodological*, **41**(3), pp. 342-362 (2007).
19. Zhou, X. and Zhong, M. "Bi-criteria train scheduling for high-speed passenger railroad planning applications", *European Journal of Operational Research*, **167**(3), pp. 752-771 (2005).
20. Caprara, A., Fischetti, M. and Toth, P. "Modeling and solving the train timetabling problem", *Operational Research*, **50**(5), pp. 851-861 (2002).
21. Cai, X., Goh, C.J. and Mees, A.I. "Greedy heuristics for rapid scheduling of trains on a single track", *IIE Trans,* **30**(5), pp. 481-493 (1998).
22. Castillo, E. and et al. "Timetabling optimization of a mixed double- and single-tracked railway network", *Applied Mathematical Modelling*, **35**, pp. 859-878 (2011).
23. Törnquist, J. "Railway traffic disturbance management", *Transportation Research Part A: Policy Pract*, **41**(3), pp. 249-266 (2007).
24. Lee, Y. and Chen, C.-Y. "A heuristic for the train pathing and timetabling problem", *Transportation Research Part B,* **43**, pp. 837-851 (2009).
25. D'Ariano, A., Pacciarelli, D. and Pranzo, M. "A branch and bound algorithm for scheduling trains in a railway network", *European Journal of Operational Research,* **183**(2), p. 643-657 (2007).
26. Caprara, A. and et al. "Passenger railway optimization", in: C. Barnhart, G. Laporte (Eds.). *Handbooks in Operations Research and Management Science*, **14**, pp. 129-187 (2006).
27. Min, Y.-H. and et al. "An appraisal of a column-generation-based algorithm for centralized train-conflict resolution on a metropolitan railway network", *Transportation Research Part B*, **45**, pp. 409-429 (2011).
28. Castillo, E. and et al. "Timetabling optimization of a single railway track line with sensitivity analysis", *TOP*, **17**(2), pp. 256-287 (2009).
29. Cacchiani, V., Caprara, A. and Toth, P. "A column generation approach to train timetabling on a corridor", *4OR: A Quarterly Journal of Operations Research*, **6**(2), pp. 125-142 (2007).
30. Zhou, X. and Zhong, M. "Single-track train timetabling with guaranteed optimality: Branch-and-bound algorithms with enhanced lower bounds", *Transportation Research Part B: Methodological*, **41**(3), pp. 320-341 (2007).

31. Meng, X., Jia, L. and Qin, Y. "Train timetable optimizing and rescheduling based on improved particle swarm algorithm", *Transportation Research Record*, **2**, pp. 71-79 (2010).

32. Pinedo, M.L., *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*, 3rd ed, Springer. 696 (2008).

33. Kis, T. and Pesch, E. "A review of exact solution methods for the non-preemptive multiprocessor flowshop problem", *European Journal of Operational Research*, **164**(3), pp. 592-608 (2005).

34. Ribas, I., Leisten, R. and Framin˜an, J.M. "Review and classification Framin˜ of hybrid flowshop scheduling problems from a production system and a solutions procedure perspective", *Computers & Operations Research*, **37**, pp. 1439-1454 (2010).

35. Ruiz, R. and Vázquez-Rodríguez, J.A. "The hybrid flow shop scheduling problem", *European Journal of Operational Research,* **205**, p. 1-18 (2010).