

# پایش پروفایل‌های خطی ساده با استفاده از نمودارهای کنترل تطبیقی $T^2$ در فاز ۲

رضا برادران کاظم‌زاده\* (دانشیار)

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

امیرحسین امیری (استادیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

بهروش کوهستانی (کارشناس ارشد)

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۳ (دوره ۱ - شماره ۲، ص. ۸۵-۷۳)

پایش پروفایل‌ها یکی از موضوع‌های نوین تحقیقاتی در حوزه کنترل فرایند آماری است. در بیشتر مقالات موجود در زمینه ادبیات پایش پروفایل‌ها از نمودارهایی استفاده می‌شود که در آنها نرخ نمونه‌گیری از فرایند ثابت است. این نمودارها علی‌رغم مزیت‌های زیاد، نسبت به تغییرات کوچک و متوسط در فرایند حساس نیستند. برای پیگیری بر این کاستی، استفاده از نمودارهای تطبیقی منطقی به نظر می‌رسد. این نمودارها قادرند با متغیر کردن یک یا چند پارامتر نمونه‌گیری در طول مدت فرایند، تغییرات فرایند را با سرعت بالاتری کشف کنند. در این نوشتار چهار نمودار کنترل تطبیقی براساس نمودار چندمتغیره  $T^2$  برای پایش پروفایل‌های خطی ساده مورد بررسی قرار گرفته و عملکرد آنها با استفاده از معیار متوسط زمان هشدار با یکدیگر مقایسه می‌شود. برای محاسبه معیار مقایسه از زنجیره مارکوف استفاده شده است. نتایج تحقیق نشان‌گر عملکرد بهتر نمودارهای تطبیقی در مقایسه با نمودار  $T^2$  با نرخ ثابت در تمام شیفت‌هاست.

واژگان کلیدی: کنترل فرایند آماری، پایش پروفایل‌ها، نمودار کنترل تطبیقی، نمودار  $T^2$  هتلینگ.

## ۱. مقدمه

امروزه کیفیت نقش بسیار مهمی در موفقیت و کامیابی سازمان‌های تولیدی و خدماتی ایفا می‌کند. تعاریف مختلفی از کیفیت بیان شده که در یکی از جدیدترین آنها، کیفیت را معکوس متناسب با میزان تغییرپذیری تعریف کرده‌اند.<sup>[۱]</sup> این تعریف جدید نشان می‌دهد که کاهش میزان تغییرپذیری در مشخصه‌های کیفی، یکی از اصلی‌ترین نگرانی‌های موجود در این حوزه است. در میان ابزارها و روش‌های متفاوت موجود برای بهبود کیفیت و کاهش تغییرپذیری، کنترل فرایند آماری (SPC)<sup>[۱]</sup> و نمودار کنترل -- به عنوان یکی از ابزارهای آن -- یکی از مهم‌ترین تکنیک‌هایی است که می‌توان از آن بهره‌ی مؤثر گرفت. نمودار کنترل ابزار مفیدی است که با استفاده از آن می‌توان نتایج اندازه‌گیری‌های مربوط به مشخصه کیفی را با هدف ایجاد تمایز میان تغییرات تصادفی و تغییرات معنادار رسم کرد.

در بیشتر تحقیقات انجام شده در این حوزه، فرض می‌شود که کیفیت محصول یا فرایند به وسیله توزیع یک مشخصه کیفی یا به‌طور هم‌زمان چند مشخصه کیفی توصیف و به کمک نمودارهای کنترل تک‌متغیره یا چندمتغیره تحت کنترل قرار می‌گیرد. با این حال در بسیاری از کاربردها، کیفیت محصول یا عملکرد فرایند به وسیله

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۱۶، اصلاحیه: ۱۳۹۲/۶/۷، پذیرش: ۱۳۹۲/۷/۳.

rkazem@modares.ac.ir  
amiri@shahed.ac.ir  
b.kouhestani@modares.ac.ir

رابطه‌ی بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود. محققین این رابطه را پروفایل، اثر<sup>۲</sup> یا موج<sup>۳</sup> نامیده‌اند. پروفایل‌ها را می‌توان براساس نوع رابطه به انواع پروفایل‌های خطی -- شامل خطی ساده، خطی چندگانه، خطی چندمتغیره، خطی چندجمله‌یی -- و نیز سایر پروفایل‌های غیرخطی، اسپیرالین، موجی شکل و... با روابط پیچیده‌تر تقسیم کرد.

در طول سالیان اخیر، پایش پروفایل‌ها و به‌ویژه پروفایل‌های خطی ساده مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. در این پروفایل، یک رابطه خطی ساده بین متغیر پاسخ و یک متغیر مستقل وجود دارد. از طرفی، تحقیقات مرتبط با پایش پروفایل‌ها به تفکیک دو فاز صورت می‌گیرد. روش‌های آماری مختلفی برای هر یک از این دو فاز مناسب است و برای هر یک معیارهای آماری متفاوتی وجود دارد.

در فاز ۱ پروفایل‌های خطی ساده تاکنون تحقیقات زیادی صورت گرفته است.<sup>[۷-۱]</sup> در فاز ۱، مجموعه‌ی داده‌ها از گذشته در دسترس است که هدف آن کسب اطلاعات در مورد پراکندگی فرایند در طول زمان، ارزیابی پایداری فرایند و برآورد پارامترهای مدل در فرایند تحت کنترل است. در روش‌های مربوط به این فاز، مقدار ثابتی برای احتمال خطای نوع ۱ منظور می‌شود و پس از محاسبه‌ی حدود کنترل، توان آزمون را با اعمال شیفت‌های مختلف در پارامترهای مختلف محاسبه و از آن

با فرض وجود شیب و عرض از مبدأ به عنوان دو مشخصه‌ی اصلی در پایش یک رابطه‌ی رگرسیون خطی ساده، از نمودار  $T^2$  می‌توان برای پایش پروفایل خطی ساده استفاده کرد.<sup>[۴]</sup> در این صورت، در هر مرحله از نمونه‌گیری با  $n_j$  زوج داده به صورت  $(x_i, y_{ij})$ ،  $i = 1, 2, \dots, n_j$  مواجهیم که در حالت تحت کنترل، رابطه‌ی بین متغیر پاسخ و متغیر مستقل چنین فرض می‌شود:

$$Y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n_j \quad (1)$$

به طوری که  $\varepsilon_{ij}$  متغیر تصادفی مستقل نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  است. در فاز ۲ مقادیر پارامترهای  $A_1, A_0$  معلوم فرض می‌شود و با استفاده از روش حداقل مربعات، به کمک روابط ۲ و ۳ محاسبه می‌شوند.

$$a_{0j} = \bar{y}_j - a_{1j} \bar{x}_j, \quad a_{1j} = \frac{s_{xy(j)}}{s_{xx(j)}} \quad (2)$$

که در آن  $\bar{y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$ ،  $\bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$ ،  $S_{xy(j)} = \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j) y_{ij}$ ،  $S_{xx(j)} = \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$  است.

$$MSE_j = \frac{SSE_j}{n_j - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} e_{ij}^2}{n_j - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - a_{0j} - a_{1j} x_{ij})^2}{n_j - 2} \quad (3)$$

برآوردکننده‌های  $a_{0j}$  و  $a_{1j}$  دارای توزیع نرمال با میانگین‌های  $A_0$  و  $A_1$  هستند و واریانس‌های آنها عبارت است از:

$$\sigma_{a_0}^2 = \sigma^2 \left( \frac{1}{n_j} + \frac{\bar{x}_j^2}{s_{xx(j)}} \right), \quad \sigma_{a_1}^2 = \frac{\sigma^2}{s_{xx(j)}} \quad (4)$$

افزون بر این،  $a_{0j}$  و  $a_{1j}$  مستقل از یکدیگر نیستند و کوواریانس آنها عبارت است از:

$$\sigma_{a_0 a_1}^2 = -\sigma^2 \frac{\bar{x}_j}{s_{xx(j)}} \quad (5)$$

حال اگر برای نمونه‌ی  $j$ ام، شیب و عرض از مبدأ نمونه‌ی در رابطه‌ی ۲ را با بردار  $z_j = (a_{0j}, a_{1j})^T$  نشان دهیم، امید ریاضی ( $U$ ) و ماتریس واریانس - کوواریانس ( $\Sigma$ ) بردار  $z_j$  عبارت‌اند از:

$$U = (A_0, A_1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{a_0}^2 & \sigma_{a_0 a_1}^2 \\ \sigma_{a_0 a_1}^2 & \sigma_{a_1}^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

با این تعاریف، آماره‌ی  $T^2$  چنین تعریف می‌شود:

$$T_j^2 = (z_j - U)^T \Sigma^{-1} (z_j - U) \quad (7)$$

همچنین با در نظر گرفتن شیب و عرض از مبدأ به عنوان دو مشخصه‌ی کیفی در این حالت، حد کنترل بالای نمودار از رابطه‌ی  $UCL = \chi_{2, \alpha}^2$  به دست می‌آید. اگر فرض کنیم در حالت خارج از کنترل، عرض از مبدأ از  $A_0$  به  $A_0 + \lambda \sigma$  و شیب از  $A_1$  به  $A_1 + \beta \sigma$  شیفیت پیدا کند، پارامتر غیرمرکزی از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید.

$$\tau = (\lambda + \beta \bar{x})^T n + \beta^T S_{xx} \quad (8)$$

در مطالعات صورت گرفته همه‌ی  $n_j$ ها یکسان و برابر با  $n$  فرض می‌شوند. در حالت عادی نیز فواصل نمونه‌گیری‌ها ثابت و برابر با  $t$  است. لذا می‌توان گفت

برای مقایسه‌ی عملکرد آماری نمودارهای کنترل استفاده می‌کنند. اما هدف از فاز ۲، کشف سریع شیفت و روند در پارامترهای مدل براساس مقادیر طراحی شده در فاز ۱ است. این موضوع معمولاً به وسیله‌ی معیارهای متوسط طول دنباله و متوسط زمان هشدار اندازه‌گیری می‌شود. در ادبیات، روش‌های متفاوتی برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ پیشنهاد شده است.<sup>[۱۱-۱۵، ۴]</sup> اطلاعات بیشتر درخصوص روش‌های پایش انواع دیگر پروفایل‌ها نیز موجود است.<sup>[۱۲]</sup>

در چند دهه‌ی اخیر برای بهبود نمودارهای کنترل به منظور افزایش سرعت کشف انحرافات کوچک تا بزرگ، روش‌های مختلفی ارائه شده که یکی از آنها استفاده از نمودارهای کنترل تطبیقی است. نمودار کنترل تطبیقی، نموداری است که دست کم یکی از پارامترهای آن، یعنی اندازه نمونه در هر بار نمونه‌گیری، فاصله‌ی زمانی بین نمونه‌ها و ضریب حدود کنترل، در طول زمان متغیر باشد. «تطابق‌پذیری» ویژگی است که به نمودارهای مختلف برای بهبود کارایی آنها اضافه می‌شود و کارایی آنها را نسبت به نمودارهای استاندارد، با شناسایی سریع‌تر تغییرات رخ داده در فرایند افزایش می‌دهد. در نمودارهای تطبیقی حدود هشدار روی نمودار کنترل رسم شده و آن را به چندین ناحیه تقسیم می‌کند. در این نمودارها برای تعیین پارامترهای مورد نظر در نمونه‌ی بعدی، از مقدار آماره‌ی محاسبه شده‌ی کنونی استفاده می‌شود. از مهم‌ترین انواع نمودارهای تطبیقی می‌توان به نمودار با اندازه نمونه‌ی متغیر ( $VSS$ )، نمودار با فواصل نمونه‌گیری متغیر ( $VSI$ ) و نمودار با اندازه نمونه و فواصل نمونه‌گیری متغیر ( $VSSI$ ) اشاره کرد.

تحقیقات زیادی در رابطه با استفاده از روش‌های تطبیقی در نمودارهای کنترل مرسوم صورت گرفته که از آن جمله می‌توان به نمودارهای تطبیقی  $\bar{X}$ <sup>[۱۵-۲۳]</sup> و نیز نمودارهای  $VSS$ ،  $VSI$ ،  $VSS$ ،  $CUSUM$ <sup>[۱۶]</sup>،  $VSI$ ،  $T^2$  و  $VSSI$ ،  $EWMA$ <sup>[۱۸]</sup>،  $VSI$ ،  $EWMA$ <sup>[۲۰]</sup> اشاره کرد. علی‌رغم تحقیقات زیاد انجام شده در این زمینه، حجم مطالعات صورت گرفته در زمینه‌ی پایش پروفایل‌های خطی با استفاده از نمودارهای تطبیقی زیاد نیست و از میان آنها، در سه مقاله از نمودار تطبیقی  $VSI$  استفاده شده.<sup>[۲۱، ۲۲]</sup> یکی از آنها نیز به تطبیقی کردن ضریب هموارسازی در روش  $EWMA$  پرداخته است.<sup>[۲۳]</sup> با توجه به عملکرد مؤثر روش‌های تطبیقی در افزایش سرعت شناسایی تغییرات در نمودارهای مرسوم، می‌توان این روش‌ها را در پروفایل‌ها برای رسیدن به نتایج مشابه به کار بست. هدف اصلی در این مطالعه، ارائه‌ی نمودارهای تطبیقی براساس نمودار  $T^2$  برای پایش پروفایل خطی ساده در فاز ۲ است.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش ۲ نمودار  $T^2$  ارائه شده در پایش پروفایل‌های خطی ساده توضیح داده می‌شود. سپس در بخش ۳ به ارائه‌ی روش‌های تطبیقی پرداخته می‌شود. در بخش ۴ نحوه‌ی محاسبه‌ی شاخص عملکرد به کمک زنجیره‌ی مارکوف شرح داده می‌شود. بخش ۵ و ۶ نیز به ترتیب به ارائه‌ی مثال عددی و مقایسه روش‌ها و نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

## ۲. نمودار $T^2$

یکی از رایج‌ترین روش‌های آماری موجود برای پایش همزمان چند مشخصه‌ی کیفی، استفاده از نمودار کنترل  $T^2$  هتالینگ است که در حقیقت تعمیمی از نمودار کنترل شوهارت از حالت تک‌متغیره به چندمتغیره است.<sup>[۲۴]</sup> نمودار  $T^2$  به دلیل سادگی و البته عملکرد آماری مناسب، منجر به توسعه‌ی نرم‌افزارهایی برای استفاده از این نمودار شده است.

مقدار  $b_1$  از رابطه‌ی ۱۱ محاسبه می‌شود.

$$b_1 = \frac{P(\chi_p^2 < w)}{P(\chi_p^2 < UCL)} \quad (11)$$

هنگامی که فرایند در شرایط تحت کنترل آماری به سر می‌برد، مقدار ARL به اندازه نمونه وابسته نیست، زیرا توزیع  $T_j^*$  که از توزیع مربع کا پیروی می‌کند به مقدار  $n$  بستگی ندارد، در حالی که در شرایط خارج از کنترل توزیع  $T_j^*$  که از توزیع مربع کا غیرمرکزی پیروی می‌کند به اندازه نمونه وابسته است. بنابراین با برقرار بودن رابطه‌ی ۱۰ و داشتن یک  $\alpha$  مشخص، مطمئن خواهیم بود که دو روش در حالت تحت کنترل شرایط کاملاً یکسانی دارند و بنابراین می‌توان آنها را بر اساس ARL خارج از کنترل با هم مقایسه کرد.

### ۲.۳. طراحی نمودار $VSI T^2$

با فرض این که در نمودار  $T^2$ ، فاصله‌ی ثابت میان دو نمونه‌گیری  $t_0$  باشد، در طراحی این نمودار از دو فاصله نمونه‌گیری طولانی‌تر ( $l > 1$ ) و کوتاه‌تر ( $0 < s < 1$ ) استفاده می‌شود. حد هشدار  $w$  ( $0 < w < UCL$ ) نیز به عنوان معیاری برای تعیین فاصله‌ی نمونه‌گیری بعدی به کار می‌رود.

به طور کلی فاصله نمونه‌گیری در مرحله‌ی  $1 + j$ ام به مقدار آماره نمونه‌ی در مرحله  $j$ ،  $(T_j^*)$  وابسته است. اگر  $T_j^* < w$  باشد، آنگاه نمونه‌ی بعدی در  $lt_0$  واحد زمانی بعد و اگر  $w < T_j^* < UCL$  باشد، نمونه‌ی بعدی در  $st_0$  واحد زمانی بعد گرفته خواهد شد. بنابراین نمودار  $T^2$  با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر تعریف می‌شود:

$$t_{j+1} = \begin{cases} lt_0 & \text{if } T_j^* \leq w \\ st_0 & \text{if } w < T_j^* < UCL \end{cases} \quad (12)$$

فرایند زمانی خارج از کنترل شناخته می‌شود که  $T_j^* > UCL$  باشد. انتخاب مقادیر  $l$  و  $s$  چنان است که در شرایط تحت کنترل همواره رابطه‌ی ۱۳ برقرار باشد:

$$(lt_0)b_1 + (st_0)b_2 = t_0 \quad (13)$$

که با ساده‌سازی داریم:

$$lb_1 + sb_2 = 1, \quad b_1 + b_2 = 1 \quad (14)$$

در رابطه‌ی ۱۴،  $b_1$  احتمال تجمعی زیر حد هشدار  $w$  است که از رابطه‌ی ۱۱ محاسبه می‌شود. برقرار بودن رابطه‌ی ۱۴ که نشان‌گر نرخ نمونه‌گیری یکسان در دو روش در حالت تحت کنترل است به همراه  $ATS$  یکسان، تضمین می‌کند که هر دو روش در حالت تحت کنترل شرایط کاملاً یکسانی دارند و بنابراین می‌توان آنها را برحسب  $ATS$  خارج از کنترل با هم مقایسه کرد.

### ۳.۳. طراحی نمودار $VSSI T^2$

با فرض این که در نمودار  $T^2$ ، اندازه نمونه‌ی ثابت  $n_0$  در فواصل زمانی ثابت  $t_0$  گرفته می‌شود، در طراحی این نمودار از دو اندازه نمونه‌ی  $n_1$  و  $n_2$  و دو فاصله‌ی نمونه‌گیری  $lt_0$  و  $st_0$  استفاده می‌شود، به طوری که  $n_1 < n_0 < n_2$  و  $0 < s \leq 1 \leq l$ . حد هشدار  $w$  ( $0 < w < UCL$ ) نیز به عنوان معیاری برای تعیین اندازه نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری بعدی به کار می‌رود.

اگر چه می‌توان از دو حد هشدار جداگانه، یکی برای تعیین اندازه نمونه و دیگری برای تعیین فاصله نمونه‌گیری بعدی استفاده کرد، به منظور حفظ سادگی نمودار تنها از

در این روش از یک نمودار کنترل با نرخ نمونه‌گیری ثابت<sup>۴</sup> استفاده می‌شود. اگرچه نمودار  $FSR T^2$  عملکرد خوبی در تشخیص شیفت‌های بزرگ نشان می‌دهد، در تشخیص شیفت‌های کوچک و متوسط برحسب معیار متوسط طول دنباله<sup>۵</sup> کارایی نسبتاً ضعیفی دارد.

### ۳. روش‌های مورد بررسی

در تحقیقات صورت گرفته بر نمودار  $T^2$ ، نشان داده شده است که شناسایی تغییرات کوچک و متوسط ایجاد شده در پارامترهای فرایند با استفاده از نمودارهای کنترل تطبیقی بسیار سریع‌تر انجام می‌شود. بنابراین انتظار می‌رود استفاده از این تکنیک‌ها در پایش پروفایل‌ها نیز با نتایج خوبی همراه باشد. در این مطالعه، چهار روش تطبیقی برای نمودار  $T^2$ ، مورد بررسی قرار گرفته و عملکرد آنها با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف و مقایسه‌ی متوسط زمان هشدار مورد بررسی قرار گرفته است. در پایش پروفایل‌ها دو مفهوم برای اندازه نمونه وجود دارد:

۱. تعداد سطوح نمونه‌برداری شده در هر پروفایل، یا به عبارتی تعداد سطوح متغیر مستقل  $X$ ؛

۲. تعداد نمونه‌های در نظر گرفته شده برای هر سطح در هر بار نمونه‌گیری.

در این مقاله از تعریف اول برای نمودارهای تطبیقی با اندازه نمونه‌ی متغیر استفاده شده است. به عبارت دیگر در بیشتر مثال‌های موجود در ادبیات و نیز مدل‌های استاندارد استفاده شده در این تحقیق، تعداد سطوح  $X$  ثابت و برابر با ۴ است که در نمودارهای تطبیقی  $VSS$  به متغیر کردن این سطوح می‌پردازیم.

### ۱.۳. طراحی نمودار $VSS T^2$

با فرض این که در نمودار  $T^2$  استاندارد از اندازه نمونه‌ی ثابت  $n_0$  استفاده شود، در طراحی این نمودار دو اندازه نمونه‌ی  $n_1$  و  $n_2$  به کار می‌رود به گونه‌یی که  $n_1 < n_0 < n_2$ . از حد هشدار  $w$  ( $0 < w < UCL$ ) نیز به عنوان معیاری برای تعیین اندازه نمونه‌ی بعدی استفاده می‌شود.

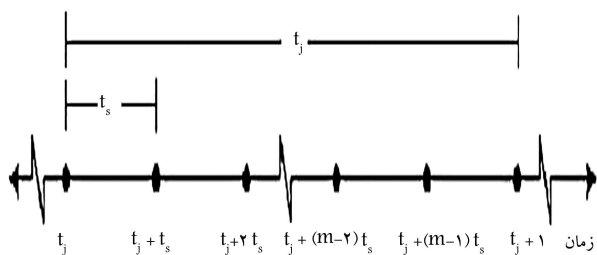
به طور کلی اندازه‌ی نمونه در نمونه‌گیری مرحله‌ی  $1 + j$ ام به مقدار آماره‌ی نمونه‌ی در مرحله‌ی  $j$ ،  $(T_j^*)$  وابسته است. اگر  $T_j^* < w$  باشد، آنگاه اندازه‌ی نمونه در مرحله‌ی بعد  $n_1$  خواهد بود؛ اما اگر  $w < T_j^* < UCL$  باشد، آنگاه اندازه نمونه‌ی بعدی  $n_2$  خواهد بود. بنابراین اندازه‌ی نمونه در نمودار با اندازه‌ی نمونه‌ی متغیر چنین تعریف می‌شود:

$$n_{j+1} = \begin{cases} n_1 & \text{if } T_j^* < w \\ n_2 & \text{if } w < T_j^* < UCL \end{cases} \quad (9)$$

این فرایند زمانی خارج از کنترل شناخته می‌شود که  $T_j^* > UCL$ . مقادیر  $n_1$  و  $n_2$  به همراه  $w$  چنان انتخاب می‌شود که متوسط نرخ نمونه‌گیری در حالت تحت کنترل برابر با  $n_0$  (اندازه نمونه در حالت ثابت) باشد. به عبارت دیگر:

$$b_1 n_1 + b_2 n_2 = n_0, \quad b_1 + b_2 = 1 \quad (10)$$

در رابطه‌ی ۱۰،  $b_1$  احتمال تجمعی زیر حد هشدار  $w$  است. این احتمال نشان‌دهنده‌ی درصد مواقعی است که در شرایط تحت کنترل، آماره در ناحیه‌ی مرکزی قرار می‌گیرد.



شکل ۱. طرح نمونه‌گیری در روش VSIFT.

نمونه‌ی بعدی،  $t_f$  واحد زمانی بعد گرفته می‌شود. اگر نمونه‌ی در یکی از فواصل میانی گرفته شود و آماره در ناحیه مرکزی قرار بگیرد، آنگاه نمونه‌ی بعدی در اولین زمان ثابت بعدی گرفته خواهد شد. طرح نمونه‌گیری این روش در شکل ۱ نشان داده شده است.<sup>[۱۸]</sup>

با این توضیحات می‌توان گفت زمان نمونه‌گیری در این روش به مقدار  $T_j^*$  وابسته است. در صورتی که مقدار آماره در ناحیه‌ی مرکزی قرار گیرد ( $T_j^* < w$ )، نمونه بعدی در اولین زمان ثابت بعدی گرفته خواهد شد. در غیر این صورت اگر مقدار آماره در ناحیه‌ی هشدار قرار گیرد ( $w < T_j^* < UCL$ )، نمونه بعدی در  $t_s$  واحد زمانی بعد گرفته می‌شود. قرار گرفتن آماره در ناحیه‌ی اقدام ( $T_j^* > UCL$ ) نیز به معنای خروج فرایند از حالت تحت کنترل است.

#### ۴. محاسبه معیار عملکرد ATS با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف

دو معیار متوسط طول دنباله (ARL) و متوسط زمان هشدار (ATS) از مهم‌ترین و مؤثرترین معیارهای مورد استفاده در مقایسه نمودارهای کنترل هستند. هنگامی که فرایند در شرایط تحت کنترل آماری به سر می‌برد، ARL و ATS بزرگ‌تر مطلوب‌تر است، در حالی که در شرایط خارج از کنترل، ARL و ATS کوچکتر که به معنای تشخیص سریع‌تر انحراف در فرایند است مطلوب‌تر خواهد بود. از آنجایی که در نمودارهای کنترل با فواصل نمونه‌گیری متغیر شاخص ARL نمی‌تواند مناسب باشد، زیرا در این حالت متوسط زمان هشدار مضرب ثابتی از ARL نیست، ما به منظور مقایسه روش‌های ارائه شده با یکدیگر از شاخص ATS استفاده می‌کنیم که اساس محاسبه آن را زنجیره مارکوف تشکیل می‌دهد.

به منظور محاسبه‌ی ATS با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف، ۳ حالت قابل تعریف است:

۱. حالتی که نشان‌دهنده‌ی  $T_j^* < w$  است.
۲. حالتی که نشان‌دهنده‌ی  $w < T_j^* < UCL$  است.
۳. حالتی که نشان‌دهنده‌ی  $T_j^* > UCL$  است و یک حالت جاذب<sup>۶</sup> محسوب می‌شود.

حال با توجه به حالات تعریف شده، ماتریس احتمالات گذار به‌زای میزان شیفت  $d$  چنین تعریف می‌شود:

$$P_d = \begin{pmatrix} p_{1,1}^d & p_{1,2}^d & p_{1,3}^d \\ p_{2,1}^d & p_{2,2}^d & p_{2,3}^d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

یک حد هشدار ( $w$ ) استفاده می‌کنیم. به‌طور کلی اندازه نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری در مرحله‌ی ۱ +  $z$ ام به مقدار آماری نمونه‌ی در مرحله‌ی  $j$  ( $T_j^*$ ) وابسته است. اگر  $T_j^* < w$ ، آنگاه نمونه‌ی بعدی با اندازه‌ی  $n_1$  و در  $t_s$  واحد زمانی بعد، و اگر  $w < T_j^* < UCL$  باشد نمونه‌ی بعدی با اندازه‌ی  $n_2$  و در  $st_s$  واحد زمانی بعد گرفته خواهد شد. بنابراین نمودار  $T^*$  با اندازه و فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر چنین تعریف می‌شود:

$$(n_{j+1}, t_{j+1}) = \begin{cases} (n_1, t_s) & \text{if } T_j^* \leq w \\ (n_2, st_s) & \text{if } w < T_j^* < UCL \end{cases} \quad (15)$$

فرایند زمانی خارج از کنترل شناخته می‌شود که  $T_j^* > UCL$  باشد. علاوه برای اطمینان از یکسان بودن شرایط مقایسه‌ی دو نمودار در حالت تحت کنترل لازم است همواره رابطه‌های ۱۶ و ۱۷ برقرار باشد:

$$E(n(T_{j+1}^*) | T_j^* < UCL; \tau = 0) = n_1 \quad (16)$$

$$E(t(T_{j+1}^*) | T_j^* < UCL; \tau = 0) = t_s \quad (17)$$

با بسط این روابط خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} b_1 n_1 + b_2 n_2 &= n_1 \\ b_1 + b_2 &= 1 \\ b_1 + b_2 &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

در رابطه‌ی ۱۸،  $b_1$  احتمال تجمعی زیر حد هشدار  $w$  است که از رابطه‌ی ۱۱ محاسبه می‌شود. برقرار بودن رابطه‌ی ۱۸ که نشان از نرخ نمونه‌گیری یکسان در دو روش در حالت تحت کنترل دارد، به همراه ATS یکسان تضمین می‌کند که هر دو روش در حالت تحت کنترل شرایط کاملاً یکسانی دارند و بنابراین می‌توان آنها را برحسب ATS خارج از کنترل با هم مقایسه کرد.

#### ۴.۳. طراحی نمودار $T^*$ VSIFT

در این روش که در حقیقت نوعی از نمودارهای با فواصل نمونه‌گیری متغیر است، علاوه بر نمونه‌گیری در فواصل زمانی ثابت، می‌توان در صورت مشاهده‌ی شواهدی مبنی بر خروج فرایند از حالت تحت کنترل، از نمونه‌های اضافی میان دو نمونه‌گیری ثابت نیز استفاده کرد.

در نمودارهای انطباقی VSI و VSSI زمان گرفتن نمونه‌ی بعدی به محل استقرار آماره‌ی نمونه‌ی فعلی بستگی دارد و لذا از پیش قابل پیش‌بینی نیست. از نقطه‌نظر اجرایی، این تغییرپذیری در فواصل نمونه‌گیری ممکن است به ناراحتی و آشفتگی منجر شود.<sup>[۱۹]</sup> این نمودار اولین بار برای نمودارهای کنترل تک‌متغیره پیشنهاد<sup>[۱۹]</sup> و سپس برای نمودار  $T^*$  بسط داده شد.<sup>[۲۵]</sup>

در طراحی این نمودار تا زمانی که دلیلی برای خروج فرایند از حالت تحت کنترل وجود ندارد، نمونه‌ها در فواصل زمانی ثابت  $t_f$  گرفته می‌شوند. با این حال اگر آماری نمونه‌ی در ناحیه‌ی هشدار قرار بگیرد لازم است در فاصله‌ی بین دو نمونه‌گیری ثابت، نمونه‌های اضافی دیگری نیز گرفته شود. به همین منظور فرض کنید فاصله‌ی  $t_f$  به  $m$  فاصله با طول یکسان  $t_s$  تقسیم شود. در این صورت زمان‌های نمونه‌گیری ممکن در فاصله‌ی زمانی  $t_f$  عبارت‌اند از:  $t_s, 2t_s, 3t_s, \dots, (m-1)t_s$ . بنابراین اگر نمونه‌ی در زمان ثابت گرفته شود و آماره در ناحیه‌ی مرکزی قرار بگیرد، آنگاه

رابطه‌ی ۲۰، در نمودار  $VSI$  استفاده از رابطه‌ی ۲۱ و در نمودار  $VSSI$  استفاده‌ی دلخواه از یکی از دو رابطه‌ی ۲۰ و ۲۱ پیشنهاد می‌شود.

$$w = F^{-1}\left[\left(\frac{n_r - n_o}{n_r - n_1}\right)F(UCL, p), p\right] \quad (20)$$

$$w = F^{-1}\left[\left(\frac{\lambda - l}{l - s}\right)F(UCL, p), p\right] \quad (21) \quad (0 < s < \lambda < l)$$

در این روابط  $F(x; p) = P(\chi_p^2 \leq x)$  تابع توزیع تجمعی مربع کای مرکزی با  $p$  درجه آزادی و  $F^{-1}$  معکوس آن است. نحوه‌ی محاسبه‌ی  $ATS$ ، در نمودار  $VSI$  نیز با اندک تغییراتی به روش فوق قابل محاسبه است. [۲۵] فرض کنید که فاصله‌ی بین دو نمونه‌گیری ثابت  $(t_f)$ ، را به  $m$  فاصله‌ی یکسان با طول  $t_s$  تقسیم کنیم؛ بنابراین داریم:

$$t_f = t_s / m \quad (22)$$

با این کار  $1 + 2m$  حالت در مدل زنجیره‌ی مارکوف وجود خواهد داشت که می‌توان آنها را به سه گروه تقسیم کرد:

-- حالت ۱ تا  $m$ ؛ و آن نشان‌گر حالتی است که آماره در ناحیه‌ی مرکزی قرار می‌گیرد ( $T_j^* < w$ ) و نمونه‌ی بعدی در اولین زمان ثابت بعدی گرفته می‌شود.

-- حالت  $m + 1$  تا  $2m$  و آن نشان‌گر حالتی است که آماره در ناحیه‌ی هشدار قرار می‌گیرد ( $w < T_j^* < UCL$ ) و نمونه‌ی بعدی در  $t_s$  واحد زمانی بعد گرفته می‌شود.

-- حالت  $2m + 1$  و آن حالت جاذبی است که در آن آماره در ناحیه‌ی اقدام قرار می‌گیرد ( $T_j^* > UCL$ ). در این حالت فرایند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود.

بر اساس تعریف حالات ارائه شده در بالا، ماتریس احتمالات گذار که در آن سطر و ستون مربوط به حالت جاذب حذف شده است در ادامه آورده شده است:

در ماتریس  $Q$ ، نشان‌دهنده‌ی احتمال گذار از حالت  $i$  به  $j$  است (روابط ۲۳ و ۲۴).

در این ماتریس  $p_{i,j}^d$  نشان‌دهنده‌ی احتمال گذار از حالت  $i$  به حالت  $j$  به‌ازای شیفت  $d$  در فرایند است.  $d$  نیز به‌صورت  $\sqrt{T}$  محاسبه می‌شود که قبلاً در رابطه‌ی ۸ تعریف شده است. در ادامه به‌عنوان مثال، نحوه‌ی محاسبه‌ی  $p_{1,2}^d$  که احتمال گذار از حالت ۱ به ۲ به‌ازای شیفت  $d$  است به‌ترتیب در سه نمودار  $VSI$ ،  $VSS$  و  $VSSI$  بیان شده است.

$$P_{1,2}^d = \Pr(w < T_j^* < UCL | n_1, d) = \Pr(w < \chi_p^2(\tau_1) < UCL)$$

$$P_{1,2}^d = \Pr(w < T_j^* < UCL | l, d) = \Pr(w < \chi_p^2(\tau_0) < UCL)$$

$$P_{1,2}^d = \Pr(w < T_j^* < UCL | n_1, l, d) = \Pr(w < \chi_p^2(\tau_1) < UCL)$$

رابطه‌ی اول، احتمال قرار گرفتن آماره‌ی  $T_j^*$  در ناحیه‌ی  $[w, UCL]$  با فرض استفاده از اندازه‌ی نمونه‌ی کوچک‌تر ( $n_1$ )، رابطه‌ی دوم احتمال قرار گرفتن آماره‌ی  $T_j^*$  در ناحیه‌ی  $[w, UCL]$  با فرض استفاده از فاصله‌ی نمونه‌گیری طولانی‌تر ( $l$ )، و رابطه‌ی سوم احتمال قرار گرفتن آماره‌ی  $T_j^*$  در ناحیه‌ی  $[w, UCL]$  با فرض استفاده از فاصله‌ی نمونه‌گیری طولانی‌تر ( $l$ ) و اندازه‌ی نمونه‌ی کوچک‌تر ( $n_1$ ) را نشان می‌دهد. در این روابط،  $\pi_i = d^i | n_i$  است. سایر احتمالات نیز به طریق مشابه محاسبه می‌شوند.

در ادامه برای محاسبه‌ی  $ATS$  می‌توان از رابطه‌ی ۱۹ استفاده کرد. [۲۶]

$$ATS(d) = \mathbf{b}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_d)^{-1} \mathbf{t} \quad (19)$$

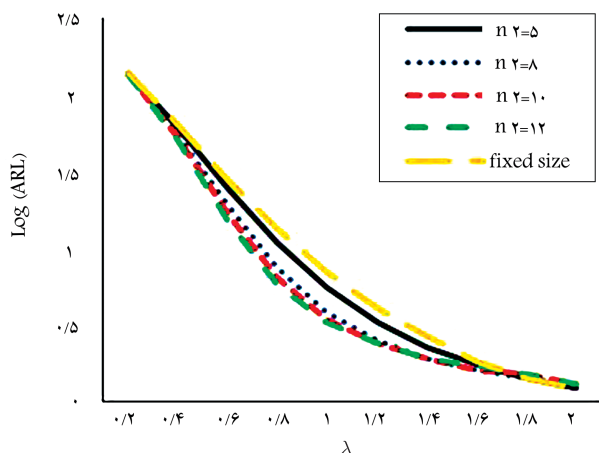
در این رابطه،  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  بردار احتمالات شروع،  $\mathbf{Q}_d$  ماتریس احتمالات گذاری است که از حذف سطر و ستون مربوط به حالت جاذب در ماتریس  $\mathbf{P}_d$  به دست آمده،  $\mathbf{t}$  بردار فواصل نمونه‌گیری، و  $\mathbf{I}$  ماتریس همانی مرتبه‌ی ۲ است. یادآور می‌شود که  $t^T$  در نمودارهای  $VSI$  و  $VSSI$  برابر با  $(t_s, st_s)$  و در نمودار  $VSS$  برابر با  $(t_s, t_s)$  است.

در نهایت برای محاسبه‌ی حد هشدار  $w$  نیز می‌توان برحسب نوع نمودار کنترل، از یکی از روابط ۲۰ و ۲۱ استفاده کرد. [۲۶] به‌عبارت دیگر در نمودار  $VSS$  استفاده از

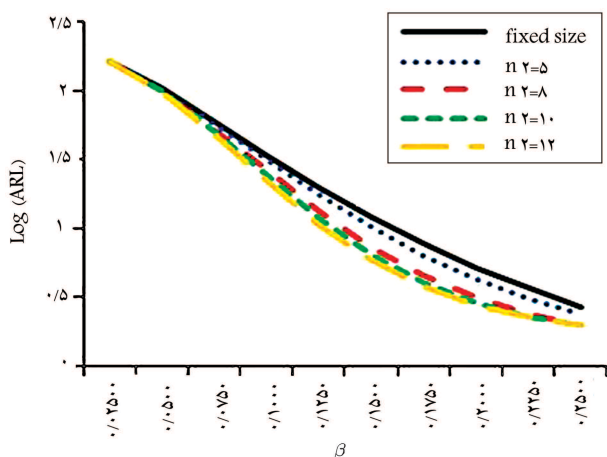
$state$	$1$	$2$	$3$	$\dots$	$m-1$	$m$	$m+1$	$m+2$	$m+3$	$\dots$	$2m-1$	$2m$
$1$	$p_{11}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$p_{12}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$
$2$	$p_{21}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$p_{22}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$
$3$	$p_{31}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$p_{32}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$p_{m-1,1}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$p_{m-1,2}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$
$Q = m$	$p_{m,1}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$p_{m,2}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$
$m+1$	$0$	$p_{21}$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$0$	$p_{22}$	$0$	$\dots$	$0$	$0$
$m+2$	$0$	$0$	$p_{21}$	$\dots$	$0$	$0$	$0$	$0$	$p_{22}$	$\dots$	$0$	$0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$2m-2$	$0$	$0$	$0$	$\dots$	$p_{21}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$\dots$	$p_{22}$	$0$
$2m-1$	$0$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$p_{21}$	$0$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$p_{22}$
$2m$	$p_{21}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$p_{22}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$

$$P_{11} = P_{21} = \Pr[\chi^2(p, \tau) \leq w] \quad (23)$$

$$P_{12} = P_{22} = \Pr[w < \chi^2(p, \tau) \leq UCL] \quad (24)$$



شکل ۲. مقایسه‌ی عملکرد نمودار  $VSS T^2$  به‌ازای  $n_2$  های مختلف در شیفت‌های رخ داده در عرض از مبدأ از ۳ به  $3 + \lambda\sigma$ .



شکل ۳. مقایسه‌ی عملکرد نمودار  $VSS T^1$  به‌ازای  $n_2$  های مختلف در شیفت‌های رخ داده در شیب از ۲ به  $2 + \beta\sigma$ .

فرایند شیفت پیدا می‌کنند، استفاده از این اندازه نمونه بزرگ‌تر سبب تشخیص سریع‌تر انحراف می‌شود. در بخش بعد و به‌منظور بررسی عملکرد نمودار  $T^2$  با فواصل نمونه‌گیری متغیر به محاسبه‌ی شاخص  $ATS$  در انواع شیفت‌های موجود در فرایند -- شامل عرض از مبدأ، شیب و انحراف استاندارد -- می‌پردازیم. در این مطالعه بدون از دست دادن عمومیت، مقدار  $t$  که فاصله‌ی ثابت نمونه‌گیری است برابر با ۱ در نظر گرفته شده است. همچنین مقادیر در نظر گرفته شده برای  $l$  و  $s$  عبارت‌اند از:  $l = 1.25, 1.5, 1.9$  و  $s = 0.1, 0.25, 0.5$  استفاده از این مقادیر در ادبیات متداول است.

به‌طور کلی فاصله‌ی نمونه‌گیری کوتاه‌تر ( $s$ ) باید تا حد امکان کوچک در نظر گرفته شود. اما در عمل کوتاه‌ترین زمان مورد نیاز برای نمونه‌گیری به فرایند مورد بررسی بستگی دارد. از سوی دیگر مقدار  $l$  در تعامل با مقدار  $s$  به‌گونه‌ی انتخاب می‌شود که نرخ نمونه‌گیری مورد نظر را ایجاد کند.

در جدول ۲ نتایج مربوط به مقایسه‌ی دو نمودار  $T^2$  و  $VSI T^2$  به‌ازای شیفت‌های مختلف در پارامترهای فرایند و مقادیر مختلف  $l$  و  $s$  نشان داد شده است. نتایج نشان می‌دهد که نمودار  $VSI T^2$  در هر سه پارامتر مورد بررسی و به‌ازای تمامی شیفت‌ها بهتر از  $T^2$  عمل می‌کند.

در روابط ۲۳ و ۲۴،  $\chi^2(p, \tau)$  نشان‌گر متغیر تصادفی مربع کای غیرمرکزی با  $p$  درجه آزادی و پارامتر غیرمرکزی  $\tau = d^2$  است.

به‌طور مشابه برای محاسبه  $ATS$  می‌توان از رابطه‌ی ۱۹ استفاده کرد. در این روش،  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  بردار احتمالات شروع،  $\mathbf{Q}_d$  ماتریس احتمالات گذاری است که از حذف سطر و ستون مربوط به حالت جاذب در ماتریس  $\mathbf{Q}$  به دست آمده است،  $\mathbf{I}$  ماتریس همانی مرتبه‌ی  $2m$  و  $\mathbf{t}^T = (mt_s, (m-1)t_s, (m-2)t_s, \dots, 3t_s, 2t_s, t_s, t_s, \dots, t_s)$  بردار فواصل نمونه‌گیری است. بدیهی است به‌ازای  $d = 0$ ، در رابطه‌ی ۱۹ مقدار  $ATS$  تحت کنترل محاسبه می‌شود.

## ۵. مثال عددی و مقایسه‌ی روش‌ها

در این بخش به مقایسه‌ی روش‌های ارائه شده با استفاده از مثال عددی می‌پردازیم و به‌همین منظور از مثال رایج در ادبیات پروفایل‌های خطی ساده که اولین بار توسط کنگ و آلباین<sup>[۱]</sup> مطرح شد استفاده می‌کنیم. مدلی که آنها برای شبیه‌سازی به کار بردند پروفایل خطی ساده  $y = 3 + 2x + 4$  است که در آن،  $\varepsilon$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ است و مقادیر ثابت  $x$  عبارت‌اند از ۲، ۴، ۶ و ۸. بنابراین اندازه نمونه‌ی ثابت در همه‌ی روش‌ها برابر با  $n_0 = 4$  است. با توجه به این که برای  $n \leq 2$  امکان برآورد واریانس وجود ندارد لذا در همه‌ی نمودارهایی که در آن از اندازه نمونه متغیر استفاده شده، اندازه نمونه کوچک‌تر ( $n_1$ ) برابر با ۳ در نظر گرفته شده است. طراحی نمودارها به‌گونه‌ی است که  $ARL$  تحت کنترل همه‌ی روش‌ها برابر با ۲۰۰ باشد.

در مقایسه‌های صورت گرفته، برای محاسبه‌ی شاخص‌های عملکردی نمودارها از زنجیره‌ی مارکوف استفاده شده و همه‌ی نتایج با استفاده از کدنویسی در نرم افزار متلب ۲۰۰۸ به دست آمده است. یادآور می‌شود به‌منظور وضوح منحنی‌های مربوط به  $ATS$  روی محور  $y$  از لگاریتم آن استفاده شده است. ما در این قسمت با انتخاب ۴ مقدار برای  $n_2$  به مقایسه‌ی عملکرد نمودار  $VSS T^1$  به‌ازای شیفت‌های رخ داده در عرض از مبدأ و شیب فرایند پرداخته‌ایم (شکل‌های ۲ و ۳).

بدیهی است که با افزایش  $n_2$  مقادیر  $ARL$  کاهش می‌یابد و به‌ازای  $n_2$  های بزرگ‌تر این مقادیر به هم نزدیک می‌شوند. به‌همین دلیل ما با انتخاب دو مقدار برای  $n_2$  در جدول ۱، به مقایسه‌ی دو نمودار  $T^2$  و  $VSS T^2$  می‌پردازیم.

اگرچه نمودار چندمتغیره‌ی  $T^2$  اساساً برای پیش بردار میانگین مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما استفاده از آن در کنترل انحراف فرایند در پروفایل‌های خطی ساده نیز با نتایج خوبی همراه بوده است که به نظر می‌رسد علت آن تأثیرگذاری در برآورد پارامترهای عرض از مبدأ و شیب است؛ این درحالی است که پیش انحراف استاندارد با استفاده از نمودار  $T^2$  در دیگر انواع پروفایل‌ها موفق نیست. به هر حال اگرچه نمودار  $VSS T^2$  با تغییر اندازه نمونه در تشخیص شیفت‌های کوچک و متوسط عرض از مبدأ و شیب با موفقیت زیادی همراه است، مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد این تغییر اندازه‌ی نمونه در  $ARL$  مربوط به شیفت‌های انحراف استاندارد تأثیری ندارد. این موضوع برای حالتی که در آن تعداد سطوح  $X$  برابر با ۱۰ در نظر گرفته شده نیز دیده می‌شود.<sup>[۱۷]</sup>

نکته‌ی قابل توجه دیگر این است که به‌ازای  $n_2$  های بزرگ‌تر، حد هشدار  $w$  به حد کنترل  $UCL$  نزدیک‌تر می‌شود. در این صورت در حالت تحت کنترل فرایند، احتمال استفاده از اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگ‌تر بسیار کم است و هنگامی که پارامترهای

جدول ۱. مقادیر ARL خارج از کنترل تحت شیفت‌های عرض از مبدأ و شیب در دو روش  $T^2$  و  $VSS T^2$ .

$A_1$				$A_0$			
$T^2$	$VSS T^2$	$VSS T^2$	$\beta$	$T^2$	$VSS T^2$	$VSS T^2$	$\lambda$
Fixed	( $n_r = 9$ )	( $n_r = 5$ )		Fixed	( $n_r = 9$ )	( $n_r = 5$ )	
۱۶۶٫۰	۱۶۵٫۴	۱۶۵٫۸	۰٫۰۲۵	۱۳۷٫۷	۱۳۵٫۳	۱۳۷٫۰	۰٫۲
۱۰۵٫۶	۱۰۱٫۳	۱۰۴٫۲	۰٫۰۵۰	۶۳٫۴	۵۳٫۵	۶۰٫۴	۰٫۴
۶۰٫۷	۵۲٫۵	۵۸٫۲	۰٫۰۷۵	۲۷٫۹	۱۷٫۸	۲۴٫۶	۰٫۶
۳۴٫۵	۲۵٫۵	۳۱٫۶	۰٫۱۰۰	۱۳٫۲	۶٫۸	۱۰٫۸	۰٫۸
۲۰٫۱	۱۲٫۶	۱۷٫۶	۰٫۱۲۵	۶٫۹	۳٫۶	۵٫۵	۱٫۰
۱۲٫۲	۶٫۹	۱۰٫۳	۰٫۱۵۰	۴٫۰	۲٫۴	۳٫۲	۱٫۲
۷٫۸	۴٫۳	۶٫۴	۰٫۱۷۵	۲٫۶	۱٫۹	۲٫۲	۱٫۴
۵٫۲	۳٫۰	۴٫۳	۰٫۲۰۰	۱٫۸	۱٫۶	۱٫۷	۱٫۶
۳٫۷	۲٫۴	۳٫۱	۰٫۲۲۵	۱٫۴	۱٫۴	۱٫۴	۱٫۸
۲٫۷	۲٫۰	۲٫۴	۰٫۲۵۰	۱٫۲	۱٫۳	۱٫۲	۲٫۰

در عرض از مبدأ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که مقادیر  $ATS$  تحت کنترل به‌ازای تمامی مقادیر  $m$  بسیار به هم نزدیک‌اند و با افزایش  $m$  قدرت نمودار در تشخیص شیفت افزایش می‌یابد. با این حال مقادیر  $ATS$  خارج از کنترل برای  $m \geq 5$  بسیار به هم نزدیک‌اند.

### ۱.۵. مقایسه‌ی نمودارهای $VSI T^2$ ، $VSS T^2$ ، $FSR T^2$ و $VSIFT T^2$ و $VSSI T^2$

پس از ارائه‌ی توضیحات فوق، حال مجموعه‌ی انواع نمودارهای تطبیقی بر پایه‌ی نمودار  $T^2$  موجود است که می‌توان با در نظر گرفتن شرایط مختلف و علائق کاربرد آن مختلف، از آن بهره‌مند شد. در این بخش در نظر داریم مقایسه‌ی میان تمامی روش‌های ارائه شده در بخش قبل انجام دهیم.

جدول ۶ مقادیر  $ATS$  تحت کنترل و خارج از کنترل انواع نمودارهای تطبیقی  $T^2$  را به‌ازای شیفت‌های مختلف در عرض از مبدأ نشان می‌دهد. در تمامی این نمودارها متوسط اندازه نمونه در حالت تحت کنترل برابر با ۴، متوسط فاصله‌ی نمونه‌گیری در حالت تحت کنترل برابر با ۸٫۰ و  $ATS$  تحت کنترل برابر با ۱۶۰ در نظر گرفته شده است، به جز ستون ۳ که دارای  $ATS$  تحت کنترل ۲۰۰ و متوسط فاصله‌ی نمونه‌گیری ۱ بوده و اعداد آن با ستون ۵ که در آنها فاصله‌ی ثابت نمونه‌گیری برابر با ۱ در نظر گرفته شده، قابل مقایسه است. روش دیگر برای مقایسه‌ی این دو نمودار، یکی کردن  $ATS$  تحت کنترل و متوسط فاصله‌ی نمونه‌گیری در حالت تحت کنترل در دو نمودار است که با مقایسه‌ی ستون‌های ۴ و ۵ امکان‌پذیر است. مقایسه‌ها نشان می‌دهد در تمام شیفت‌ها نمودار  $VSIFT T^2$  بهتر از  $T^2$  عمل می‌کند. برای مقایسه‌ی دو نمودار  $VSI T^2$  و  $VSIFT T^2$  از دو روش مختلف استفاده می‌کنیم. در روش اول، فواصل نمونه‌گیری کوتاه‌تر و بلندتر در روش  $VSI$  به ترتیب دارای مقادیر  $t_f = l$  و  $s = 1/m$  هستند. سپس حد هشدار  $w$  به‌گونه‌ی انتخاب می‌شود که متوسط فاصله‌ی نمونه‌گیری و  $ATS$  تحت کنترل در دو روش

در قسمت بعد و به‌منظور بررسی عملکرد نمودار  $T^2$  با فواصل نمونه‌گیری و اندازه نمونه‌ی متغیر به محاسبه‌ی شاخص  $ATS$  در انواع شیفت‌های موجود در فرایند -- شامل عرض از مبدأ، شیب و انحراف استاندارد -- می‌پردازیم.

در این روش که در حقیقت تلفیقی از دو روش بالاست، به متغیر کردن همزمان فاصله‌ی نمونه‌گیری و اندازه نمونه می‌پردازیم. به همین منظور با در نظر گرفتن  $n_0 = 1$  و  $t_0 = 1$  به‌عنوان اندازه نمونه‌ی ثابت و فواصل نمونه‌گیری ثابت، به محاسبه‌ی  $ATS$  در شیفت‌های مختلف و ترکیب‌های مختلف از اندازه نمونه و فواصل نمونه‌گیری پرداخته‌ایم. نتایج مقایسات در جدول ۳ آمده است. این نتایج نشان می‌دهد که نمودار  $VSSI T^2$  در هر سه پارامتر مورد بررسی و به‌ازای تمامی شیفت‌ها بهتر از  $T^2$  عمل می‌کند و میزان این بهبود با افزایش اندازه نمونه و کوتاه‌تر کردن فاصله‌ی نمونه‌گیری  $s$  افزایش می‌یابد.

در بخش بعد به بررسی عملکرد نمودار  $VSIFT T^2$  و مقایسه‌ی آن با سایر نمودارهای تطبیقی  $T^2$  می‌پردازیم. در جدول ۴، مقادیر تحت کنترل و خارج از کنترل  $ATS$  به‌ازای  $n_0 = 4$ ،  $t_0 = 1$ ،  $m = 10$  و  $b_1 = 0.06$ ،  $0.07$ ،  $0.08$ ،  $0.09$  (احتمال قرارگرفتن آماره در ناحیه‌ی ایمن در شرایط تحت کنترل) به‌ازای شیفت‌های مختلف در پارامتر عرض از مبدأ نشان داده شده است. همچنین در این جدول به‌منظور مقایسه، مقادیر  $ATS$  نمودار  $T^2$  با فواصل نمونه‌گیری ثابت  $t_0 = 1$  نیز آورده شده است.  $ATS$  تحت کنترل در این نمودار برابر با ۲۰۰ در نظر گرفته شده است. چنان که مشاهده می‌شود، نمودار  $VSIFT T^2$  با  $b_1$ ‌های مختلف در مقایسه با نمودار  $T^2$ ،  $ATS$  تحت کنترل و خارج از کنترل کوچک‌تری دارد. در نمودارهای  $VSIFT T^2$  افزایش کوچک در نرخ هشدار اشتباهی می‌تواند در مقایسه با کاهش  $ATS$  خارج از کنترل، قابل قبول باشد.<sup>[۱۷]</sup> همچنین پیداست که با کاهش مقدار  $b_1$  عملکرد نمودار در تشخیص شیفت‌ها بهبود می‌یابد، اما در مقابل نرخ هشدار بزرگ‌تری ایجاد می‌کند. نتایج برای سایر پارامترها نیز مشابه است. در جدول ۵ مقادیر  $ATS$  تحت کنترل و خارج از کنترل نمودار  $VSIFT T^2$  به‌ازای  $b_1 = 0.08$ ،  $t_0 = 1$ ،  $m = 2$ ،  $3$ ،  $5$ ،  $10$  و  $20$  و مقادیر مختلف شیفت

جدول ۲. مقادیر  $ATS$  خارج از کنترل تحت شیفت‌های عرض از مبدأ، شیب و انحراف استاندارد در دو روش  $T^2$  و  $VSI T^2$  ( $\lambda$  شیفت در عرض از مبدأ بر حسب  $\sigma$ ،  $\beta$  شیفت در شیب بر حسب  $\sigma$  و  $\gamma$  بزرگی شیفت در انحراف معیار است).

$\sigma$			$A_1$			$A_0$			$l$	$s$
$T^2$	$T^2$	$\gamma$	$T^2$	$T^2$	$\beta$	$T^2$	$T^2$	$\lambda$		
$VSI$	Fixed		$VSI$	Fixed		$VSI$	Fixed			
۳۶٫۱	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۴٫۴	۱۶۶٫۰	۰٫۰۲۵	۱۳۴٫۹	۱۳۷٫۷	۰٫۲	۱٫۲۵	۰٫۵
۱۲٫۷	۱۴٫۹	۱٫۴	۱۰۱٫۶	۱۰۵٫۶	۰٫۰۵۰	۵۸٫۶	۶۳٫۴	۰٫۴		
۶٫۵	۷٫۹	۱٫۶	۵۵٫۸	۶۰٫۷	۰٫۰۷۵	۲۳٫۷	۲۷٫۹	۰٫۶		
۴٫۲	۵٫۱	۱٫۸	۲۹٫۹	۳۴٫۵	۰٫۱۰۰	۱۰٫۲	۱۳٫۲	۰٫۸		
۳٫۰	۳٫۸	۲٫۰	۱۶٫۴	۲۰٫۱	۰٫۱۲۵	۵٫۰	۶٫۹	۱٫۰		
۲٫۴	۳٫۰	۲٫۲	۹٫۴	۱۲٫۲	۰٫۱۵۰	۲٫۸	۴٫۰	۱٫۲		
۲٫۱	۲٫۵	۲٫۴	۵٫۷	۷٫۸	۰٫۱۷۵	۱٫۹	۲٫۶	۱٫۴		
۱٫۸	۲٫۲	۲٫۶	۳٫۷	۵٫۲	۰٫۲۰۰	۱٫۴	۱٫۸	۱٫۶		
۱٫۷	۲٫۰	۲٫۸	۲٫۶	۳٫۷	۰٫۲۲۵	۱٫۲	۱٫۴	۱٫۸		
۱٫۵	۱٫۸	۳٫۰	۲٫۰	۲٫۷	۰٫۲۵۰	۱٫۱	۱٫۲	۲٫۰		
۳۳٫۸	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۳٫۳	۱۶۶٫۰	۰٫۰۲۵	۱۳۳٫۰	۱۳۷٫۷	۰٫۲	۱٫۵	۰٫۲۵
۱۱٫۴	۱۴٫۹	۱٫۴	۹۹٫۰	۱۰۵٫۶	۰٫۰۵۰	۵۵٫۴	۶۳٫۴	۰٫۴		
۵٫۷	۷٫۹	۱٫۶	۵۲٫۶	۶۰٫۷	۰٫۰۷۵	۲۱٫۰	۲۷٫۹	۰٫۶		
۳٫۶	۵٫۱	۱٫۸	۲۷٫۰	۳۴٫۵	۰٫۱۰۰	۸٫۴	۱۳٫۲	۰٫۸		
۲٫۶	۳٫۸	۲٫۰	۱۴٫۱	۲۰٫۱	۰٫۱۲۵	۳٫۹	۶٫۹	۱٫۰		
۲٫۱	۳٫۰	۲٫۲	۷٫۷	۱۲٫۲	۰٫۱۵۰	۲٫۲	۴٫۰	۱٫۲		
۱٫۸	۲٫۵	۲٫۴	۴٫۵	۷٫۸	۰٫۱۷۵	۱٫۵	۲٫۶	۱٫۴		
۱٫۶	۲٫۲	۲٫۶	۲٫۹	۵٫۲	۰٫۲۰۰	۱٫۲	۱٫۸	۱٫۶		
۱٫۵	۲٫۰	۲٫۸	۲٫۰	۳٫۷	۰٫۲۲۵	۱٫۱	۱٫۴	۱٫۸		
۱٫۴	۱٫۸	۳٫۰	۱٫۶	۲٫۷	۰٫۲۵۰	۱٫۱	۱٫۲	۲٫۰		
۳۱٫۹	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۲٫۳	۱۶۶٫۰	۰٫۰۲۵	۱۳۱٫۳	۱۳۷٫۷	۰٫۲	۱٫۹	۰٫۱
۱۰٫۳	۱۴٫۹	۱٫۴	۹۶٫۶	۱۰۵٫۶	۰٫۰۵۰	۵۲٫۷	۶۳٫۴	۰٫۴		
۵٫۰	۷٫۹	۱٫۶	۴۹٫۹	۶۰٫۷	۰٫۰۷۵	۱۸٫۸	۲۷٫۹	۰٫۶		
۳٫۲	۵٫۱	۱٫۸	۲۴٫۶	۳۴٫۵	۰٫۱۰۰	۷٫۰	۱۳٫۲	۰٫۸		
۲٫۳	۳٫۸	۲٫۰	۱۲٫۲	۲۰٫۱	۰٫۱۲۵	۳٫۰	۶٫۹	۱٫۰		
۱٫۹	۳٫۰	۲٫۲	۶٫۳	۱۲٫۲	۰٫۱۵۰	۱٫۷	۴٫۰	۱٫۲		
۱٫۶	۲٫۵	۲٫۴	۳٫۵	۷٫۸	۰٫۱۷۵	۱٫۳	۲٫۶	۱٫۴		
۱٫۵	۲٫۲	۲٫۶	۲٫۲	۵٫۲	۰٫۲۰۰	۱٫۱	۱٫۸	۱٫۶		
۱٫۴	۲٫۰	۲٫۸	۱٫۶	۳٫۷	۰٫۲۲۵	۱٫۰	۱٫۴	۱٫۸		
۱٫۳	۱٫۸	۳٫۰	۱٫۳	۲٫۷	۰٫۲۵۰	۱٫۰	۱٫۲	۲٫۰		



جدول ۳. مقادیر  $ATS$  خارج از کنترل تحت شیفت های عرض از مبدأ، شیب و انحراف استاندارد در دو روش  $T^2$  و  $VSSI T^2$ .

$\sigma$			$A_1$			$A_0$			parameters		
$T^2$	$T^2$	$\gamma$	$T^2$	$T^2$	$\beta$	$T^2$	$T^2$	$\lambda$	$n_2$	$l$	$s$
$VSSI$	Fixed		$VSSI$	Fixed		$VSSI$	Fixed				
۳۶٫۱	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۳٫۸	۱۶۶٫۰	۰٫۲۵	۱۳۳٫۴	۱۳۷٫۷	۰٫۲			
۱۲٫۷	۱۴٫۹	۱٫۴	۹۹٫۲	۱۰۵٫۶	۰٫۵۰	۵۴٫۵	۶۳٫۴	۰٫۴			
۴٫۲	۵٫۱	۱٫۸	۲۶٫۴	۳۴٫۵	۱٫۰۰	۷٫۸	۱۳٫۲	۰٫۸			
۳٫۰	۳٫۸	۲٫۰	۱۳٫۶	۲۰٫۱	۱٫۲۵	۳٫۸	۶٫۹	۱٫۰	۵	۱٫۵	۰٫۵
۲٫۴	۳٫۰	۲٫۲	۷٫۴	۱۲٫۲	۱٫۵۰	۲٫۳	۴٫۰	۱٫۲			
۱٫۸	۲٫۲	۲٫۶	۳٫۰	۵٫۲	۲٫۰۰	۱٫۴	۱٫۸	۱٫۶			
۱٫۵	۱٫۸	۳٫۰	۱٫۷	۲٫۷	۲٫۵۰	۱٫۱	۱٫۲	۲٫۰			
۳۳٫۸	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۲٫۷	۱۶۶٫۰	۰٫۲۵	۱۳۱٫۶	۱۳۷٫۷	۰٫۲			
۱۱٫۴	۱۴٫۹	۱٫۴	۹۶٫۸	۱۰۵٫۶	۰٫۵۰	۵۱٫۶	۶۳٫۴	۰٫۴			
۳٫۶	۵٫۱	۱٫۸	۲۳٫۷	۳۴٫۵	۱٫۰۰	۶٫۴	۱۳٫۲	۰٫۸			
۲٫۶	۳٫۸	۲٫۰	۱۱٫۶	۲۰٫۱	۱٫۲۵	۲٫۹	۶٫۹	۱٫۰	۵	۱٫۷۵	۰٫۲۵
۲٫۱	۳٫۰	۲٫۲	۶٫۰	۱۲٫۲	۱٫۵۰	۱٫۸	۴٫۰	۱٫۲			
۱٫۶	۲٫۲	۲٫۶	۲٫۳	۵٫۲	۲٫۰۰	۱٫۲	۱٫۸	۱٫۶			
۱٫۴	۱٫۸	۳٫۰	۱٫۴	۲٫۷	۲٫۵۰	۱٫۱	۱٫۲	۲٫۰			
۳۱٫۹	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۲٫۱	۱۶۶٫۰	۰٫۲۵	۱۳۰٫۵	۱۳۷٫۷	۰٫۲			
۱۰٫۳	۱۴٫۹	۱٫۴	۹۵٫۳	۱۰۵٫۶	۰٫۵۰	۴۹٫۸	۶۳٫۴	۰٫۴			
۳٫۲	۵٫۱	۱٫۸	۲۲٫۲	۳۴٫۵	۱٫۰۰	۵٫۵	۱۳٫۲	۰٫۸			
۲٫۳	۳٫۸	۲٫۰	۱۰٫۳	۲۰٫۱	۱٫۲۵	۲٫۴	۶٫۹	۱٫۰	۵	۱٫۹	۰٫۱
۱٫۹	۳٫۰	۲٫۲	۵٫۱	۱۲٫۲	۱٫۵۰	۱٫۵	۴٫۰	۱٫۲			
۱٫۵	۲٫۲	۲٫۶	۱٫۹	۵٫۲	۲٫۰۰	۱٫۱	۱٫۸	۱٫۶			
۱٫۳	۱٫۸	۳٫۰	۱٫۲	۲٫۷	۲٫۵۰	۱٫۰	۱٫۲	۲٫۰			
۳۶٫۱	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۴٫۴	۱۶۶٫۰	۰٫۲۵	۱۳۳٫۴	۱۳۷٫۷	۰٫۲			
۱۲٫۷	۱۴٫۹	۱٫۴	۹۸٫۷	۱۰۵٫۶	۰٫۵۰	۵۰٫۵	۶۳٫۴	۰٫۴			
۴٫۲	۵٫۱	۱٫۸	۲۲٫۸	۳۴٫۵	۱٫۰۰	۵٫۵	۱۳٫۲	۰٫۸			
۳٫۰	۳٫۸	۲٫۰	۱۰٫۷	۲۰٫۱	۱٫۲۵	۲٫۸	۶٫۹	۱٫۰	۹	۱٫۱	۰٫۵
۲٫۴	۳٫۰	۲٫۲	۵٫۶	۱۲٫۲	۱٫۵۰	۲٫۰	۴٫۰	۱٫۲			
۱٫۸	۲٫۲	۲٫۶	۲٫۴	۵٫۲	۲٫۰۰	۱٫۴	۱٫۸	۱٫۶			
۱٫۵	۱٫۸	۳٫۰	۱٫۶	۲٫۷	۲٫۵۰	۱٫۲	۱٫۲	۲٫۰			
۳۳٫۸	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۳٫۸	۱۶۶٫۰	۰٫۲۵	۱۳۲٫۵	۱۳۷٫۷	۰٫۲			
۱۱٫۴	۱۴٫۹	۱٫۴	۹۷٫۴	۱۰۵٫۶	۰٫۵۰	۴۸٫۹	۶۳٫۴	۰٫۴			
۳٫۶	۵٫۱	۱٫۸	۲۱٫۵	۳۴٫۵	۱٫۰۰	۴٫۹	۱۳٫۲	۰٫۸			
۲٫۶	۳٫۸	۲٫۰	۹٫۷	۲۰٫۱	۱٫۲۵	۲٫۵	۶٫۹	۱٫۰	۹	۱٫۱۵	۰٫۲۵
۲٫۱	۳٫۰	۲٫۲	۴٫۹	۱۲٫۲	۱٫۵۰	۱٫۷	۴٫۰	۱٫۲			
۱٫۶	۲٫۲	۲٫۶	۲٫۱	۵٫۲	۲٫۰۰	۱٫۳	۱٫۸	۱٫۶			
۱٫۴	۱٫۸	۳٫۰	۱٫۵	۲٫۷	۲٫۵۰	۱٫۱	۱٫۲	۲٫۰			
۳۱٫۹	۳۹٫۶	۱٫۲	۱۶۳٫۵	۱۶۶٫۰	۰٫۲۵	۱۳۱٫۹	۱۳۷٫۷	۰٫۲			
۱۰٫۳	۱۴٫۹	۱٫۴	۹۶٫۶	۱۰۵٫۶	۰٫۵۰	۴۸٫۰	۶۳٫۴	۰٫۴			
۳٫۲	۵٫۱	۱٫۸	۲۰٫۷	۳۴٫۵	۱٫۰۰	۴٫۵	۱۳٫۲	۰٫۸			
۲٫۳	۳٫۸	۲٫۰	۹٫۱	۲۰٫۱	۱٫۲۵	۲٫۳	۶٫۹	۱٫۰	۹	۱٫۱۸	۰٫۱
۱٫۹	۳٫۰	۲٫۲	۴٫۵	۱۲٫۲	۱٫۵۰	۱٫۶	۴٫۰	۱٫۲			
۱٫۵	۲٫۲	۲٫۶	۱٫۹	۵٫۲	۲٫۰۰	۱٫۲	۱٫۸	۱٫۶			
۱٫۳	۱٫۸	۳٫۰	۱٫۳	۲٫۷	۲٫۵۰	۱٫۱	۱٫۲	۲٫۰			

جدول ۴. مقادیر  $ATS$  تحت کنترل و خارج از کنترل تحت شیفت‌های عرض از مبدأ، و به‌ازای  $b_1$ های مختلف در روش  $VSIFT T^2$ .

$b_1 = 0.9$	$b_1 = 0.8$	$b_1 = 0.7$	$b_1 = 0.6$	$t_f = 1.0$	$\lambda$	$n_0$
$w = 4,5171$	$w = 3,1793$	$w = 2,3847$	$w = 1,8176$			
180%	160%	140%	120%	200%	0%	
121.6%	106.9%	92.7%	78.9%	137.7%	0.2%	
52.9%	45%	38%	31.7%	63.4%	0.4%	
8.8%	6.7%	5.3%	4.3%	13.2%	0.8%	
4%	3%	2.4%	1.9%	6.9%	1%	4
2.2%	1.7%	1.4%	1.1%	4%	1.2%	
1.1%	1%	0.8%	0.7%	1.8%	1.6%	
1%	0.9%	0.7%	0.6%	1.4%	1.8%	
0.9%	0.8%	0.7%	0.6%	1.2%	2%	

جدول ۵. مقادیر  $ATS$  تحت کنترل و خارج از کنترل تحت شیفت‌های عرض از مبدأ و به‌ازای  $m$ های مختلف در روش  $VSIFT T^2$ .

$m = 20$	$m = 10$	$m = 5$	$m = 3$	$m = 2$	$t_f = 1.0$	$\lambda$	$n_0$
160%	160%	160%	161.3%	166.7%	200%	0%	
106.9%	106.9%	107%	108.1%	112.5%	137.7%	0.2%	
45%	45%	45.1%	46.1%	49.1%	63.4%	0.4%	
6.7%	6.7%	7%	7.7%	8.9%	13.2%	0.8%	
3%	3%	3.2%	3.7%	4.4%	6.9%	1%	4
1.6%	1.7%	1.8%	2.1%	2.6%	4%	1.2%	
0.9%	1%	1%	1.1%	1.3%	1.8%	1.6%	
0.8%	0.9%	0.9%	1%	1.1%	1.4%	1.8%	
0.8%	0.8%	0.8%	0.9%	0.9%	1.2%	2%	

جدول ۶. مقایسه‌ی  $ATS$  تحت کنترل و خارج از کنترل تحت شیفت‌های عرض از مبدأ در روش‌های مختلف تطبیقی نمودار  $T^2$ .

$VSSI$	$VSS$	$VSI2$	$VSI1$	$VSIFT$			$\lambda$	$n_0$
$l = 0.887$	$w = 4,3160$	$l = 0.975$	$w = 2,9735$	$t_f = 1.0$				
$s = 0.1$	$n_1 = 3$	$s = 0.1$	$l = 1.0$	$m = 10$				
$w = 4,3160$	$n_2 = 12$	$t_0 = 0.8$	$s = 0.1$	$t_s = 0.1$	$FSR2$	$FSR1$		
$n_1 = 3$	$n_0 = 4$	$w = 3,1793$	$t_0 = 0.8$	$p_0 = 0.8$	$t_0 = 0.8$	$t_0 = 1.0$		
$n_2 = 12$				$t_0 = 0.8$				
				$w = 3,1793$				
160%	160%	160%	160%	160%	160%	200%	0%	
105.5%	107.4%	107.3%	107.1%	106.9%	110.2%	137.7%	0.2%	
36.7%	39.9%	45.7%	45.4%	45%	50.7%	63.4%	0.4%	
3.4%	4.6%	7.2%	7%	6.7%	10.6%	13.2%	0.8%	
1.9%	2.6%	3.2%	3.2%	3%	5.5%	6.9%	1%	4
1.4%	1.9%	1.8%	1.7%	1.7%	3.2%	4%	1.2%	
1%	1.4%	1%	1%	1%	1.4%	1.8%	1.6%	
0.9%	1.2%	0.9%	0.9%	0.9%	1.1%	1.4%	1.8%	
0.9%	1%	0.8%	0.8%	0.8%	1%	1.2%	2%	

جدول ۷. مقایسه‌ی  $ATS$  تحت کنترل و خارج از کنترل تحت شیفت‌های شیب در روش‌های مختلف تطبیقی نمودار  $T^2$ .

$VSSI$	$VSS$	$VSI\alpha$	$VSI\lambda$	$VSIFT$			$\beta$	$n_0$
$l = 0,887$	$w = 4,3160$	$l = 0,975$	$w = 2,9735$	$t_f = 1,0$				
$s = 0,1$	$n_1 = 3$	$s = 0,1$	$l = 1,0$	$m = 1,0$		$FSR\alpha$	$FSR\lambda$	
$w = 4,3160$	$n_r = 12$	$t_0 = 0,8$	$s = 0,1$	$t_s = 0,1$		$t_0 = 0,8$	$t_0 = 1,0$	
$n_1 = 3$	$n_0 = 4$	$w = 3,1793$	$t_0 = 0,8$	$p_0 = 0,8$				
$n_r = 12$				$t_0 = 0,8$				
				$w = 3,1793$				
۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۲۰۰,۰	۰,۰	
۱۳۱,۰۵	۱۳۲,۱۶	۱۳۱,۱۶	۱۳۱,۰۴	۱۳۰,۹۲	۱۳۲,۱۸	۱۶۶,۰	۰,۰۲۵	
۳۶,۳۴	۳۹,۶	۴۳,۴۳	۴۳,۱۱	۴۲,۷۲	۴۸,۵۶	۶۰,۷	۰,۰۷۵	
۱۵,۳۷	۱۸,۰۸	۲۲,۷۰	۲۲,۴۲	۲۲,۰۴	۲۷,۶	۳۴,۵	۰,۱۰۰	
۶,۶۷	۸,۵۶	۱۱,۹۷	۱۱,۷۶	۱۱,۴۴	۱۶,۰۸	۲۰,۱	۰,۱۲۵	۴
۲,۱۷	۳,۰۴	۳,۷۸	۳,۶۸	۵,۵۳	۶,۲۴	۷,۸	۰,۱۷۵	
۱,۶۲	۲,۲۴	۲,۳۷	۲,۳۱	۲,۲۳	۴,۱۶	۵,۲	۰,۲۰۰	
۱,۳۴	۱,۸۴	۱,۶۴	۱,۶۰	۱,۵۷	۲,۹۶	۳,۷	۰,۲۲۵	
۱,۱۷	۱,۶	۱,۲۵	۱,۲۳	۱,۲۲	۲,۱۶	۲,۷	۰,۲۵۰	

جدول ۸. مقایسه‌ی  $ATS$  تحت کنترل و خارج از کنترل تحت شیفت‌های انحراف استاندارد در روش‌های مختلف تطبیقی نمودار  $T^2$ .

$VSSI$	$VSS$	$VSI\alpha$	$VSI\lambda$	$VSIFT$			$\gamma$	$n_0$
$l = 0,887$	$w = 4,3160$	$l = 0,975$	$w = 2,9735$	$t_f = 1,0$				
$s = 0,1$	$n_1 = 3$	$s = 0,1$	$l = 1,0$	$m = 1,0$		$FSR\alpha$	$FSR\lambda$	
$w = 4,3160$	$n_r = 12$	$t_0 = 0,8$	$s = 0,1$	$t_s = 0,1$		$t_0 = 0,8$	$t_0 = 1,0$	
$n_1 = 3$	$n_0 = 4$	$w = 3,1793$	$t_0 = 0,8$	$p_0 = 0,8$				
$n_r = 12$				$t_0 = 0,8$				
				$w = 3,1793$				
۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۱۶۰,۰	۲۰۰,۰	۱,۰	
۲۸,۹۰	۳۱,۶۸	۲۷,۸۴	۲۷,۶۲	۲۷,۳۰	۳۱,۶۸	۳۹,۶	۱,۲	
۱۰,۰۴	۱۱,۹۲	۹,۴۵	۹,۳۳	۹,۱۳	۱۱,۹۲	۱۴,۹	۱,۴	
۳,۱۸	۴,۰۸	۲,۹۵	۲,۹۱	۲,۸۴	۴,۰۸	۵,۱	۱,۸	
۲,۳۱	۳,۰۴	۲,۱۵	۲,۱۳	۲,۰۹	۳,۰۴	۳,۸	۲,۰	۴
۱,۸۵	۲,۴	۱,۷۳	۱,۷۱	۱,۶۹	۲,۴	۳,۰	۲,۲	
۱,۴۰	۱,۷۶	۱,۳۲	۱,۳۱	۱,۳۰	۱,۷۶	۲,۲	۲,۶	
۱,۲۷	۱,۶	۱,۲۱	۱,۲۰	۱,۲۰	۱,۶	۲,۰	۲,۸	
۱,۱۸	۱,۴۴	۱,۱۳	۱,۱۳	۱,۱۲	۱,۴۴	۱,۸	۳,۰	

می‌دهد این روش در تمامی شیفت‌ها بهتر از سایر روش‌ها عمل می‌کند. نتایج مشابه برای پارامترهای شیب و انحراف استاندارد نیز در جداول ۷ و ۸ آورده شده است.

### ۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، با هدف بهبود عملکرد نمودار کنترل  $T^2$  در پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز دو، استفاده از چهار نمودار تطبیقی  $VSSI$ ،  $VSI$ ،  $VSS$  و  $VSIFT$  مورد بررسی قرار گرفت. عملکرد روش‌های فوق براساس معیار متوسط زمان هشدار و با استفاده از رویکرد زنجیره‌های مارکوف محاسبه و با هم مقایسه شد. مثال‌های

یکسان باشد. در روش دوم، مقدار  $s$  در نمودار  $VSI$  را برابر با  $t_s$  قرار داده و با یکسان کردن حد هشدار  $w$  در دو نمودار سعی می‌کنیم مقدار  $l$  را به گونه‌ی انتخاب کنیم که متوسط فاصله نمونه‌گیری و  $ATS$  تحت کنترل در دو روش یکسان باشد. مقایسه‌ی ستون‌های ۶ و ۷ با ستون ۵ نشان می‌دهد روش  $T^2$   $VSIFT$  در مقایسه با نمودار  $VSI T^2$  دارای عملکرد نسبتاً بهتری است، از نقطه‌نظر اجرایی نیز استفاده از این نمودار راحت‌تر به نظر می‌رسد.

ستون ۸ در جدول ۶، به نمودار  $VSS T^2$  تخصیص یافته است. مقایسه‌ی این ستون با ستون ۵ نشان می‌دهد که برای اکثر شیفت‌های کوچک، روش  $VSS$  بهتر از  $VSIFT$  و برای شیفت‌های متوسط تا بزرگ، روش  $VSIFT$  بهتر از  $VSS$  عمل می‌کند. ستون آخر جدول نیز مربوط به روش  $VSSI$  است که نتایج آن نشان

کنترل تطبیقی برای پایش سایر پروفایل‌ها، شامل پروفایل‌های چندجمله‌ای، چندمتغیره و غیرخطی، طراحی اقتصادی و اقتصادی - آماری نمودارهای کنترل تطبیقی برای پایش پروفایل‌ها، استفاده از سایر رویکردهای تطبیقی در پایش پروفایل‌های خطی ساده از جمله استفاده از حدود هشدار مضاعف و طراحی نمودارهای  $VSS$  با متغیر کردن تعداد نمونه‌ها در هر سطح از پروفایل می‌تواند از مهم‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی آتی محسوب شود.

عددی نشان داد نمودارهای تطبیقی در تمام شیفت‌ها بهتر از نمودار  $T^2$  با نرخ ثابت عمل می‌کند و از میان آنها نمودار  $VSSI T^2$  در شیفت‌های شیب و عرض از مبدأ بهتر عمل می‌کند. پس از آن عملکرد روش  $VSS T^2$  به‌ویژه در شیفت‌های کوچک و متوسط بهتر از سایر روش‌هاست. در شیفت‌های انحراف استاندارد نیز نمودارهای  $VSI T^2$  و  $VSI FT T^2$  عملکرد یکسان و بهتری از سایر روش‌ها دارند. با توجه به نتایج به دست آمده، گسترش سایر نمودارهای تطبیقی از جمله طراحی نمودارهای

## پانوشته‌ها

1. statistical process control
2. signature
3. waveform
4. fixed ratio sampling (FRS)
5. average run length (ARL)
6. حالت جاذب حالتی است که سیستم پس از رسیدن به آن متوقف می‌شود و امکان‌گذار ندارد.

## منابع (References)

1. Montgomery, D., *Introduction to Statistical Quality Control*, New York: John Wiley and Sons (2009).
2. Mestek, O., Pavlik, J. and Suchanek, M. "Multivariate control charts: control charts for calibration curves", *Fresenius Journal of Analytical Chemistry*, **350**(6), pp. 344-351 (1994).
3. Stover, F. and Brill, R. "Statistical quality control applied to ion chromatography calibrations", *Journal of Chromatography A*, **804**(1-2), pp. 37-43 (1998).
4. Kang, L. and Albin, S. "On-line monitoring when the process yields a linear profile", *Journal of Quality Technology*, **32**(4), pp. 418-426 (2000).
5. Kim, K., Mahmoud, M. and Woodall, W. "On the monitoring of linear", *Journal of Quality Technology*, **35**(3), pp. 317-328 (2003).
6. Mahmoud, M. and Woodall, W. "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications", *Technometrics*, **46**(4), pp. 380-391 (2004).
7. Mahmoud, M., Parker, P., Woodall, W. and Hawkins, D. "A change point method for linear profile data", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**(2), pp. 247-268 (2007).
8. Gupta, S., Montgomery, D. and Woodall, W. "Performance evaluation of two methods for online monitoring of linear calibration profiles", *International Journal of Production Research*, **44**(10), pp. 1927-1942 (2006).
9. Zou, C., Zhang, Y. and Wang, Z. "Control chart based on change-point model for monitoring linear profiles", *IIE Transactions*, **38**(12), pp. 1093-1103 (2006).
10. Zhang, J., Li, Z. and Wang, Z. "Control chart based on likelihood ratio for monitoring linear profiles", *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**(4), pp. 1440-1448 (2009).
11. Saghaei, A., Mehrjoo, M. and Amiri, A. "A CUSUM-based method for monitoring simple linear profiles", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **45**(11), 1252-1260 (2009).
12. Noorossana, R., Saghaei, A. and Amiri, A., *Statistical Analysis of Profile Monitoring*, Hoboken, New jersey: John wiley & sons. Inc (2011).
13. Prabhu, S., Montgomery, D. and Runger, G. "A combined adaptive sample size and sampling interval  $\bar{X}$  control scheme", *Journal of Quality Technology*, **26**(3), pp. 164-176 (1994).
14. Costa, A. " $\bar{X}$  charts with variable sample size and sampling intervals", *Journal of Quality Technology*, **29**(2), pp. 197-204 (1997).
15. Celano, G., Costa, A. and Fichera, S. "Statistical design of variable sample size and sampling interval  $\bar{X}$  control charts with run rules", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **28**(9-10), pp. 966-977 (2006).
16. Reynolds Jr., M., Amin, R. and Arnold, J. "Cusum charts with variable sampling intervals", *Technometrics*, **32**(4), pp. 371-384 (1990).
17. Zhang, S. and Wu, Z. "A CUSUM scheme with variable sample size for monitoring process shifts", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **33**(9-10), pp. 977-987 (2007).
18. Reynolds Jr, M. "Variable sampling interval control charts with sampling at fixed times", *IIE Transactions*, **28**(6), pp. 497-510 (1996)..
19. Reynolds, M. and Arnold, J. "EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals", *IIE Transactions*, **33**(6), pp. 511-530 (2001).
20. Aparisi, F. and Haro, C. "Hotelling's  $T^2$  control chart with variable sampling intervals", *International Journal of Production Research*, **39**(14), pp. 3127-3140 (2001).
21. Zou, C., Tsung, F. and Wang, Z. "Monitoring general linear profiles using multivariate exponentially weighted moving average scheme", *Technometrics*, **49**(4), pp. 395-408 (2007).

22. Li, Z. and Wang, Z. "An exponentially weighted moving average scheme with variable sampling intervals for monitoring linear profiles", *Computers & Industrial Engineering*, **59**(4), pp. 630-637 (2010).
23. Capizzi, G. and Masarotto, G. "Linear profile monitoring using an adaptive EWMA control chart", *IEEE*, DOI: 10.1109/IEEM.2010.5674339, pp. 1425-1429 (2010).
24. Hotelling, H., *Multivariate Quality Control, Techniques of Statistical Analysis*, C. Eisenhart, M. Hastay, & W. Wallis, Eds., New York: McGraw-Hill (1947).
25. Lee, M. "Variable sampling interval Hotellings  $T^2$  chart with sampling at fixed times", *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, **27**(5), pp. 394-406 (2010).
26. Aparisi, F. and Haro, C. "A comparison of  $T^2$  control charts with variable sampling schemes as opposed to MEWMA chart", *International Journal of Production Research*, **41**(10), pp. 2169-2182 (2003).
27. Akhavan Niaki, S.T., Abbasi, B. and Arkat, J. "A generalized linear statistical model approach to monitor profiles", *IJE Transactions A: Basics*, **20**(3), pp. 233-242 (2007).