

طراحی اقتصادی نمودار کنترل EWMA-3 تعدیل شده برای پایش پروفایل‌های خطی ساده با رویکرد زنجیره‌ی مارکوف

امیرحسین امیری* (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد
محبوبه محبی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
گروه مهندسی صنایع، دانشگاه پیام نور

وحید بوادران (استادیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، تابستان ۱۳۹۴
دوری ۱ - ۳۱، شماره ۱، ص. ۱۱-۲۰

در بعضی از مسائل کنترل فرایند آماری، کیفیت به‌وسیله‌ی یک پروفایل خطی ساده توصیف می‌شود. یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲، نمودار کنترل EWMA-3 است. در این مقاله ابتدا نمودار کنترل EWMA-3 با اندکی تغییر به‌گونه‌ی طراحی می‌شود که بتوان به‌جای یک محصول در هر سطح از مقادیر x ، از چندین محصول استفاده کرد. سپس روشی برای محاسبه‌ی متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترل EWMA-3 تعدیل شده برای پایش پروفایل‌های خطی ساده براساس رویکرد زنجیره‌ی مارکوف ارائه می‌شود. در ادامه، طراحی اقتصادی نمودار کنترل EWMA-3 تعدیل شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. از تابع لورنز و ونس به‌عنوان تابع هزینه استفاده شده که در آن پارامترهای هزینه‌ی تولید محصول نامنطبق براساس تابع هزینه‌ی تاگوچی محاسبه می‌شود. برای حل مدل طراحی اقتصادی نمودار EWMA-3 تعدیل شده از الگوریتم فراابتکاری ژنتیک استفاده شده است. در انتها آنالیز حساسیت روی پارامترهای مدل و اندازه‌ی جمعیت الگوریتم ژنتیک انجام و نتایج تحلیل شده است.

واژگان کلیدی: طراحی اقتصادی، نمودار کنترل EWMA-3، زنجیره‌ی مارکوف، پروفایل خطی ساده.

۱. مقدمه

در اکثر کاربردهای کنترل فرایند آماری فرض می‌شود که عملکرد یک فرایند یا ویژگی یک محصول را می‌توان به‌وسیله‌ی توزیع یک مشخصه‌ی کیفی توصیف و به‌وسیله‌ی نمودارهای کنترلی تک‌متغیره کنترل کرد، یا به‌طور عام می‌توان این عملکرد را با توزیع چندین مشخصه‌ی کیفی توصیف و به‌وسیله‌ی نمودارهای کنترل چندمتغیره کنترل کرد.

در بسیاری از شرایط کیفیت یک فرایند یا محصول به‌وسیله‌ی رابطه‌ی بی‌بین یک متغیر پاسخ و یک یا چندین متغیر مستقل توصیف می‌شود که محققین این رابطه را «پروفایل» می‌نامند.

در بعضی از کاربردها همچون کالیبراسیون، این رابطه با استفاده از یک مدل رگرسیون خطی ساده توصیف می‌شود درحالی‌که در موقعیت‌های دیگر به مدل‌های

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۰/۰۹، اصلاحیه ۲۳/۰۲/۱۳۹۲، پذیرش ۱۳۹۲/۱۱/۰۹.

پیچیده‌تری نیازمندیم. رابطه‌ی مقدار گرم حل شده از شیرین‌کننده‌ی مصنوعی در یک لیتر آب در دماهای مختلف^[۱]، رابطه‌ی بین چگالی و عمق تخته نئوپان^[۲]، و رابطه‌ی بین گشتاور و دور موتور خودرو^[۳] مثال‌هایی از کاربردهای بی‌شمار پروفایل‌ها می‌باشند. رودال و همکاران^[۴] تحقیق در حوزه‌ی پایش پروفایل‌ها را با توجه به جدید بودن و کاربردهای بی‌شمار آن در این حوزه، قویاً توصیه می‌کنند. انواع مختلف پروفایل‌ها شامل پروفایل خطی ساده، پروفایل‌های خطی چندگانه، پروفایل‌های چندجمله‌ی، پروفایل‌های چندمتغیره، پروفایل‌های مبتنی بر الگوهای خطی تعمیم‌یافته، و پروفایل‌های غیرخطی توسط محققین مورد بررسی قرار گرفته و روش‌هایی برای پایش آنها در هر دو فاز ۱ و ۲ ارائه شده است. در حوزه‌ی پایش پروفایل‌های خطی چندگانه^[۵-۷] مطالعات بسیاری انجام شده است. در برخی از این مطالعات روش‌هایی برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌ی در هر دو فاز ۱ و ۲ ارائه شده است.^[۸-۱۱] در برخی دیگر نیز پایش پروفایل‌های خطی تعمیم‌یافته^[۱۲،۱۳] مورد بررسی قرار گرفته و اخیراً نیز تحقیقاتی درخصوص پایش پروفایل‌های غیرخطی

انجام گرفته است. [13, 14] روش هایی نیز برای پایش پروفایل های خطی ساده ارائه شده است. [15-19] برای اطلاعات بیشتر درخصوص پایش انواع مختلف پروفایل ها به نورالسنا و همکاران [20] مراجعه شود.

یکی از معروف ترین روش ها برای پایش پروفایل خطی ساده در فاز ۲، نمودار کنترل EWMA-3 پیشنهادی کیم و همکاران [16] است. در فاز ۲ تأکید روی کشف سریع روندها و شیفت هاست و این موضوع معمولاً به وسیله ی متوسط توزیع طول دنباله (ARL) اندازه گیری می شود. لازم به ذکر است که نمودار کنترلی EWMA-3 پیشنهادی [16] فرض می کند که تنها مشخصه ی کیفی یک محصول در سطح مختلف x اندازه گیری می شود در حالی که گاهی ممکن است بتوان اندازه نمونه یی بیشتر از یک محصول را تهیه کرد که در ادامه بدان خواهیم پرداخت. این نمودار، نمودار کنترل EWMA-3 تعدیل شده نام دارد. لازم به ذکر است که در نمودار طراحی شده تنها یک متغیر پاسخ وجود دارد که به یک متغیر مستقل مرتبط است. اما تعداد مشاهدات آن تک متغیر پاسخ در هر سطح از متغیر مستقل می تواند بیشتر از ۱ باشد. این مسئله با پروفایل های چندمتغیره، که در هر سطح از متغیر مستقل بیش از یک متغیر پاسخ وجود دارد، متفاوت است. برای اطلاعات بیشتر درخصوص پروفایل های چندمتغیره و روش های پایش آنها به ایوزیان و همکاران، [21] نورالسنا و همکاران، [22] و زو و همکاران [23] مراجعه شود. از طرف دیگر نمودار کنترل EWMA-3 پیشنهادی کیم و همکاران [16] به صورت آماری طراحی شده، که این رویکرد به مباحث اقتصادی نمودارهای کنترل نمی پردازد. رویکردهای دیگری برای طراحی نمودارهای کنترل توسط محققین ارائه شده است که از آن جمله می توان به طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل اشاره کرد. در رویکرد طراحی اقتصادی به ویژگی های اقتصادی نمودارهای کنترل توجه می شود. اخیراً طراحی اقتصادی و اقتصادی - آماری نمودارهای کنترل EWMA/R برای پایش پروفایل های خطی ساده مورد بررسی قرار گرفته است. [24] در این نوشتار طراحی اقتصادی نمودار کنترل EWMA-3 تعدیل شده مورد بررسی قرار می گیرد. در این رویکرد پارامترهای نمودارهای کنترل در روش EWMA-3 تعدیل شده شامل اندازه نمونه، فاصله بین دو بار نمونه گیری، ضرایب سه نمودار کنترل عرض از مبدأ، شیب، واریانس و ضرایب هموارسازی سه نمودار کنترل مذکور به گونه یی محاسبه می شود که هزینه های مربوط به استفاده از نمودارهای کنترل کمینه شود. مدل های هزینه ی مختلفی توسط محققین ارائه شده که از آن جمله می توان به مدل دانکن [25] یا مدل لورنز و ونس [26] اشاره کرد. در این نوشتار از مدل لورنز و ونس به عنوان تابع هدف مدل طراحی اقتصادی استفاده می شود. لورنز و ونس یک مدل اقتصادی برای طراحی نمودارهای کنترل ارائه کردند که تقریباً از روشی متفاوت از روش های دیگر استفاده می کند. نکته ی اصلی در مورد مدل آنها این است که در این مدل به جای استفاده از ریسک های β , α از متوسط طول دنباله در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل استفاده می شود. این مدل قابلیت استفاده با توزیع های احتمال مختلف را ایجاد می کند. از ویژگی مدل اقتصادی پیشنهادی می توان به بهینه سازی همزمان سه نمودار کنترل EWMA برای پایش عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار از لحاظ اقتصادی اشاره کرد. همچنین از رویکرد تاگوچی برای محاسبه ی هزینه های تولید محصول نامنطبق در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل استفاده می شود. در مدل اقتصادی ارائه شده برای محاسبه ی مقادیر متوسط طول دنباله تحت کنترل و خارج از کنترل از زنجیره ی مارکوف استفاده می شود.

ساختار نوشتار حاضر به این صورت است که در بخش ۲ نمودار کنترل EWMA-3 تعدیل شده توضیح داده می شود. در بخش ۳ رویکرد زنجیره ی مارکوف برای محاسبه ی متوسط طول دنباله ی (ARL) نمودار EWMA-3 تعدیل شده ارائه می شود. در بخش ۴ نیز مدل طراحی اقتصادی نمودار مذکور توضیح داده

خواهد شد. در بخش ۵ روش حل مدل اقتصادی ارائه می شود. مدل و روش حل با استفاده از یک مثال عددی در بخش ۶ ارزیابی می شود و در بخش ۷ پارامترهای ورودی مدل تحت آنالیز حساسیت قرار گرفته و اثر آن روی متغیرهای تصمیم تحلیل می شود. در بخش انتهایی نتیجه گیری ارائه می شود.

۲. نمودار کنترل EWMA-3 تعمیم یافته

کیم و همکاران [16] نمودار EWMA-3 را چنان طراحی کردند که تنها یک متغیر پاسخ در هر سطح از متغیر مستقل قابل اندازه گیری است. اما در مقاله ی حاضر حالتی مورد بررسی قرار می گیرد که بتوان در آن بیش از یک مقدار از متغیر پاسخ در هر سطح متغیر مستقل مشاهده کرد. لذا در این نوشتار آماره ها و حدود کنترل نمودارهای کنترل EWMA عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار را تعمیم می دهیم تا بتوان مسئله ی مورد نظر را به درستی مدل کرد.

اگر y_{ijk} مقدار k ام متغیر پاسخ را در سطح i ام در نمونه ی j ام نشان دهد $(x_1, y_{ij1}, y_{ij2}, \dots, y_{ijn})$ هنگامی که فرایند تحت کنترل آماری است مدل اصلی به صورت رابطه ی ۱ است:

$$y_{ijk} = A_0 + A_1 x_i + \varepsilon_{ijk} \quad (1)$$

$$j = 1, 2, \dots$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

که در آن ε_{ijk} ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. مقادیر متغیر تصادفی x مقداری ثابت اند؛ مقدار k ام متغیر پاسخ را در سطح i ام متغیر x در نمونه j نشان می دهد. کیم و همکاران [16] مقادیر x را به گونه یی کد کردند که میانگین مقادیر کد شده برابر صفر شود. این کار باعث می شود برآوردکننده های حداقل مربعات شیب و عرض از مبدأ برای هر نمونه از یکدیگر مستقل شود. بعد از کد کردن مقادیر x ، مدل جایگزین مدل اصلی در رابطه ی ۱ عبارت خواهد بود از:

$$y_{ijk} = B_0 + B_1 x_i^* + \varepsilon_{ijk} \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

که در آن $x_i^* = (x_i - \bar{x})$ و $B_1 = A_1$, $B_0 = A_0 + A_1 \bar{x}$ برای زامین نمونه، برآوردکننده ی حداقل مربعات B_0 به صورت $b_{0j} = \bar{y}_j$ است در حالی که برآوردکننده ی حداقل مربعات B_1 به صورت $b_{1j} = s_{xyj} / s_{xxj}$ است. b_{0j} و b_{1j} دارای توزیع نرمال به ترتیب با میانگین B_0 و B_1 ، و واریانس $\sigma^2 / (nm)$ و $\sigma^2 / (ns_{xx})$ است. [26]

از نمودارهای کنترل EWMA برای پایش عرض از مبدأ، شیب و پراکندگی خطاها استفاده می شود. آماره ی نمودار EWMA برای پایش عرض از مبدأ B_0 ، بعد از محاسبه ی b_{0j} برای هر نمونه به صورت رابطه ی ۳ تعریف می شود:

$$EWMA_I(j) = \theta_I b_{0j} + (1 - \theta_I) EWMA_I(j-1) \quad (3)$$

$$j = 1, 2, \dots$$

۳. رویکرد زنجیره‌ی مارکوف

برای محاسبه‌ی ARL نمودار کنترل EWMA-۳ برای پایش عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف استفاده می‌شود. این روش شامل تقسیم فاصله بین حدود بالا و پایین نمودار کنترل به $t = 2k + 1$ زیرفاصله‌ی مساوی به پهنای $2f$ است. لازم به ذکر است که t عدد صحیح و فرد است. اگر آماره‌ی EWMA بین $d_j - f$ و $d_j + f$ برای $k, \dots, -k+1, -k, -k-1, \dots, -k-1$ قرار گیرد بدین معناست که آماره‌ی EWMA در مرکز فاصله‌ی z قرار دارد. d_j نقطه‌ی مرکزی فاصله‌ی z را نشان می‌دهد.

در رویکرد زنجیره‌ی مارکوف، توزیع طول دنباله‌ی EWMA به‌وسیله‌ی بردار احتمال اولیه و ماتریس احتمال انتقال تعیین می‌شود. در روش پیشنهادی ARL هر یک از نمودارهای کنترل EWMA برای پایش عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار به‌صورت جداگانه محاسبه و سپس ARL کل براساس نتایج ARL هر یک از نمودارها محاسبه خواهد شد.

احتمال‌های انتقال تحت کنترل برای نمودار کنترل EWMA عرض از مبدأ براساس رویکرد لوکاس و ساکوسی^[۲۸] به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$h_{ij} = \phi \left((\theta \cdot \sigma_{b_0})^{-1} \{ (d_i + f) - (\lambda - \theta) d_j - \theta B_0 \} \right) - \phi \left((\theta \cdot \sigma_{b_0})^{-1} \{ (d_i - f) - (\lambda - \theta) d_j - \theta B_0 \} \right) \quad (10)$$

که در آن، ϕ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد، θ ضریب هموارسازی، d_j نقطه‌ی مرکزی فاصله‌ی z ، f نصف فاصله‌های تقسیم شده، B_0 عرض از مبدأ مدل تغییر فرم‌یافته در رابطه‌ی ۲ و h_{ij} احتمال انتقال آماره‌ی EWMA عرض از مبدأ از وسط فاصله‌ی i به وسط فاصله‌ی j است. لازم به ذکر است که برای محاسبه‌ی f ، فاصله‌ی بین حدود کنترل نمودار EWMA برای پایش عرض از مبدأ (براساس رابطه‌ی ۴) را به t قسمت تقسیم کرده و نتیجه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. چنانچه مقادیر احتمال انتقال در داخل ماتریس H قرار گیرند، ماتریس احتمال انتقال $t \times t$ حاصل می‌شود. در این صورت متوسط طول دنباله تحت کنترل EWMA برای پایش عرض از مبدأ از رابطه‌ی ۱۱ محاسبه می‌شود:

$$ARL_{\cdot I} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1} \mathbf{s} \quad (11)$$

که در آن، \mathbf{s} یک بردار ستونی $1 \times t$ شامل اعداد ۱ است، \mathbf{p} یک بردار سطری $1 \times t$ شامل اعداد صفر است که درایه‌ی q آن برابر با ۱ است، $q = t/2 + 0.5$ و \mathbf{I} یک ماتریس همانی $t \times t$ است. $ARL_{\cdot I}$ متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل نمودار کنترل EWMA برای پایش عرض از مبدأ را نشان می‌دهد.

برای محاسبه‌ی متوسط $ARL_{\cdot I}$ (متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل نمودار EWMA برای پایش عرض از مبدأ) کافی است که مقدار $B_0 + \lambda \sigma_0$ را در رابطه‌ی ۱۰ به جای B_0 جایگزین کنیم.

برای محاسبه‌ی معیارهای $ARL_{\cdot s}$ (متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل نمودار EWMA برای پایش شیب) و $ARL_{\cdot 1s}$ (متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل نمودار EWMA برای پایش شیب) همانند محاسبه‌ی معیارهای ARL در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل نمودار EWMA برای پایش عرض از مبدأ عمل می‌کنیم، با این تفاوت که برای محاسبه‌ی احتمال انتقال از رابطه‌ی ۱۲ استفاده می‌شود:

$$q_{ij} = \phi \left((\theta \cdot \sigma_{b_1})^{-1} \{ (d_i + f) - (\lambda - \theta) d_j - \theta B_1 \} \right) - \phi \left((\theta \cdot \sigma_{b_1})^{-1} \{ (d_i - f) - (\lambda - \theta) d_j - \theta B_1 \} \right) \quad (12)$$

که در آن $1 < \theta_I \leq \theta$ ثابت هموارسازی و $B_0 = EWMA_I(0)$ است. حدود کنترل بالا و پایین نمودار تعمیم‌یافته به‌صورت رابطه‌ی ۴ است:

$$UCL_I = B_0 + L_I \sigma \sqrt{\frac{\theta_I}{(2 - \theta_I) mn}}$$

$$LCL_I = B_0 - L_I \sigma \sqrt{\frac{\theta_I}{(2 - \theta_I) mn}} \quad (4)$$

که در آن $L_I > 0$ چنان انتخاب می‌شود که ARL تحت کنترل مشخصی به دست آید. از برآوردهای شیب B_1 ، b_{1j} در نمودار EWMA برای پایش شیب استفاده می‌شود. در این صورت آماره‌ی EWMA برای پایش شیب به‌صورت رابطه‌ی ۵ تعریف می‌شود:

$$EWMA_S(j) = \theta_S b_{1j} + (1 - \theta_S) EWMA_S(j - 1)$$

$$j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

که در آن رابطه‌ی $0 < \theta_S \leq 1$ ثابت هموارسازی و $B_1 = EWMA_S(0)$ است. حدود کنترل بالا و پایین نمودار EWMA برای پایش شیب به‌صورت رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود.

$$UCL_S = B_1 + L_S \sigma \sqrt{\frac{\theta_S}{(2 - \theta_S) n S_{xx}}}$$

$$LCL_S = B_1 - L_S \sigma \sqrt{\frac{\theta_S}{(2 - \theta_S) n S_{xx}}} \quad (6)$$

که در آن $L_S > 0$ به‌گونه‌ی انتخاب می‌شود که ARL تحت کنترل مشخصی به دست آید.

کیم و همکاران^[۱۶] از نمودار EWMA براساس رویکرد کرودر و همیلتون^[۲۷] برای پایش پراکندگی خطاها استفاده کردند. در این روش آنها از مقدار MSE_j (برآورد کننده σ^2 با استفاده از باقی‌مانده‌های خط برازش شده در نمونه‌ی z) برای محاسبه‌ی آماره‌ی EWMA استفاده کردند که با توجه به n تکرار در هر سطح متغیر مستقل، آماره‌ی $EWMA_E$ به‌صورت رابطه‌ی ۷ محاسبه می‌شود.

$$EWMA_E(j) = \max\{\theta_E \ln(MSE_j) + (1 - \theta_E) EWMA_E(j - 1), \ln(\sigma_0^2)\}$$

$$j = 1, 2, \dots \quad (7)$$

که در آن $0 < \theta_E \leq 1$ ثابت هموارسازی و $\ln(\sigma_0^2) = EWMA_E(0)$ است. در روش پیشنهادی توسط آن‌ها، مقدار σ_0^2 (مقدار تحت کنترل σ^2) برابر ۱ فرض شده است. بنابراین $EWMA_E(0) = 0$ و حد کنترل بالا و پایین نمودار EWMA برای پایش انحراف معیار به‌صورت رابطه‌ی ۸ است:

$$UCL_E = L_E \sqrt{\theta_E \text{Var}[\ln(MSE_j)]} / (2 - \theta_E) \quad LCL_E = 0 \quad (8)$$

که در آن $\text{Var}[\ln(MSE_j)]$ برای نمودار $EWMA_E$ تعمیم یافته با استفاده از رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌شود:

$$\text{Var}[\ln(MSE_j)] = \frac{2}{mn - 2} + \frac{2}{(mn - 2)^2} + \frac{4}{3(mn - 2)^3} - \frac{16}{15(mn - 2)^5} \quad (9)$$

که در آن $L_E > 0$ به‌گونه‌ی انتخاب می‌شود که ARL تحت کنترل مشخصی به دست آید.

چنانچه پارامتر عرض از مبدأ تغییر کند، به شرط آن که عرض از مبدأ خارج از کنترل باشد، احتمال تحت کنترل اعلام شدن فرایند توسط هر سه نمودار با استفاده از رابطه‌ی ۲۰ محاسبه می‌شود:

$$\beta_{\text{overall undershift in intercept}} = \beta_I (1 - \alpha_s)(1 - \alpha_E) \quad (20)$$

در نتیجه:

$$\beta_{\text{overall undershift in intercept}} = \left(\frac{ARL_{\lambda I} - 1}{ARL_{\lambda I}} \right) \left(1 - \frac{1}{ARL_{\lambda S}} \right) \left(1 - \frac{1}{ARL_{\lambda E}} \right) \quad (21)$$

و از رابطه‌ی $ARL_{\text{overall}} = 1/(1 - \beta)$ ، متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل کل نمودار EWMA-۳ محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است که β کل بدان معناست که اگرچه فرایند از لحاظ عرض از مبدأ خارج از کنترل است، هر سه نمودار کنترل فرایند را تحت کنترل نشان می‌دهند. از آنجا که عرض از مبدأ واقعاً خارج از کنترل است، احتمال تحت کنترل اعلام کردن آن برابر با β است. اما از آنجا که شیب و انحراف معیار تحت کنترل اند احتمال تحت کنترل اعلام کردن نمودارهای مرتبط به ترتیب برابر با $(1 - \alpha_E)$ و $(1 - \alpha_s)$ است.

با استدلال مشابه احتمال خطای نوع II نمودار کل EWMA-۳ تحت شیفت در شیب و انحراف معیار به ترتیب با روابط ۲۳ و ۲۵ محاسبه می‌شوند:

$$\beta_{\text{overall undershift in slope}} = \beta_S (1 - \alpha_I)(1 - \alpha_E) \quad (22)$$

$$\beta_{\text{overall undershift in slope}} = \left[\frac{ARL_{\lambda S} - 1}{ARL_{\lambda S}} \right] \left(1 - \frac{1}{ARL_{\lambda I}} \right) \left(1 - \frac{1}{ARL_{\lambda E}} \right) \quad (23)$$

$$\beta_{\text{overall undershift in standard deviation}} = \beta_E (1 - \alpha_I)(1 - \alpha_S) \quad (24)$$

$$\beta_{\text{overall undershift in standard deviation}} = \left[\frac{ARL_{\lambda E} - 1}{ARL_{\lambda E}} \right] \left(1 - \frac{1}{ARL_{\lambda S}} \right) \left(1 - \frac{1}{ARL_{\lambda I}} \right) \quad (25)$$

ARL_{λ} کل نمودار EWMA-۳ تحت شیفت در شیب و انحراف معیار به صورت رابطه‌ی ۲۶ محاسبه می‌شود:

$$ARL_{\text{overall}} = 1/(1 - \beta_{\text{overall}}) \quad (26)$$

برای محاسبه‌ی متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل تحت شیفت همزمان (دوتایی و سه‌تایی) در پارامترها نیز از استدلال مشابه استفاده کرده و آنها را محاسبه می‌کنیم؛ به‌عنوان مثال تحت شیفت همزمان در هر سه پارامتر ARL_{λ} با استفاده از رابطه‌ی ۲۷ محاسبه می‌شود:

$$ARL_{\text{overall}} = \left(1 / \left[1 - \left(\frac{ARL_{\lambda I} - 1}{ARL_{\lambda I}} \right) \left(\frac{ARL_{\lambda S} - 1}{ARL_{\lambda S}} \right) \left(\frac{ARL_{\lambda E} - 1}{ARL_{\lambda E}} \right) \right] \right) \quad (27)$$

و اگر دو پارامتر یا تنها یک پارامتر تحت شیفت قرار گیرد ARL_{λ} کل با توجه به این که کدام یک از پارامترها تحت شیفت قرار گیرد تغییر کرده و محاسبه می‌شود.

که در آن σ_{b_1} انحراف معیار برآورد پارامتر B_1 است. بقیه‌ی پارامترها مشابه پارامترهای رابطه‌ی ۱۰ تعریف می‌شود. برای محاسبه‌ی $ARL_{\lambda S}$ (متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل نمودار EWMA برای پایش شیب) کافی است مقدار $B_1 + \beta\sigma$ را در رابطه‌ی ۱۲ به جای B_1 جایگزین کنیم.

برای محاسبه‌ی ARL تحت کنترل و خارج از کنترل نمودار EWMA برای پایش پراکندگی، ابتدا فاصله‌ی بین حدود کنترل را به t قسمت مساوی (t عدد فرد و صحیح است) تقسیم می‌کنیم. مجدداً مانند روش ارائه شده برای عرض از مبدأ و شیب مکان قرار گرفتن آماره‌ی EWMA برای پایش پراکندگی در مرکز فاصله‌ی زام به‌عنوان حالت سیستم در نظر گرفته می‌شود. عناصر ماتریس انتقال براساس روش دوگان و هربرت^[۲۹] به صورت رابطه‌ی ۱۳ محاسبه می‌شود:

$$r_{ij} = p_{ij} - p_{i(j-1)} \quad i, j = 1, 2, \dots, t \quad (13)$$

که در آن p_{ij} با استفاده از رابطه‌ی ۱۴ محاسبه می‌شود:

$$p_{ij} = \chi_{mn-2}^2 \left\{ \frac{(mn-2) \exp((j-1) - (1-\theta)(i-\frac{1}{\lambda})) (UCL_E - LCL_E) / \theta}{W^2} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, t \quad i = 2, 3, \dots, t \quad (14)$$

در رابطه‌ی ۱۴ $\chi_{(mn-2)}^2$ تابع توزیع تجمعی مربع کای با $(mn-2)$ درجه آزادی را نشان می‌دهد. W به صورت σ_1/σ_0 محاسبه می‌شود که در حالت تحت کنترل برابر با ۱ خواهد بود. باید توجه داشت که چون در رگرسیون خطی ساده دو پارامتر B_1 و B_0 تخمین زده می‌شوند درجه آزادی توزیع مربع کای برابر با $(mn-2)$ است. همچنین p_{1j} و p_{i0} به ترتیب با استفاده از روابط ۱۵ و ۱۶ محاسبه می‌شوند:

$$p_{1j} = \chi_{n-2}^2 \left\{ \frac{(n-2) \exp((j-1) (UCL_E - LCL_E) / \theta)}{W^2} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (15)$$

$$p_{i0} = 0 \quad i = 2, 3, \dots, t \quad (16)$$

در نهایت ARL_{λ} برای نمودار کنترل EWMA برای پایش پراکندگی به صورت رابطه‌ی ۱۷ محاسبه می‌شود:

$$ARL_{\lambda E} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1} \mathbf{s} \quad (17)$$

که پارامترهای آن مشابه پارامترهای رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شود. برای محاسبه‌ی $ARL_{\lambda E}$ کافی است مقدار (σ_1/σ_0) را جایگزین W کنیم. تا این مرحله ARL_{λ} و ARL_{λ} تک تک نمودارهای کنترل EWMA برای پایش عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار محاسبه شده است. در ادامه روابط لازم برای محاسبه‌ی ARL_{λ} و ARL_{λ} کل ارائه می‌شود. ARL_{λ} کل را از رابطه‌ی ۱۸ محاسبه می‌کنیم:

$$ARL_{\lambda} = 1 / \left[1 - \left(1 - 1/ARL_{\lambda I} \right) \left(1 - 1/ARL_{\lambda S} \right) \left(1 - 1/ARL_{\lambda E} \right) \right] \quad (18)$$

واضح است که رابطه‌ی ۱۸ بر مبنای رابطه‌ی ۱۹ محاسبه شده است:

$$\alpha_{\text{overall}} = 1 - (1 - \alpha_I)(1 - \alpha_S)(1 - \alpha_E) \quad (19)$$

γ_2 : اگر تولید در حین اصلاح فرایند ادامه پیدا کند برابر ۱ و در غیر این صورت صفر است؛

S : متوسط تعداد نمونه‌های گرفته شده زمانی که فرایند تحت کنترل است؛

F : هزینه هر هشدار اشتباهی؛

R : هزینه تشخیص و اصلاح انحراف بادلیل؛

a : هزینه ثابت نمونه‌گیری؛

b : هزینه هر نمونه‌ی گرفته شده؛

K : ضریب تاگوچی و $1 < K < \infty$.

در مدل پیشنهادی از رویکرد تاگوچی استفاده کرده و هزینه تولید محصولات نامنتطبق در واحد زمان را در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل اصلاح می‌کنیم، بدین ترتیب که به جای C_0 در تابع هدف لورنز و ونس $j_0 p, C_1$ و به جای $j_1 p$ قرار دهیم. مقادیر J_1 و J_2 به ترتیب با استفاده از رابطه‌ی ۳۰ محاسبه می‌شود:

$$J_0 = K[(\sigma_0^2/(nm)) + (\sigma_0^2/(nS_{xx}))]$$

$$J_1 = [(\omega^2(\sigma_0^2/(nm)) + \lambda(\sigma_0^2/(nm)) + \omega^2(\sigma_0^2/(n.S_{xx}))) + \beta^2(\sigma_0^2/(n.S_{xx}))]$$

(۳۰)

که در آن p میزان تولید در هر ساعت است و ω, β, λ به ترتیب نشان‌گر میزان شیفت در پارامترهای عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار است. مدل اقتصادی برای طراحی هم‌زمان سه نمودار کنترل EWMA-۳ به صورت رابطه‌ی ۳۱ است:

$$\text{Min } C$$

$$\text{s.t. : } 0 < \theta_I \leq 1, 0 < \theta_S \leq 1, 0 < \theta_E \leq 1$$

$$n : \text{integer}$$

(۳۱)

متغیرهای تعمیم مدل مقادیر $h, n, L_I, L_S, L_E, \theta_I, \theta_S, \theta_E$ هستند که بعد از حل مدل غیرخطی در رابطه‌ی ۳۱ محاسبه می‌شود. در بخش بعد روشی برای حل مدل با استفاده از الگوریتم ژنتیک ارائه می‌شود.

۵. روش حل مدل طراحی اقتصادی

در این مقاله از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل طراحی اقتصادی استفاده می‌شود. بسیاری از محققین از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل در طراحی اقتصادی استفاده کرده‌اند. [۲۴-۳۲]

این الگوریتم یک شیوه‌ی جست‌وجو برای یافتن راه حل‌های نزدیک به بهینه در مسائل بهینه‌سازی ارائه می‌کند. الگوریتم ژنتیک در واقع منشعب از الگوریتم‌های تکاملی است و یک روش جست‌وجوی مؤثر در فضاها بسیار وسیع و بزرگ است که در نهایت منجر به جهت‌گیری به سمت یافتن جواب بهینه‌ی می‌شود که شاید فرد در مدت زمان زندگی قادر به دست‌یابی به آن نباشد. الگوریتم‌های ژنتیک تفاوت بسیار زیادی با روش‌های بهینه‌سازی قدیمی دارند. در این الگوریتم‌ها باید فضای طراحی^۱ به فضای ژنتیک^۲ تبدیل شود. بنابراین الگوریتم ژنتیک با یک سری متغیرهای کد شده کار می‌کند. مزیت کار با متغیرهای کد شده آن است که اصولاً کدها از قابلیت تبدیل فضای پیوسته به فضای گسسته برخوردارند. الگوریتم ژنتیک (GA) براساس اصل ادامه‌ی حیات بهترین‌ها و تکثیر نوع برتر پی‌ریزی شده است. به دلیل ماهیت تصادفی‌سازی الگوریتم ژنتیک جواب‌های به دست آمده می‌توانند خوب یا بد یا حتی نشدنی باشند. بنابراین تعیین پارامترهای مناسب نقش بسیار مهمی در

۴. طراحی اقتصادی نمودار کنترل EWMA-۳

تعمیم یافته

در این مقاله نمودار کنترل EWMA-۳ تعمیم یافته به صورت اقتصادی مدل‌سازی می‌شود. ویژگی مدل پیشنهادی آن است که هم‌زمان سه نمودار کنترل EWMA بهینه می‌شود و پارامترهای نمودارهای کنترل به‌طور هم‌زمان به‌گونه‌ی محاسبه می‌شود که هزینه‌ها کمینه شود. در این مدل از تابع هزینه لورنز و ونس [۲۵] به‌عنوان تابع هدف استفاده شده است. پارامترهایی که توسط مدل تعیین می‌شوند عبارت‌اند از: h فاصله‌ی زمانی بین دو نمونه‌گیری متوالی، n تعداد متغیرهای پاسخ در هر سطح متغیر مستقل، L_I, L_S, L_E ضرایب حدود کنترل عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار و $\theta_I, \theta_S, \theta_E$ ضرایب هموارسازی نمودارهای کنترل عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار.

تابع هزینه لورنز و ونس به صورت رابطه‌ی ۲۸ تعریف می‌شود. [۲۵] در مدل ارائه شده، مدت زمانی که فرایند تحت کنترل است دارای توزیع نمایی با میانگین $1/\alpha$ فرض شده است. همچنین فرض شده که در صورت بروز یک انحراف با دلیل، هر سه پارامتر عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار تغییر می‌کند.

$$C = \left\{ \begin{array}{l} C_0/\alpha + C_{10}((- \tau)(n.m).E \\ + h.(ARL_1) + \gamma_1.T_1 + \gamma_2.T_2) + \\ S.F/ARL_0 + R \end{array} \right\}$$

$$/ \left\{ \begin{array}{l} (1/\alpha) + ((1 - \gamma_1).S.T./ARL_0) - \tau + \\ (m.n).E + h.(ARL_1) + T_1 + T_2 \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} [(a + b.(m.n))/h][1/\alpha - \tau + (m.n).E + \\ h.(ARL_1) + \gamma_1.T_1 + \gamma_2.T_2] \end{array} \right\}$$

$$/ \left\{ \begin{array}{l} 1/\alpha + (1 - \gamma_1).S.T./ARL_0 - \tau \\ + (m.n).E + h.(ARL_1) + T_1 + T_2 \end{array} \right\}$$

(۲۸)

$$S = e^{(-\alpha h)} / [(1 - e^{\alpha h})]$$

(۲۹)

پارامترها در رابطه‌های ۲۸ و ۲۹ چنین تعریف می‌شوند:

C : هزینه مورد انتظار هر واحد زمان؛

C_0 : هزینه تولید محصولات نامنتطبق در واحد زمان هنگامی که فرایند تحت کنترل است؛

C_1 : هزینه تولید محصولات نامنتطبق در واحد زمان هنگامی که فرایند خارج از کنترل است؛

τ : زمان مورد انتظار بین وقوع انحراف با دلیل و آخرین زمان نمونه‌گیری قبل از وقوع انحراف با دلیل؛

E : مدت زمان نمونه‌گیری و ترسیم آماره روی نمودار کنترل؛

ARL_0 : متوسط طول دنباله‌ی هم‌زمان زمانی که فرایند تحت کنترل است؛

ARL_1 : متوسط طول دنباله‌ی هم‌زمان زمانی که فرایند خارج از کنترل است؛

T_1 : زمان مورد انتظار برای کشف انحراف با دلیل؛

T_2 : زمان مورد انتظار برای اصلاح فرایند؛

T_0 : متوسط زمان جست‌وجو هنگامی که یک هشدار اشتباهی دریافت می‌شود؛

γ_1 : اگر تولید در حین جست‌وجوی انحراف بادلیل ادامه پیدا کند برابر ۱ است. اگر تولید در حین جست‌وجوی انحراف با دلیل متوقف شود برابر صفر است؛

رسیدن به جواب خوب در زمان کم دارد. به دلیل انعطاف پذیری بالای الگوریتم، برای هر مسئله باید یک استراتژی مناسب به منظور رسیدن به جواب قابل قبول اتخاذ شود. مختصراً گفته می شود که الگوریتم ژنتیک (GA) یک تکنیک برنامه نویسی است که از تکامل ژنتیکی به عنوان یک الگوی حل مسئله استفاده می کند. مسئله ای که باید حل شود ورودی است و راه حل ها طبق یک الگو کدگذاری می شود و یک شاخص که تابع Fitness هم نام دارد هر راه حل کاندید را ارزیابی می کند.

الگوریتم ژنتیک با یک جمعیت اولیه از راه حل ها شروع می شود. هر راه حل از طریق یک کروموزوم نمایش داده می شود. برای هر کروموزوم، یک مقدار شایستگی وجود دارد. الگوریتم ژنتیک به دنبال بیشینه سازی مقدار تابع شایستگی است. البته چنانچه تابع هدف به صورت کمیته سازی یک تابع هزینه باشد به هنگام کردن الگوریتم برای کمیته سازی کار ساده ای است. هر تابع هزینه به راحتی قابل تبدیل به یک تابع شایستگی است؛ مثلاً با معکوس کردن تابع هزینه می توان یک تابع شایستگی متناسب از آن ساخت. البته در رویه انتخاب نیز می توان با تغییر قاعده به این که آنها که مقدار تابع هزینه کمتری دارند، بهتر می باشند الگوریتم را به هنگام کرد.

۲.۵. مراحل الگوریتم ژنتیک

در این نوشتار جمعیت اولیه ای با اندازه ۲۰ را به صورت تصادفی تولید می کنیم. از این جمعیت اولیه، ۱۰ کروموزوم را به صورت تصادفی انتخاب کرده و سپس با استفاده از عملگر تقاطعی یک نقطه ای و دونقطه ای ده کروموزوم را به عنوان فرزند تولید می کنیم. از بین این ده کروموزوم یکی را به تصادف انتخاب کرده و از عملگر جهش استفاده می کنیم تا از افتادن الگوریتم در بهینه ای محلی جلوگیری کنیم. سپس فرزندان تولید شده را با جمعیت اولیه ترکیب کرده و با استفاده از معیار برازندگی کم ترین هزینه، تعداد ۱۸ کروموزوم را از بهترین جواب ها و ۲ کروموزوم را از بدترین جواب ها انتخاب و نسل جدید را تشکیل می دهیم. این کار را آن قدر ادامه می دهیم تا به شرط توقف برسیم. در این مقاله شرط توقف تعداد تکرار قرار داده شده است. لازم به ذکر است اگرچه ممکن است (و نه لزوماً) با افزایش تعداد تکرارها به جواب بهتری برسیم، لیکن زمان حل مسئله نیز فاکتور مهمی است که در انتخاب عدد ۱۰ برای تعداد تکرار لحاظ شده است.

۶. مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی مطرح می شود تا از این طریق مدل ارائه شده و روش حل آن مورد ارزیابی قرار گیرد. پارامترهای استفاده شده در این مثال عددی [۲۸] عبارتند از:

$$\tau = 0, E = 0.5, T_1 = 20, T_2 = 0, T_3 = 0$$

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, F = 500, R = 250, a = 5$$

$$b = 1, \alpha = 0.01, p = 200$$

و مقدار S با توجه به رابطه ۲۹ محاسبه می شود. در مدل ارائه شده $C_0 = z_1 p$ و $C_1 = z_1 p$ که مقادیر z_1 و z_2 به ترتیب با استفاده از روبربط ۳۰ محاسبه می شود. همچنین میزان شیفت در عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار به ترتیب برابر با $\lambda = 1$ ، $\beta = 1$ و $\omega = 1.5$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از الگوریتم ژنتیک طراحی شده در بخش ۵ مقادیر بهینه ای متغیرهای تصمیم محاسبه، و خلاصه ای آن در جدول ۱ ارائه شده است. همچنین مقدار کمیته C نیز در این جدول گزارش شده است. لازم به ذکر است که مقادیر ARL_1 و ARL_2 کل نیز با استفاده از رویکرد زنجیره ای مارکوف طراحی شده و مقدار کل ATS_1 نیز از حاصل ضرب ARL_1 در h محاسبه و در جدول ۱ ذکر شده است.

۷. آنالیز حساسیت

در این بخش اثر تغییرات در پارامترهای مدل روی مقادیر متغیرهای تصمیم و همچنین مقادیر ARL_1 ، ARL_2 ، ATS_1 و هزینه مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین در انتها آنالیز حساسیت روی یکی از پارامترهای الگوریتم ژنتیک (اندازه جمعیت، N) انجام شده است.

در جدول ۲، به ازای شیفت های مختلف در عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار مقادیر بهینه ای متغیرها و معیارهای آماری و هزینه ای محاسبه و گزارش شده است. چنان که در این جدول مشاهده می شود به ازای شیفت های همزمان با اندازه متفاوت در عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار، دامنه ای تغییرات در جواب های بهینه ای ضرایب هموارسازی هر سه نمودار کنترل، و فاصله ای نمونه گیری و اندازه ای نمونه در

۱.۵. اجزای الگوریتم ژنتیک

۱. کروموزوم: رشته یا دنباله ای از ژن ها که به شکل کد شده یک جواب ممکن (مناسب یا نامناسب) از مسئله مورد نظر است کروموزوم نام دارد. کروموزوم طراحی شده در این مقاله چنین است:

n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h
-----	------------	------------	------------	-------	-------	-------	-----

۲. جمعیت: مجموعه ای از کروموزوم ها را جمعیت می گویند. جمعیت یا یک نسل از کروموزوم ها دارای یک اندازه است که به اندازه ای جمعیت معروف است. جمعیتی از رشته ها به صورت تصادفی انتخاب شده است.

اندازه ای جمعیت معرف تعداد کروموزوم های موجود در یک نسل یا جمعیت است. در این مقاله به منظور کاهش زمان حل مدل از اندازه ای جمعیت یا نسل ۲۰ استفاده شده است. همچنین در قسمت آنالیز حساسیت اثر اندازه جمعیت روی جواب های مدل بررسی و تحلیل شده است.

۳. مقدار برازندگی: مناسب بودن یا نبودن جواب با معیاری که از تابع هدف به دست می آید سنجیده می شود. جواب هرچه مناسب تر باشد به همان اندازه مقدار برازندگی اش بزرگ تر است. کروموزومی که برازنده تر است با احتمال بیشتری در تولید فرزندان شرکت می کند. چنانچه هدف بیشینه کردن یک تابع باشد مقدار برازندگی یک تابع صعودی از تابع هدف در نظر گرفته می شود و اگر هدف یافتن مقدار کمیته ای یک تابع باشد عدد برازندگی، یک تابع نزولی از آن قرار داده می شود. در این مقاله هدف کمیته کردن تابع هزینه لورنز و ونس است.

۴. انتخاب: فرایند انتخاب دو والد از جمعیت برای عمل تقاطع است. هدف این است که با انتخاب والدین شایسته تر، تولید فرزندان با برازندگی بالاتر میسر شود. کروموزوم هایی که از جمعیت اولیه برای تولید مثل انتخاب می شوند والدین نام دارند. انتخاب روشی است که به طور تصادفی کروموزوم هایی را از جمعیت برای تولید مثل بیرون می آورد. در این نوشتار از عملگرهای تقاطعی یک نقطه ای و دونقطه ای استفاده شده است؛ این عملگرها احتمال ایجاد فرزند مشابه را در نسل های بعدی کاهش می دهند. لازم به ذکر است که با استفاده از سعی و خطا عملگرهای تقاطعی بیش از دو نقطه نیز بررسی شدند اما عملگرهای تقاطعی یک نقطه ای و دونقطه ای در کاهش ایجاد فرزندان مشابه در نسل های بعدی عملکرد بهتری از خود نشان دادند.

جدول ۱. متغیرهای تصمیم بهینه، مقدار تابع هدف بهینه، ARL_1 ، ARL و ATS_1 کل برای جواب بهینه مثال عددی.

λ	β	ω	C	n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h	ARL_0	ARL_1	ATS_1
۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۳	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲

جدول ۲. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم، هزینه، ARL_1 ، ARL و ATS_1 کل با توجه به شیفت‌های متفاوت در عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار.

λ	β	ω	C	n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h	ARL_0	ARL_1	ATS_1
۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۳	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۱	۱	۲	۱۲۱۸٫۱	۱	۰٫۰۳۰۸	۰٫۳۷۶۷	۰٫۱۶۵۵	۲٫۵۳۱۱	۲٫۵۴۹۹	۲٫۵۳۶۰	۳٫۳۳۶۱	۹۳٫۲۵۱۸	۱٫۰۰۳۸	۳٫۳۴۸۸
۰٫۵	۰٫۵	۱٫۵	۱۱۹۰۳٫۳	۱	۰٫۵۰۹۳	۰٫۴۰۰۲	۰٫۵۴۶۵	۴٫۲۲۹۳	۴٫۷۴۶۲	۵٫۰۰۸۵	۳٫۴۰۲۸	۳۷۴۹۷	۱٫۱۰۰۵	۳٫۷۴۴۹
۰٫۵	۰٫۵	۲	۱۶۱۲٫۴	۱	۰٫۸۹۱۳	۰٫۷۵۴۴	۰٫۷۹۹۸	۲٫۹۶۸۳	۵٫۸۰۱۴	۱٫۱۶۱۷	۲٫۵۱۱۳	۵۸٫۶۵۵۷	۱٫۰۰۰۶	۲٫۵۱۲۸
۱	۰٫۵	۱٫۵	۱۵۷۳٫۲	۱	۰٫۴۳۱۲	۰٫۹۱۴۵	۰٫۸۵۶۷	۴٫۸۳۸۲	۱٫۴۵۱۷	۵٫۵۷۴۴	۲٫۶۰۵۰	۶٫۸۶۰۱	۱٫۰۰۲۳۳	۲٫۶۵۵۷
۱	۰٫۵	۲	۲۷۸۴	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۰٫۵	۱	۱٫۵	۸۴۸٫۱	۱	۰٫۱۹۴۳	۰٫۷۰۰۶	۰٫۱۴۱۵	۵٫۷۲۹۸	۳٫۶۶۶۶	۱٫۵۲۸۶	۴٫۸۰۱۸	۱۲۰٫۱۷	۱٫۰۵۱۱	۵٫۰۴۷۴
۰٫۵	۱	۲	۱۰۴۶٫۷	۱	۰٫۴۰۸۰	۰٫۴۲۷۱	۰٫۴۸۵۷	۲٫۲۹۱۸	۳٫۹۴۹۹	۲٫۳۰۹۹	۳٫۸۹۱۷	۵۷٫۱۴۷۵	۱	۳٫۸۹۱۷

جدول ۳. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم، هزینه، ARL_1 ، ARL و ATS_1 کل با تغییر در ضریب ناگویی.

K	λ	β	ω	C	n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h	ARL_0	ARL_1	ATS_1
۰٫۱	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۳	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۰٫۲	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۷٫۴	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۰٫۷	۱	۱	۱٫۵	۲۸۰۹٫۵	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲

جدول ۴. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم، هزینه، ARL_1 ، ARL و ATS_1 کل با تغییر در پارامتر توزیع نمایی.

α	λ	β	ω	C	n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h	ARL_0	ARL_1	ATS_1
۰٫۰۱	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۳	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۰٫۰۵	۱	۱	۱٫۵	۱۲۲۳٫۷	۱	۰٫۰۳۰۸	۰٫۳۷۶۷	۰٫۱۶۵۵	۲٫۵۳۱۱	۲٫۵۴۹۹	۲٫۵۳۶۰	۳٫۳۳۶۱	۹۳٫۲۵۱۸	۱٫۰۰۴۱	۳٫۳۴۹۶

در جدول ۵، با تغییر در R و مقایسه با مثال عددی به این نتیجه رسیدیم که با کاهش R از مقدار 25° به 15° و افزایش R از 25° به 35° میزان هزینه کاهش می‌یابد. لیکن مقادیر بهینه برای متغیرهای تصمیم تغییر می‌کند و بیشترین تغییر مربوط به ضرایب هموارسازی است. نکته‌ی قابل توجه در رابطه با افزایش R این است که وقتی میزان R به مقدار 90° تغییر پیدا کند مقادیر بهینه متغیرها نسبت به مثال عددی در بخش قبل تغییر پیدا نمی‌کنند.

در جدول ۶، با تغییر در میزان F از 50° به 90° مقادیر بهینه برای متغیرها نسبت به مثال عددی تغییری نمی‌کند و فقط میزان هزینه به مقدار کمی افزایش می‌یابد. با کاهش در مقدار F از 50° به 30° نیز مقادیر بهینه متغیرها تغییر نمی‌کند و فقط میزان هزینه کمی افزایش می‌یابد.

در جدول ۷، با تغییر در میزان E هزینه به مقدار قابل ملاحظه‌ی کاهش پیدا کرده و میزان تغییر در مقادیر بهینه ضرایب هموارسازی قابل توجه است.

هر سطح متغیر مستقل زیاد نبوده ولی دامنه‌ی تغییرات در جواب‌های مقادیر بهینه L_S ، L_E و L_I محسوس است.

در جدول ۳، با تغییر در مقدار ضریب ناگویی و مقایسه‌ی آن با مقادیر به دست آمده در مثال عددی بخش قبل به این نتیجه رسیدیم که با ایجاد تغییر در ضریب ناگویی تنها میزان هزینه تغییر می‌کند. به عبارت دیگر با افزایش ضریب ناگویی، هزینه افزایش می‌یابد و مقادیر بهینه برای متغیرهای تصمیم مدل، متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل و خارج از کنترل کل و متوسط زمان تا هشدار ثابت می‌ماند و هیچ تغییری نمی‌کند.

در جدول ۴، با تغییر در پارامتر توزیع نمایی α نتیجه می‌گیریم که میزان هزینه به صورت قابل توجهی کاهش پیدا کرده و مقادیر بهینه برای متغیرهای تصمیم تغییر می‌کند. بیشترین تغییر در مقادیر متغیرهای بهینه مربوط به ضرایب هموارسازی است.

جدول ۵. مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم، هزینه، ARL_1 ، ARL_0 و ATS_1 کل با تغییر در پارامتر R .

R	λ	β	ω	C	n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h	ARL_0	ARL_1	ATS_1
۲۵۰	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۳	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۱۵۰	۱	۱	۱٫۵	۱۲۱۵٫۲	۱	۰٫۳۰۰۸	۰٫۳۷۶۷	۰٫۱۶۵۵	۲٫۵۳۱۱	۲٫۵۴۹۹	۲٫۵۳۶۰	۳٫۳۳۶۱	۹۳٫۲۵۱۸	۱٫۰۰۴۱	۳٫۳۴۹۶
۳۵۰	۱	۱	۱٫۵	۱۲۱۶٫۸	۱	۰٫۳۰۰۸	۰٫۳۷۶۷	۰٫۱۶۵۵	۲٫۵۳۱۱	۲٫۵۴۹۹	۲٫۵۳۶۰	۳٫۳۳۶۱	۹۳٫۲۵۱۸	۱٫۰۰۴۱	۳٫۳۴۹۶
۹۰۰	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۸٫۱	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲

جدول ۶. مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم، هزینه، ARL_1 ، ARL_0 و ATS_1 کل با تغییر در F .

F	λ	β	ω	C	n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h	ARL_0	ARL_1	ATS_1
۵۰۰	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۳	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۳۰۰	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۰٫۴	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۹۰۰	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۸٫۱	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲

جدول ۷. مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم، هزینه، ARL_1 ، ARL_0 و ATS_1 کل با تغییر در مقدار E .

E	λ	β	ω	C	n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h	ARL_0	ARL_1	ATS_1
۰٫۵	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۳	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۰٫۰۵	۱	۱	۱٫۵	۱۲۱۵٫۹	۱	۰٫۳۰۰۸	۰٫۳۷۶۷	۰٫۱۶۵۵	۲٫۵۳۱۱	۲٫۵۴۹۹	۲٫۵۳۶۰	۳٫۳۳۶۱	۹۳٫۲۵۱۸	۱٫۰۰۴۱	۳٫۳۴۹۶

جدول ۸. مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم، هزینه، ARL_1 ، ARL_0 و ATS_1 کل با تغییر در اندازه جمعیت الگوریتم ژنتیک (N).

N	λ	β	ω	C	n	θ_I	θ_S	θ_E	L_I	L_S	L_E	h	ARL_0	ARL_1	ATS_1
۲۰	۱	۱	۱٫۵	۲۷۸۳	۲	۰٫۶۰۲۰	۰٫۲۶۳۰	۰٫۳۵۰۰	۱٫۹۸۳۰	۲٫۶۵۵۴	۴٫۰۸۰۲	۲٫۸۹۳۲	۲۰٫۹۱۴۴	۱	۲٫۸۹۳۲
۳۰	۱	۱	۱٫۵	۱۶۶۹٫۶	۲	۰٫۳۸۹۷	۰٫۲۶۳۰	۰٫۶۵۴۱	۴٫۴۴۶۱	۴٫۹۴۰۸	۳٫۲۵۲۷	۴٫۸۲۴۵	۹۳٫۲۵۱۸	۱	۴٫۸۲۴۵
۴۰	۱	۱	۱٫۵	۸۸۲٫۸۵۸۵	۱	۰٫۲۱۵۶	۰٫۰۸۷۵	۰٫۶۷۲۱	۳٫۹۵۵۳	۴٫۴۴۹۱	۴٫۱۳۴۶	۴٫۶۱۳۴	۱۱۵۸۱	۱	۴٫۶۱۳۴
۵۰	۱	۱	۱٫۵	۸۳۱٫۳۸۸۴	۱	۰٫۵۶۱۲	۰٫۸۸۱۹	۰٫۶۶۹۲	۱٫۹۵۲۲	۳٫۰۴۴۶	۳٫۳۰۳۶	۴٫۹۲۶۶	۲۱٫۵۰۲۰	۱	۴٫۹۲۶۶
۶۰	۱	۱	۱٫۵	۸۳۱٫۵۱۷۹	۱	۰٫۵۶۱۲	۰٫۶۴۴۸	۰٫۳۷۶۳	۱٫۹۵۴۶	۲٫۸۴۴۶	۳٫۴۱۰۱	۴٫۹۲۶۶	۲۰٫۷۶۰۷	۱	۴٫۹۲۶۶

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا نمودار کنترل EWMA-3 با اندکی تغییر به گونه‌ی طراحی شد که بتوان به جای یک محصول در هر سطح از مقادیر متغیر مستقل، از چندین محصول استفاده کرد. سپس روشی برای محاسبه‌ی متوسط طول دنباله نمودار کنترل EWMA-3 تعدیل شده برای پایش پروفایل‌های خطی ساده براساس رویکرد زنجیره‌ی مارکوف ارائه شد. در ادامه طراحی اقتصادی نمودار کنترل EWMA-3

در جدول ۸، اثر اندازه جمعیت الگوریتم ژنتیک روی متغیرهای تصمیم، مقدار هزینه و معیارهای متوسط طول دنباله تحت کنترل و خارج از کنترل و متوسط زمان تا هشدار مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تغییر اندازه جمعیت (N)، تأثیری بر متوسط دنباله خارج از کنترل نمی‌گذارد و اثر کمی روی متوسط زمان تا هشدار دارد. اما هزینه با افزایش جمعیت اولیه کاهش یافته و در اندازه جمعیت ۵۰ به بهترین مقدار خود می‌رسد. افزایش بیشتر از ۵۰ جمعیت تأثیری بر بهبود جواب بهینه ندارد.

مدل انجام شد و اثر تغییر در پارامترها روی متغیرهای تصمیم و ویژگی‌های هزینه‌ی و آماری نمودار کنترل بررسی و تحلیل شد. در انتها آنالیز حساسیت روی اندازه جمعیت اولیه الگوریتم ژنتیک انجام شد. برای مطالعه‌ی آتی می‌توان به مقایسه‌ی روش حل پیشنهادی (الگوریتم ژنتیک) با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری اشاره کرد. همچنین طراحی اقتصادی - آماری این نمودار کنترل و همچنین طراحی اقتصادی و اقتصادی - آماری سایر نمودارهای کنترل در پایش پروفایل‌ها می‌تواند در مطالعات آتی مد نظر قرار گیرد.

پانویس‌ها

1. design space
2. genetic space

منابع (References)

1. Kang, L. and Albin, S.L. "On-line monitoring when the process Yields a linear profile", *Journal of Quality Technology*, **32**(4), pp. 418-426 (2000).
2. Walker, E. and Wright, S. "Comparing curves using additive models", *Journal of Quality Technology*, **34**(1), pp. 118-129 (2002).
3. Amiri, A., Jensen, W.A., and Kazemzadeh, R.B. "A case study on monitoring polynomial profiles in the automotive industry", *Quality and Reliability Engineering International*, **26**(5), pp. 509-520 (2010).
4. Woodall, W.H., Spitzner, D.J., Montgomery, D.C. and Gupta, S. "Using control charts to monitor process and product profiles", *Journal of Quality Technology*, **36**(3), pp. 309-320 (2004).
5. Amiri, A., Saghaei, A., Mohseni, M. and Zerehsaz, Y. "Diagnosis aids in multivariate multiple linear regression profiles monitoring", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **43**(14), pp.3057-3079 (2014).
6. Amiri, A. and Moein, E. "Some notes on diagnostic procedures in simple and multiple linear regression profiles monitoring", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **42**(5), pp. 981-1002 (2013).
7. Mahmoud, M.A. "Phase I analysis of multiple linear regression profiles", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **37**(10), pp. 2106-2130 (2008).
8. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Phase I monitoring of polynomial profiles", *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **37**(10), pp. 1671-1686 (2008).
9. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Monitoring polynomial profiles in quality control applications", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **42**(7), pp. 703-712 (2009).
10. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Phase II monitoring of autocorrelated polynomial profiles in AR (1) processes", *Scientia Iranica*, **17**(1), pp. 12-24 (2011).
11. Yeh, A.B., Huwang, L. and Li, Y.M. "Profile monitoring for a binary response", *IIE Transactions*, **41**(11), pp. 931-941 (2009).
12. Shang, Y., Tsung, F. and Zou, C. "Profile monitoring with binary data and random predictors", *Journal of Quality Technology*, **43**(3), pp. 196-208 (2011).
13. Chou, S.H., Chang, S.I., and Tsai, T.R. "On monitoring of multiple non-linear profiles", *International Journal of Production Research*, **52**(11), pp.3024-3029 (2014).
14. Paynabar, K., Jin, J. and Pacella, M. "Monitoring and diagnosis of multichannel nonlinear profiles using uncorrelated multilinear principal component analysis", **45**(11), pp.1235-1247 (2013).
15. Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "Phase I analysis of linear profiles with calibration application", *Technometrics*, **46**(4), pp. 380-391 (2004).
16. Kim, K.A., Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "On the monitoring of linear profiles", *Journal of Quality Technology*, **35**(3), pp. 317-328 (2003).
17. Mahmoud, M.A., Parker, P.A., Woodall, W.H. and Hawkins, D.M. "A change point method for linear profile data", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**(2), pp. 247-268 (2007).
18. Saghaei, A., Mehrjoo, M. and Amiri, A. "A CUSUM-based method for monitoring simple linear profiles", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **45**(11), pp. 1252-1260 (2009).
19. Mahmoud, M.A. "The performance of phase II simple linear profile approaches when parameters are estimated", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **41**(10), pp. 1816-1833 (2012).
20. Noorossana, R., Saghaei, A. and Amiri, A., *Statistical Analysis of Profile Monitoring*, John Wiley and Sons, Inc., Edited book (2011).
21. Eyvazian, M., Noorossana, R., Saghaei, A. and Amiri, A. "Phase II monitoring of multivariate multiple linear regression profiles", *Quality and Reliability Engineering International*, **27**(3), pp. 281-296 (2011).

22. Noorossana, R., Eyvazian, M., Amiri, A. and Mahmoud, M.A. "Statistical monitoring of multivariate multiple linear regression profiles in phase I with calibration application", *Quality and Reliability Engineering International*, **26**(3), pp. 291-303 (2010).
23. Zou, C., Ning, X. and Tsung, F. "Lasso-based multivariate linear profile monitoring", *Annals of Operations Research*, **192**(1), pp. 3-19 (2012).
24. Noorossana, R., Niaki, S.T.A. and Ershadi, M.J. "Economic and economic-statistical designs of phase II profile monitoring", *Quality and Reliability Engineering International*, **30**(5), pp.645-655 (2014).
25. Duncan, A.J. "The economic design of \bar{x} -charts used to maintain current control of a process", *Journal of the American Statistical Association*, **51**(274), pp. 228-242 (1956).
26. Lorenzen, T.J. and Vance, L.C. "The economic design of control charts: A unified approach", *Technometrics*, **28**(1), pp. 3-10 (1986).
27. Crowder, S.V. and Hamilton, M.D. "An EWMA for monitoring a process standard deviation", *Journal of Quality Technology*, **24**(1), pp. 12-21 (1992).
28. Lucas, J.M. and Saccucci, M.S. "Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements", *Technometrics*, **32**(1), pp. 1-12 (1990).
29. Dogan, A.S. and Herbert, M. "Joint economic design of EWMA control charts for mean and variance", *European Journal of Operational Research*, **184**(1), pp.157-168 (2008).
30. Faraz, A., Kazemzadeh, R.B., Parsian, A. and Moghadam M.B. "On the advantages of economically designed the hotelling's T^2 control chart with variable sample sizes and sampling intervals", **46**(1), pp. 39-53 (2012).
31. Nil, N., Kraleti, S.R. and Kambagowni, V.S. "Optimal design of X-control chart with Pareto in-control times", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **48**(9), pp. 829-837 (2010).
32. Lin, H.H., Chou, C.Y. and Lai, W.T. "Economic design of variable sampling intervals X charts with A&L switching rule using genetic algorithms", *Expert System with Applications*, **36**(2), pp. 3048-3055 (2009).