مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۵)
دوره‌ی ۱ - ۳۲، شماره‌ی ۱/۱، ص. ۶۵-۷۸

Original Article

هماهنگی سیاست‌های قیمت‌گذاری و بازاریابی با استفاده از نظریه بازی‌ها

عطاءالله طالعی‌زاده* (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه تهران

زاهده چراغی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

همکاری در تبلیغات راهی اقتصادی برای رسیدن به اهداف بازاریابی است، که در آن تولیدکنندگان می‌توانند با برعهده گرفتن درصدی از هزینه‌های تبلیغات خرده‌فروشان، میزان هزینه‌ها را کاهش دهند. در این تحقیق تصمیمات قیمت‌گذاری و تبلیغات همزمان در یک زنجیره‌ی تأمین ــ شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش ــ بررسی شده است. با استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها چهار استراتژی بین اعضا در نظر گرفته شده است. در ابتدا سه بازی غیرهمکاری با توزیع متقارن قدرت در بازی نش و توزیع نامتقارن قدرت در بازی‌های استکلبرگ به‌طوری که یک بازیکن در هر حالت رهبر است و دیگری دنباله‌رو بررسی شده است. در نهایت یک بازی همکاری که در آن هر دو بازیکن تمایل به بیشینه‌سازی کل سود دارند نیز بررسی می‌شود. مقعر بودن توابع سود در هر حالت اثبات و برای هر حالت یک مثال عددی و تحلیل حساسیت ارائه شده است.

واژگان کلیدی: قیمت‌گذاری، بازاریابی، نش، استکلبرگ، همکاری.

taleizadeh@ut.ac.ir
zahedeh.cheraghi@gmail.com

۱. مقدمه

اگر بین بازیکنان مذاکره‌یی صورت گیرد و توافق‌شان بر مجموعه‌یی از استراتژی‌ها که سود جمعی بیشتری عایدشان می‌کند اجرا شود، به آن «بازی با همکاری» می‌گویند. اما اگر مذاکره‌یی بین بازیکنان وجود نداشته باشد یا مذاکرات‌شان به توافقی قابل اجرا منجر نشود، آن را «بازی بدون همکاری» گویند. این هماهنگی و همکاری باید با درنظر گرفتن بیشینه‌سازی سود هریک از اعضای کانال صورت بگیرد. تبلیغات مشارکتی یکی از راه‌هایی است که تولیدکنندگان و توزیع‌کنندگان می‌توانند در برنامه‌های تبلیغاتی به‌صورت مشترک مشارکت کنند. همکاری در تبلیغات یک توافق است، که در آن یک تولیدکننده با پرداخت کل یا بخشی از هزینه‌های تبلیغات محلی انجام شده توسط یک خرده‌فروش موافقت می‌کند. از نظریه‌ی بازی‌ها به‌عنوان ابزاری مناسب برای تحلیل فعل و انفعالات بین اعضای زنجیره می‌توان بهره‌مند شد. هریک از اعضای زنجیره می‌تواند به‌صورت جداگانه برای خود برنامه‌های ترفیعی و تبلیغاتی داشته باشد، اما رابطه‌ی تعاملی (رابطه‌ی برد ـ برد) زمانی اتفاق می‌افتد که هریک از آنها قادر باشد به‌منظور پوشش بخشی از هزینه‌های تبلیغات برای خود شریکی انتخاب کند. توسعه‌ی حجم تجارت و پیچیدگی روزافزون خرده‌فروشی مستلزم تغییر رویکرد در تبلیغات است. تبلیغات مشارکتی نه‌تنها باعث کاهش هزینه‌های تبلیغاتی می‌شود بلکه به پیوندی مهم با خرده‌فروشان محلی می‌انجامد و آثاری بهتر از نام تجاری برای آنها به دنبال دارد. بنابراین متغیری به‌نام نرخ مشارکت تعریف می‌شود و آن عبارت است از درصدی از هزینه‌های تبلیغات محلی که تولیدکننده با پرداخت آن موافق است. نظریه‌ی بازی‌های بدون همکاری و باهمکاری که تصمیم‌گیری متوالی یا همزمان چند بازیگر را در نظر می‌گیرد، ابزاری است برای حل این مسئله. در سال‌های اخیر مطالعاتی پیرامون تبلیغات همکاری در زنجیره‌یی شامل تولیدکننده و خرده‌فروش انجام شده است. با استفاده از کمک‌های مالی در تبلیغات همکاری، خرده‌فروش می‌تواند سطح تبلیغات خود را افزایش دهد و منجر به افزایش‌فروش تولیدکننده و خرده‌فروش شود.

۲. ادبیات تحقیق

قیمت‌گذاری و تبلیغات با همکاری، دوگونه تصمیم‌گیری در کسب وکار است که در این تحقیق مورد بحث قرار می‌گیرد و می‌تواند باعث افزایش یا کاهش تقاضا شود. بنابراین تحقیقات در تبلیغات همکاری را می‌توان در دوگروه جای داد. گروه اول متعلق به تحقیقاتی است که تجزیه و تحلیل آنها صرفاً مبتنی بر تبلیغات است. در اولین مدل ریاضیِ تبلیغات همکاری[1] هزینه‌های مالی تبلیغات خرده‌فروش با استفاده از تخفیف روی قیمت‌های عمده‌فروشی تأمین شده است. یک رویکرد مشترک در ادبیات، برای تجزیه و تحلیل نقش تبلیغات با همکاری در هماهنگی زنجیره‌ی تأمین، استفاده از مدل‌های گوناگون نظریه‌ی بازی‌هاست. این مدل‌ها در دو دسته‌ی ایستا و پویا توسعه یافته‌اند. در مدل‌های ایستا فعل و انفعالات بین اعضای زنجیره‌ی تأمین در یک دوره مورد بحث قرار می‌گیرد. محققین دیگری نیز بر پایه‌ی یک مدل ایستا نشان داده‌اند که تبلیغات همکاری نیز می‌تواند اثرات بدی بر خرده‌فروشان داشته

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۱۲/۶، اصلاحیه ۱۳۹۳/۶/۲۱، پذیرش ۱۳۹۳/۷/۲.

باشد.[۲] در مقابل مدل‌های پویایی مورد بررسی قرار گرفته[۶-۳] که در آنها یک تابع حسن نیت[۱] تعریف شده و تبلیغات خرده‌فروش اثراتی مثبت یا منفی بر آن دارد. اما در بسیاری از این مطالعات، نرخ مشارکت با وجود نقش اساسی آن نادیده گرفته شده است. از سوی دیگر، زمانی که خرده‌فروش اطلاع کافی از تصمیم‌گیری تولیدکننده در سیاست تبلیغات ندارد یا در حالتی که تصمیمات قبلاً اعلام شده، مفروضات لازم درمورد نظریه‌ی بازی وجود ندارد. این موضوع در مسئله‌ی تبلیغات با همکاری مد نظر قرار گرفته است.[۷] در یکی از اولین مقایسه‌های انواع مختلف روابط خرده‌فروش و تولیدکننده با استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها،[۸] از تابع تقاضایی استفاده شده که به دو عامل هزینه‌ی تبلیغات محلی خرده‌فروش و هزینه‌ی تبلیغات محلی تولیدکننده بستگی دارد. در مطالعه‌ی یادشده با تأکید بر تغییر ساختار قدرت، توزیع قدرت برابر (تعادل نش)، تولیدکننده رهبر (تعادل استکلبرگ ـ تولیدکننده) و حالتی که تولیدکننده و خرده‌فروش همکاری می‌کنند و برای تقسیم سود با هم معامله می‌کنند به نفع خرده‌فروش لحاظ شده است. رویکردهای مشابه را با اندکی تغییر در توابع تقاضا می‌توان یافت.[۱۰-۸] تعیین قیمت خرده‌فروش و عمده‌فروش در بسیاری از مطالعات، به‌عنوان یک وظیفه‌ی بنیادین در ادبیات مدیریت زنجیره‌ی تأمین مورد توجه قرارگرفته است. در تعدادی از مطالعات تصمیمات قیمت‌گذاری و تبلیغات به‌طور همزمان در هماهنگی زنجیره‌ی تأمین مد نظر قرار گرفته است. گروه دوم که مقاله‌ی حاضر به این گروه متعلق است، متعلق به تحقیقاتی است که در آنها متغیرهای دیگری مثل قیمت‌گذاری[۱۵-۱۰] که به تجزیه و تحلیل نقش تبلیغات با همکاری در هماهنگی زنجیره‌ی تأمین با استفاده از مدل‌های نظریه‌ی بازی‌ها پرداخته‌اند، توسعه داده شده است. محققین این کار را با توجه به تقاضای حساس به قیمت انجام داده‌اند و تأثیر تخفیف مستقیم از سوی تولیدکننده به مشتری را، که ممکن است در یک کانال هماهنگ اتفاق بیفتد، مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها نتایج حاصل از بازی استکلبرگ تولیدکننده رهبر را با بازی همکاری مقایسه کرده‌اند. در گونه‌یی از بازی دیفرانسیلی[۲] که پیشنهاد شد[۱۶] تصمیمات قیمت‌گذاری و تبلیغات در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی، تحت دو حالت همکاری و غیرهمکاری منظور شد. در پیشنهاد مطرح شده، تقاضای مصرف‌کننده تحت تأثیر قیمت خرده‌فروش و حسن نیت تبلیغات است. در برخی از مطالعات انجام شده[۵] نقش رهبر در یک کانال بازاریابی با یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش درنظر گرفته شده، به‌نحوی که هر بازیکن، تبلیغات و سود حاشیه‌یی خود را کنترل می‌کند. در این مدل، تقاضای مصرف‌کننده متأثر از حسن نیت تبلیغات و قیمت خرده‌فروش است. در مطالعات بعدی[۱۷] تقاضای مصرف‌کننده به‌عنوان یک محصولِ افزاینده نسبت به قیمت خرده‌فروش و حسن نیت تبلیغات در یک مجموعه‌ی پویا مدل‌سازی شد، و سپس نتایج استراتژی‌های هماهنگی با همه‌ی آنهایی که ناهماهنگ می‌باشند مقایسه شد. پس از بررسی چگونگی تأثیرپذیری سیاست‌های همکاری تبلیغات و سودهای اعضا از رفتارهای مختلف رقابتی[۱۸] تعیین شد که آیا شرکا انگیزه‌یی برای تغییر ساختار دارند یا نه. سپس یک زنجیره‌ی تأمین با یک خرده‌فروش و یک تولیدکننده به‌عنوان یک بازی تفاضلیِ استکلبرگ مدل‌سازی شد.[۱۹] در این بازی تقاضا تابعی از قیمت خرده‌فروش و تبلیغات است. به‌گفته‌ی چوی[۳]، توابع تقاضای متفاوت، به نتایج متفاوت قابل ملاحظه‌یی منجر می‌شود.[۲۰] محققین به‌جای تخفیف قیمت، قیمت‌گذاری و تبلیغات را در یک زنجیره‌ی تأمین دو عضوی درنظر گرفتند[۲۱] که در آن تقاضای مشتری بستگی به قیمت خرده‌فروش و تبلیغات دارد. آنها با درنظرگرفتن تولیدکننده به‌عنوان رهبر، به تصمیم‌گیری‌های بهینه‌ی خرده‌فروش و تولیدکننده رسیده‌اند. از سوی دیگر رویکردی مشابه با توابع تقاضای متفاوت دنبال شد[۲۴-۲۲] و نتایج بهینه‌ی بازی همکاری با بازی‌های غیرهمکاری مقایسه شد. همچنین چهار مدل بازی بررسی شد، که در این میان سه بازی غیرهمکاری و یک بازی همکاری است؛ این در حالی است که فقط دو مدل بازی، شامل بازی همکاری و بازی تولیدکننده به‌عنوان رهبر، را بررسی کرده‌اند.[۲۳] پژوهش‌گران با توسعه‌ی مدل سیداصفهانی[۲۵] تصمیمات قیمت‌گذاری و همکاری تبلیغات در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی را با یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش بررسی کرده‌اند. آنها با استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها چهار استراتژی را بررسی و سیاست‌های همکاری و غیرهمکاری را با هم مقایسه کرده‌اند. مسئله‌ی همکاری در تبلیغات[۲۶] در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی مدل‌سازی شد؛ بدین‌منظور میزان بهینه‌ی متغیرهای تصمیم تحت دو سیاست استکلبرگ و بازی همکارانه محاسبه شد. با استفاده از بازی دیفرانسیلی مدل قیمت‌گذاری و تبلیغات همکارانه[۲۷] در کانال بازاریابی در شرایط پویا مدل‌سازی و مقدار بهینه‌ی متغیرهای تصمیم را، که دربرگیرنده‌ی قیمت عمده‌فروشی، قیمت خرده‌فروشی و هزینه‌ی تبلیغات است، تعیین کرده‌اند. در مدل‌سازی مسئله‌ی جامع قیمت‌گذاری و تبلیغات در یک کانال توزیع دوسطحی مربوط به یک محصول،[۲۸] سطح اول شامل یک تولیدکننده و سطح دوم شامل دو خرده‌فروش است که با یکدیگر همکاری دارند. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم در مدل مذکور با دو رویکرد بازی همکارانه و بازی بدون همکاری، و براساس بازی نش تعیین شده و نتایج حاصله با هم مقایسه شده‌است. همچنین در یک مقاله‌ی مروری در زمینه‌ی تبلیغات همکارانه[۲۹] اکثر تحقیقات صورت گرفته در موضوع مورد نظر بررسی و تفاوت‌ها و نقاط قوت و ضعف هر مقاله بیان شده است. در تحقیقی دیگر[۳۰] موضوع همکاری بین تولیدکننده و دو خرده‌فروش که با یکدیگر در پرداخت هزینه‌ی تبلیغات محلی همکاری می‌کنند، بررسی شده است. بدین‌منظور چهار مدل براساس بازی غیرهمکاری توسعه یافته که بین سطح یا بازی استکلبرگ و یا نش استفاده می‌شود و بین دوخرده‌فروش نیز دو استراتژی متفاوت در نظر گرفته شده است. قدیمی و همکاران[۳۱] نیز به مسئله تبلیغات همکارانه در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی شامل یک تولیدکننده و دوخرده‌فروش پرداخته‌اند که مسئله را بر اساس در دست داشتن اطلاعات متقارن و نامتقارن مدل‌سازی و حل کرده‌اند. در مطالعه‌یی دیگر[۳۲] یک مسئله‌ی یکپارچه‌ی کنترل موجودی، قیمت‌گذاری و تبلیغات همکارانه در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش مدل‌سازی شده و از مدل کنترل موجودی کلاسیک روزنامه‌فروش استفاده شده است. با توجه به رویکرد مدل روزنامه‌فروش که برای محصولات با طول عمر مشخص به کار برده می‌شود، از تبلیغات همکارانه به‌عنوان رویکرد دست‌یابی به سود بیشتر و کاهش هزینه‌های نگه‌داری محصول بهره گرفته شده است.[۳۳] مسئله‌ی قیمت‌گذاری و تبلیغات همکارانه برای محصولی جدید با طول عمر مفید و ثابت، در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی کاربرد داشته است.[۳۳] در این تحقیق فرض شده است که تولیدکننده محصول را به چند خرده‌فروش رقیب می‌فروشد و با توجه به طول عمر محصول و ساختار مسئله که وابسته به زمان است، با استفاده از بازی استکلبرگ پویا مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم به دست آمده است. همچنین، اثرات همکاری در تبلیغات در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش[۳۴] در مقادیر بهینه‌ی قیمت عمده‌فروشی، قیمت خرده‌فروشی و هزینه تبلیغات ارزیابی شده است.

در مقاله‌ی حاضر چهار استراتژی همزمان در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی ــ شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش ــ با یک تابع تقاضای غیرخطی و حساس به قیمت با الهام از تحقیق صورت گرفته،[۲۱] بررسی می‌شود. با استفاده از دو رویکرد همکاری و غیرهمکاری نظریه‌ی بازی‌ها، چهار سناریو ــ شامل بازی نش، استکلبرگ تولیدکننده رهبر، استکلبرگ خرده‌فروش رهبر، و حالت همکاری درنظر می‌گیریم. فرض شده تقاضا برای محصول تابعی از سطح تبلیغات محلی

خرده‌فروش، تبلیغات ملی تولیدکننده و قیمت خرده‌فروشی ارائه شده به مشتریان است.

در ادامه، در بخش ۳ تابع تقاضای حساس به قیمت و توابع سود اعضای زنجیره‌ی تأمین ارائه شده، مدل‌های اولیه‌ی فرمول‌بندی و سیاست‌های بهینه به دست آمده است. در بخش ۴ مثال عددی و تحلیل حساسیت به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها به‌منظور بررسی تغییرات و تأثیر آنها بر متغیرهای تصمیم ارائه شده است. در بخش ۵ نیز نتایج حاصله و تحقیقات آتی معرفی شده است.

۳. تعریف مسئله

زنجیره‌ی تأمینی شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش را در نظر بگیرید. در این زنجیره تولیدکننده محصولاتش را به یک خرده‌فروش می‌فروشد، و خرده‌فروش نیز تنها محصول تولیدکننده را به مشتریان می‌فروشد. تولیدکننده روی قیمت عمده‌فروشی w، هزینه‌ی تبلیغات ملی A و نرخ مشارکت t تصمیم‌گیری می‌کند. از طرف دیگر خرده‌فروش درمورد قیمت خرده‌فروشی p و هزینه‌ی تبلیغات محلی a تصمیم می‌گیرد. فرض می‌کنیم تقاضای مشتری عبارت است از:

$$D(p,a,A) = D_0.g(p).h(a,A) \tag{1}$$

که در آنها D_0 تقاضای اولیه‌ی مشتری، $g(p)$ تأثیرات قیمت خرده‌فروش، و $h(a,A)$ تأثیرات هزینه‌های تبلیغات است. به‌منظور مدل‌سازی مسئله، پارامترها و متغیرهای تصمیم مورد استفاده معرفی شده است.

متغیرهای تصمیم:

p: قیمت واحد خرده‌فروش؛

w: قیمت واحد عمده‌فروش؛

A: هزینه‌ی تبلیغات ملی؛

a: هزینه‌ی تبلیغات محلی؛

t: نرخ مشارکت؛

Π: سود.

پارامترها:

D_0: تقاضای اولیه‌ی مشتری؛

α_2: درپوش بازار؛

β_2: تأثیر نام تجاری و تبلیغات محلی بر تقاضای بازار؛

γ: کشش تبلیغات؛

δ: کشش سرمایه‌گذاری؛

e: شاخص کشش قیمت؛

c: هزینه‌ی تولیدکننده برای تولید یک واحد؛

d: هزینه‌ی خرده‌فروش برای دسترسی به یک واحد.

۱.۳. ساختار مدل

با توجه به مطالعات انجام‌شده[21] تأثیرات قیمت خرده‌فروش و تأثیرات هزینه‌ی تبلیغات، به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$g(p) = p^{-e}; \quad e > 1 \tag{2}$$

$$h(a,A) = \alpha_2 - \beta_2\alpha^{-\gamma}A^{\delta}; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma, \delta > 0 \tag{3}$$

از طرفی به‌منظور نشان دادن کشش قیمت فرض می‌کنیم $e > 1$. بنابراین با توجه به روابط ۱ تا ۳ تابع تقاضا عبارت است از:

$$D(p,a,A) = D_0(p^{-e})(\alpha_2 - \beta_2\alpha^{-\gamma}A^{\delta}) \tag{4}$$

بنابراین توابع سود تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره در مدل عبارت‌اند از:

$$\Pi_m(w,A,t) = D_0(w-c)(p^{-e}) \times (\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma}A^{-\delta}) - A - ta \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\Pi_r(p,a) =& D_0(p-w-d)(p^{-e}) \times (\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma}A^{-\delta}) \\ & - (1-t)a\end{aligned} \tag{6}$$

$$\Pi_{sc}(p,a,A) = D_0(p-c-d)(p^{-e})(\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma}A^{-\delta}) - A - a \tag{7}$$

که در آن m، r و sc به‌ترتیب نشان‌گر تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره است. حال توابع سود فوق تحت چهار رویکرد نظریه‌ی بازی‌ها، مدل‌سازی، حل و مقایسه می‌شوند. در این مقاله مسئله‌ی تعریف‌شده با چهار رویکرد متفاوت بررسی خواهد شد. در ابتدا تحت بازی نش که بین تولیدکننده و خرده‌فروش در نظر گرفته می‌شود، مسئله حل و میزان بهینه‌ی متغیرهای تصمیم به دست می‌آید. در رویکرد دوم، در شرایطی که تولیدکننده رهبر بوده، بین دو عضو زنجیره بازی استکلبرگ دیده می‌شود. در رویکرد سوم نیز مسئله‌ی پیشنهادی با رویکرد استکلبرگ، اما در شرایطی که خرده‌فروش رهبر است، حل خواهد شد. سپس در مرحله‌ی چهارم و با رویکرد جدید ــ درنظرگرفتن بازی همکارانه ــ مسئله حل خواهد شد و مقدار بهینه‌ی متغیرهای تصمیم به دست خواهد آمد.

۲.۳. بازی نش

در این بازی، تولیدکننده و خرده‌فروش قدرت تصمیم‌گیری یکسانی دارند و استراتژی‌های خود را به‌طور مستقل و همزمان انتخاب می‌کنند. از این رو مسائل تصمیم‌گیری تولیدکننده و خرده‌فروش به‌طور جداگانه حل می‌شود. بنابراین مسائل تولیدکننده و خرده‌فروش عبارت است از:

$$\begin{aligned}&\underset{w,A,t}{\text{Max}}\ \Pi_m = D_0(w-c)(p^{-e}) \times (\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma}A^{-\delta}) - A - ta \\ &\text{s.t. } 0 \le A,\ c \le w \le 1,\ \text{and } 0 \le t \le 1\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\underset{p,a}{\text{Max}}\,\Pi_r = D_0(p-w-d)(p^{-e})(\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma}A^{-\delta}) - (1-t)a \\ &\text{s.t. } w+d \le p \ \text{ and } \ a \ge 0\end{aligned} \tag{9}$$

واضح است که مقدار بهینه‌ی t از نقطه‌نظر تولیدکننده برابر با صفر است، چون در تابع هدف تولیدکننده ضریب منفی دارد. همچنین تابع سود تولیدکننده نسبت به w صعودی است. اما w نمی‌تواند برابر با ۱ باشد، و در این صورت سود تولیدکننده و خرده‌فروش هر دو صفر می‌شود:

اگر $\quad p \ge w = 1 \quad$ آنگاه $\quad p = 1 \Rightarrow \Pi_r = \Pi_m = 0$

بنابراین برای حل مسئله مطابق مطالعات پیشین،[16,23,25] فرض می‌کنیم خرده‌فروش تا زمانی که حداقل سود حاشیه‌یی واحد را نداشته باشد، اقدام به فروش محصول نمی‌کند. بنابراین سود حاشیه‌یی واحد تولیدکننده را به‌عنوان حداقل سطح در نظر می‌گیریم

و محدودیت قیمت عمده‌فروشی را به‌صورت $p - w \geq w \Rightarrow w \leq 0{,}5P$ می‌نویسیم. که در آن $p - w$ و w به‌ترتیب سود حاشیه‌یی واحد خرده‌فروش و تولیدکننده است. بنابراین مقدار بهینه‌ی w برابر با $0{,}5p$ است.

قضیه‌ی ۱. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم تحت سیاست نش عبارت‌اند از:

$$p^N = \frac{2ed}{e-2} \tag{10}$$

$$w^N = \frac{ed}{e-2} \tag{11}$$

$$t^N = 0 \tag{12}$$

$$A^N = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{e(d-c)+2c}{2d}a^N \tag{13}$$

$$a^N = \left(\gamma D_0 \beta_2 e^{-e}\left(\frac{2d}{e-2}\right)^{1-e}\right) \times \left(\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{e(d-c)+2c}{2d}\right)^{-\delta} \tag{14}$$

اثبات. به پیوست الف مراجعه شود.

۳.۳. بازی تولیدکننده رهبر

در این بخش رابطه‌ی بین تولیدکننده و خرده‌فروش به‌عنوان یک بازی غیرهمکاری متوالی مدل می‌شود، که تولیدکننده رهبر و خرده‌فروش پیرو است. به‌منظور به دست آوردن این تعادل ابتدا باید بهترین پاسخ پیرو که در مرحله‌ی دوم توالی است تعیین شود و سپس مسئله‌ی تصمیم‌گیری رهبر بر پایه‌ی پاسخ پیرو حل شود. بنابراین بهترین پاسخ خرده‌فروش با توجه به حل مسئله‌ی خرده‌فروش در سیاست نش چنین خواهد بود:

$$p = \frac{e(w+d)}{e-1} \tag{15}$$

$$a = \left(\frac{\gamma D_0 \beta_2 A^{-\delta} e^{-e}\left(\frac{w+d}{e-1}\right)^{1-e}}{1-t}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \tag{16}$$

بنابراین در این قسمت جواب مسئله‌ی تصمیم‌گیری تولیدکننده با قرار دادن مقادیر بهینه‌ی p, a در تابع سود تولیدکننده محاسبه می‌شود. با مشتق‌گیری از تابع سود تولیدکننده نسبت به A و t، مقدار t برابر با $t = 1 + \frac{(w+d)}{\gamma(w+d)-(e-1)(w-c)}$ به دست خواهد آمد که مطابق تحقیقات انجام‌شده[21] میزان بهینه‌ی t^* صفر است.

قضیه‌ی ۲. مقادیر بهینه‌ی بازی تولیدکننده رهبر، خرده‌فروش پیرو عبارت‌است از:

$$p^{SM} = \frac{e(w+d)}{e-1} \tag{17}$$

$$a^{SM} = \left(\frac{\gamma D_0 \beta_2 A^{-\delta} e^{-e}\left(\frac{w+d}{e-1}\right)^{1-e}}{1-t}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \tag{18}$$

$$t^{SM} = 0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} A^{SM} =& \delta^{\frac{1+\gamma}{1+\gamma+\delta}} D_0^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} (e-1)^{\frac{e-1}{1+\gamma+\delta}} e^{\frac{-e}{1+\gamma+\delta}} \\ &\times (1-t)^{\frac{-1}{1+\gamma+\delta}} (w+d)^{\frac{-\gamma-e}{1+\gamma+\delta}} \beta_2^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \\ &\times \gamma^{\frac{-\gamma}{1+\gamma+\delta}} (\gamma+1)^{\frac{-(1+\gamma)}{1+\gamma+\delta}} \\ &\times \begin{pmatrix} \gamma(w+d)t \\ +(w-c)(1-t)(e-1) \end{pmatrix}^{\frac{1+\gamma}{1+\gamma+\delta}} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \prod_m}{\partial w} =& \alpha_2 D_0 \left(\frac{e}{e-1}\right)^{-e} \begin{bmatrix} -e(w+d)^{-e-1}(w-c) \\ +(w+d)^{-e} \end{bmatrix} \\ &- D_0 \left(\frac{e}{e-1}\right)^{-e} \begin{pmatrix} D_0^{-\gamma}\gamma^{-\gamma}\beta_2 A^{-\delta} e^{e\gamma} \\ \times(e-1)^{\gamma-e\gamma}(1-t)^{\gamma} \end{pmatrix}^{\frac{1}{\gamma+1}} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{-(\gamma+e)}{\gamma+1}(w+d)^{(2\gamma+e+1)} \\ \times(w-c)+(w+d)^{(\gamma+e)} \end{bmatrix}^{\frac{-1}{\gamma+1}} \\ &- \left(\gamma D_0 \beta_2 A^{-\delta} e^{-e}(e-1)^{e-1}(1-t)^{-1}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \\ &\times t\left[\frac{1-e}{\gamma+1}(w+d)^{\frac{-(e+\gamma)}{\gamma+1}}\right] \end{aligned} \tag{21}$$

مقدار بهینه‌ی w به دست آمده از معادله‌ی ۲۱ را می‌توان در روابط ۱۷ تا ۲۰ قرار داد و مقادیر بهینه‌ی بازی تولیدکننده رهبر را به دست آورد.

اثبات. به پیوست ب مراجعه شود.

۴.۳. بازی خرده‌فروش رهبر

حال رابطه‌ی خرده‌فروش و تولیدکننده را در یک بازی متوالی غیرهمکاری که در آن خرده‌فروش رهبر است، مدل‌سازی می‌کنیم. اولین قدم برای تعیین آن مانند قسمت قبل پیدا کردن بهترین پاسخ تولیدکننده است. برای ساده شدن محاسبات از تغییر متغیرها استفاده می‌کنیم. از آنجا که سود تولیدکننده همواره مثبت است، باید $\Pi_m > 0 \quad \Rightarrow w > c \quad \Rightarrow w - c > 0$ برقرار باشد. از طرف دیگر باید در کل زنجیره $p - (c+d) > 0$ باشد. حال با فرض $w' = w - c$ و $p' = p - (c+d)$، تابع سود خرده‌فروش در رابطه‌ی ۶، چنین بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Max}_{p,a} \Pi_r =& D_0 (p'-w')(p'+(c+d))^{-e} \times (\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma} A^{-\delta}) \\ &- (1-t)a \\ \text{s.t. } & w' \leq p' \text{ and } a \geq 0 \end{aligned} \tag{22}$$

همانند فرضیات مطالعات انجام شده[16,23,25] که در بخش ۲.۳. نیز توضیح داده شد، محدودیت قیمت عمده‌فروشی به‌صورت $p' - w' \geq w' \quad \Rightarrow w' \leq 0{,}5p'$ نوشته می‌شود که در آن $p' - w'$ و w' به‌ترتیب سود حاشیه‌یی واحد خرده‌فروش و تولیدکننده است. بنابراین مقدار بهینه‌ی w' برابر با $\frac{p'}{2}$ است. مقدار بهینه‌ی A برابر با $\left(\delta D_0 \beta_2 (w-c)(p')^{-e} a^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{\delta+1}}$ همانند حل مسئله‌ی تولیدکننده در بازی نش است. همچنین نرخ مشارکت بهینه از نقطه‌نظر تولیدکننده برابر صفر است. بنابراین در این قسمت جواب مسئله‌ی تصمیم‌گیری خرده‌فروش با قرار دادن مقادیر بهینه‌ی t، w' و A در معادله‌ی ۲۲ محاسبه می‌شود.

قضیه‌ی ۳. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم زمانی‌که خرده‌فروش رهبر است عبارت‌اند از:

$$p^{SR} = \frac{c+d}{e-1} + c + d \tag{23}$$

$$w^{SR} = \frac{1}{2}\left(\frac{c+d}{e-1}\right) + \frac{c+d}{2} \tag{24}$$

$$a^{SR} = \left(\gamma \frac{\beta_2^{\frac{1}{\delta+1}} \delta^{\frac{-\delta}{\delta+1}}}{\delta+1}\right)^{\frac{\delta+1}{\delta+\gamma+1}} \times \left(D_0 \frac{e^{-e}}{2}\left(\frac{c+d}{e-1}\right)^{1-e}\right)^{\frac{1}{\delta+\gamma+1}} \tag{25}$$

$$t^{SR} = 0 \tag{26}$$

$$A^{SR} = \left(\delta D_0 \beta_2 \frac{e^{-e}}{2}\left(\frac{c+d}{e-1}\right)^{1-e} a^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \tag{27}$$

اثبات. به پیوست ج مراجعه شود.

۵.۳. بازی همکاری

در سه قسمت قبل سه بازی غیرهمکاری را مورد بررسی قرار دادیم. در این قسمت رابطه‌ی تولیدکننده و خرده‌فروش را تحت یک بازی همکاری بررسی میکنیم که در آن اعضای زنجیره توافق بر همکاری و افزایش سود کل سیستم دارند. بنابراین با توجه به تابع سود کل زنجیره مقادیر بهینه را به دست می‌آوریم. در اینصورت تابع هدف عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Max}_{p,a,A} \prod_{sc} = D_0(p-c-d)(p^{-e}) \times (\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma} A^{-\delta}) - a - A \\ &\text{s.t.}\ \ c+d \le p \ \ \text{and}\ \ a, A \ge 0 \end{aligned} \tag{28}$$

چنان که از تابع هدف مشخص است، زمانی که تولیدکننده و خرده‌فروش همکاری می‌کنند فقط p، A و a متغیرهای تصمیم‌گیری‌اند، و متغیرهای w و t بر سود کل سیستم تأثیرگذار نیستند و تنها در تقسیم سود بین اعضا تأثیرگذارند.

قضیه‌ی ۴. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم بازی همکاری عبارت است از:

$$p^{co} = \frac{e(c+d)}{(e-1)} \tag{29}$$

$$A^{co} = \frac{\delta}{\gamma} a^{co} \tag{30}$$

$$a^{co} = \left(\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\delta} D_0 \beta_2 e^{-e}\left(\frac{c+d}{e-1}\right)^{1-e}\right)^{\frac{1}{\delta+\gamma+1}} \tag{31}$$

اثبات. به پیوست د مراجعه شود.

برای اندازه‌گیری کارایی در زنجیره‌ی تأمین، مهم‌ترین معیار سود کل زنجیره است. بنابراین فرض میکنیم دو بازیکن زمانی بر همکاری توافق میکنند که سود آنها بیشتر از سود بازی‌های غیرهمکاری باشد:[۲۲،۲۴،۲۵]

$$\Delta\Pi_m = \Pi_m^c - \Pi_m^{\max} \ge 0 \tag{32}$$

$$\Delta\Pi_r = \Pi_r^c - \Pi_r^{\max} \ge 0 \tag{33}$$

که در آنها Π_m^c و Π_r^c به‌ترتیب نشان‌گر سود تولیدکننده و خرده‌فروش در بازی همکاری است و $\Pi_m^{\max}$ و $\Pi_r^{\max}$ به‌ترتیب بیشترین سود تولیدکننده و خرده‌فروش را در هر بازی غیرهمکاری دیگر نشان می‌دهد. زمانی که این نابرابری برقرار باشد، همکاری امکان‌پذیر است. بنابراین برای سود کل زنجیره داریم:

$$\Delta\Pi_{m+r} = \Delta\Pi_m + \Delta\Pi_r = \Pi_{m+r}^c - \Pi_m^{\max} - \Pi_r^{\max} \ge 0 \tag{34}$$

برای پیدا کردن $\Pi_m^{\max}$ و $\Pi_r^{\max}$، لازم است نتایج بازی‌های دیگر را با هم مقایسه کنیم (به بخش ۴. مراجعه شود). خلاصه‌ی مقادیر بهینه‌ی چهار استراتژی در جدول ۱ ارائه‌شده است.

جدول ۱. خلاصه‌ی مقادیر بهینه‌ی چهار استراتژی.

	نش	استکلبرگ ـ تولیدکننده رهبر	استکلبرگ ـ خرده‌فروش رهبر	همکاری
p	$\frac{2ed}{e-2}$	$\frac{e(w+d)}{e-1}$	$\frac{c+d}{e-1} + c + d$	$\frac{e(c+d)}{(e-1)}$
w	$\frac{ed}{e-2}$	به معادله‌ی ۲۱ مراجعه شود.	$\frac{1}{2}(\frac{c+d}{e-1}) + \frac{c+d}{2}$	-
A	$(\frac{\delta}{\gamma})\frac{e(d-c)+2c}{(2d)}a^N$	$\delta^{\frac{1+\gamma}{1+\gamma+\delta}} D_0^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} (e-1)^{\frac{e-1}{1+\gamma+\delta}} \times e^{\frac{-e}{1+\gamma+\delta}} (1-t)^{\frac{-1}{1+\gamma+\delta}} (w+d)^{\frac{-\gamma-e}{1+\gamma+\delta}} \times \beta_2^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \gamma^{\frac{-\gamma}{1+\gamma+\delta}} (\gamma+1)^{\frac{-(1+\gamma)}{1+\gamma+\delta}} \times \left(\begin{array}{l}\gamma(w+d)t \\ +(w-c)(1-t)(e-1)\end{array}\right)^{\frac{1+\gamma}{1+\gamma+\delta}}$	$\left(\delta D_0 \beta_2 \frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e} a^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{\delta+1}}$	$\frac{\delta}{\gamma} a^{co}$
a	$\left(\gamma D_0 \beta_2 e^{-e}(\frac{2d}{e-2})^{1-e}\right) \times \left((\frac{\delta}{\gamma})\frac{e(d-c)+2c}{(2d)}\right)^{-\delta}$	$\left(\frac{\gamma D_0 \beta_2 A^{-\delta} e^{-e}(\frac{w+d}{e-1})^{1-e}}{1-t}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}$	$\left(D_0 \frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}\right)^{\frac{1}{\delta+\gamma+1}} \times \left(\gamma\frac{\beta_2^{\frac{1}{\delta+1}}\delta^{\frac{-\delta}{\delta+1}}}{\delta+1}\right)^{\frac{\delta+1}{\delta+\gamma+1}}$	$\left(D_0 \beta_2 e^{-e}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}\right)^{\frac{1}{\delta+\gamma+1}} \times (\frac{\gamma}{\delta})^{\frac{\delta}{\delta+\gamma+1}}$
t	0	0	0	-

۴. مثال عددی

دربخش قبل مقادیر بهینه‌ی چهار بازی نش، استکلبرگ ـ تولیدکننده رهبر، استکلبرگ ـ خرده‌فروش رهبر و همکاری را به دست آوردیم (جدول ۱). در این قسمت به یک مثال عددی می‌پردازیم. فرض میکنیم پارامترهای مدل ۵ $D_۰ = ۱$، $c = ۱$، $d = ۱$، $\alpha_۲ = ۱۰۰۰$، $\beta_۲ = ۵۰۰$، $\delta = ۱$، $\gamma = ۱$ و $e = ۳$ هستند. در جدول ۲ مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم در هر چهار حالت ارائه شده است. چنان که در قسمت قبل گفته شد، دو بازیکن زمانی بر همکاری توافق دارند، که سود آنها بیشتر

جدول ۲. نتایج مثال عددی.

متغیر تصمیم	نش	استکلبرگ ـ تولیدکننده رهبر	استکلبرگ ـ خرده‌فروش رهبر	همکاری
p	۶	۴٫۴۵۳۵	۲٫۳۳۳۳	۳
w	۳	۱٫۹۶۹۰	۱٫۱۶۶۷	-
A	۲۳٫۱۴۸۱	۱٫۶۴۸۰	۴٫۵۲۴۰	۴٫۵۲۴۰
a	۲۳٫۱۴۸۱	۵٫۰۴۹۳	۲٫۲۶۲۰	۴٫۵۲۴۰
t	۰	۰	۰	-
Π_m	۲۳٫۱۰۵۰	۴۹٫۹۰۷۷	۵۷٫۸۸۳۷	-
Π_r	۲۳٫۱۰۵۰	۷۳٫۹۳۳۷	۶۰٫۱۰۳۳	-
Π_{sc}	۴۶٫۲۱۰۰	۱۲۳٫۸۴۱۴	۱۱۷٫۹۹۲۰	۱۷۱٫۶۱۳۱

از سود بازی‌های غیرهمکاری باشد (روابط ۳۲ و ۳۳). در اینجا دو بازیکن زمانی به سود بیشینه می‌رسند که در نقش پیرو باشند.

پس با توجه به فرض ما هر دو بازیکن در فرایند چانه‌زنی حداقل سودهای $\Pi_m = ۵۷٫۸۸۳۷$ و $\Pi_r = ۷۳٫۹۳۳۷$ را ادعا میکنند، در غیر این صورت انگیزه‌یی برای عدم همکاری نخواهند داشت. حال اگر حداقل سودهایی را که هر دو طرف ادعا می‌کنند با هم جمع کنیم داریم:

$$\Pi_m^{SR} + \Pi_r^{SR} = ۵۷٫۸۸۳۷ + ۷۳٫۹۳۳۷ = ۱۳۱٫۸۱۷۴ < \Pi_{m+r}^c = ۱۷۱٫۶۱۳۱$$

مشاهده می‌شود که در اینجا حداقل سودهایی که هر دو طرف ادعا می‌کنند کوچک‌تر از سود کل همکاری است که بین دو بازیکن تقسیم می‌شود؛ بنابراین همکاری بین دو بازیکن وجود خواهد داشت. در صورت عدم همکاری سود هر دو بازیکن کمتر خواهد بود و عدم همکاری به‌نفع هیچ‌یک از بازیکنان نیست.

۵. تحلیل حساسیت

در این قسمت، تحلیل حساسیت به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها به‌منظور بررسی تغییرات و تأثیر آنها بر متغیرهای تصمیم ارائه می‌شود. در جدول ۳ تحلیل حساسیت مربوط به بازی نش، در جدول ۴ تحلیل حساسیت مربوط به بازی استکلبرگ ـ

جدول ۳. نتایج تحلیل حساسیت در بازی نش.

	بازی نش								
	تغییرات (٪)	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
$\alpha_۲ = ۱۰۰۰$	+۴۰	۰	۰	۰	۰	۰	۸۰٫۱	۸۰٫۱	۸۰٫۱
	+۲۰	۰	۰	۰	۰	۰	۴۰٫۱	۴۰٫۱	۴۰٫۱
	−۲۰	۰	۰	۰	۰	۰	−۴۰٫۱	−۴۰٫۱	−۴۰٫۱
	−۴۰	۰	۰	۰	۰	۰	۸۰٫۱	۸۰٫۱	۸۰٫۱
$\beta_۲ = ۵۰۰$	+۴۰	۰	۰	۴۰	۴۰	۰	−۴۰	−۴۰	−۴۰
	+۲۰	۰	۰	۲۰	۲۰	۰	−۲۰	−۲۰	−۲۰
	−۲۰	۰	۰	−۲۰	−۲۰	۰	۲۰	۲۰	۲۰
	−۴۰	۰	۰	−۴۰	−۴۰	۰	۳۹٫۹	۳۹٫۹	۳۹٫۹
$\gamma = ۱$	+۴۰	۰	۰	۴۰٫۰	۰	۰	−۳۹٫۹	۰٫۱	−۱۹٫۹
	+۲۰	۰	۰	۲۰٫۰	۰	۰	−۱۹٫۹	۰٫۱	−۹٫۹
	−۲۰	۰	۰	−۲۰٫۰	۰	۰	۱۹٫۸	−۰٫۳	۹٫۸
	−۴۰	۰	۰	−۴۰٫۰	۰	۰	۳۹٫۲	−۰٫۹	۱۹٫۱
$\delta = ۱$	+۴۰	۰	۰	۱۴٫۴	۶۰٫۲	۰	−۱۴٫۳	−۶۰٫۱	−۳۷٫۲
	+۲۰	۰	۰	۳٫۷	۲۴٫۵	۰	−۳٫۶	−۲۴٫۴	−۱۴٫۰
	−۲۰	۰	۰	۴٫۶	−۱۶٫۳	۰	−۴٫۸	۱۶٫۲	۵٫۷
	−۴۰	۰	۰	۲۲٫۷	−۲۶٫۴	۰	−۲۳٫۳	۲۵٫۸	۱٫۳
$e = ۳$	+۴۰	−۳۶٫۴	−۳۶٫۴	−۶۴٫۷	−۶۴٫۷	۰	−۶۵٫۱	−۶۵٫۱	−۶۵٫۱
	+۲۰	−۲۵٫۰	−۲۵٫۰	−۳۹٫۹	−۳۹٫۹	۰	−۴۰٫۱	−۴۰٫۱	−۴۰٫۱
	−۲۰	۱۰۰٫۰	۱۰۰٫۰	۳۸٫۸	۳۸٫۸	۰	۳۸٫۹	۳۸٫۹	۳۸٫۹
	−۴۰	غیرموجه	غیرموجه	غیرموجه	غیرموجه	۰	غیرموجه	غیرموجه	غیرموجه

جدول ۴. نتایج تحلیل حساسیت در بازی استکلبرگ ـ تولیدکننده رهبر.

	تغییرات (٪)	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
$\alpha_۲ = ۱۰۰۰$	+۴۰	۰٫۳	۶۹٫۵	۰٫۲	-۰٫۴	۰	۴۴٫۰	۴۴٫۶	۴۴٫۳
	+۲۰	۰٫۲	۶۹٫۲	۰٫۱	۰٫۲	۰	۲۲٫۰	۲۲٫۳	۲۲٫۲
	-۲۰	-۰٫۳	۶۸٫۱	-۰٫۲	۰٫۴	۰	-۲۲٫۰	-۲۲٫۳	-۲۲٫۲
	-۴۰	-۰٫۷	۱٫۹۵	-۰٫۵	۱٫۰	۰	-۴۴٫۰	-۴۴٫۶	-۴۴٫۳
$\beta_۲ = ۵۰۰$	+۴۰	-۰٫۱۳	-۰٫۱۹	۱۱٫۸	۱۲٫۱	۰	-۱٫۲	-۱٫۴	-۱٫۳
	+۲۰	-۰٫۰۷	-۰٫۱	۶٫۲	۶٫۴	۰	۰٫۶۳	-۰٫۷۲	-۰٫۶۸
	-۲۰	۰٫۰۸	۰٫۱۲	-۷٫۱	-۷٫۳	۰	۰٫۷۱	۰٫۸۲	۰٫۷۸
	-۴۰	۰٫۱۷	۰٫۲۵	-۱۵٫۶	-۱۵٫۸	۰	۱٫۵۵	۱٫۷۸	۱٫۶۹
$\gamma = ۱$	+۴۰	۶٫۵	۷٫۲	-۳۱٫۲	۱۹٫۵	۰	۴٫۸	۳٫۴	۳٫۸
	+۲۰	۳٫۱	۴٫۶	-۱۶٫۸	۹٫۲	۰	۲٫۵	۱٫۸	۲٫۳
	-۲۰	۲٫۳	-۴٫۸	۱۵٫۱	-۸٫۱	۰	-۲٫۴	-۱٫۶	-۲٫۰۷
	-۴۰	-۸٫۷	-۸٫۹	۳۲٫۶	-۱۹٫۹۴	۰	-۵٫۱	-۲٫۹	-۴٫۱
$\delta = ۱$	+۴۰	۴٫۷	۵٫۵	-۴۲٫۳	-۱٫۳	۰	۲٫۴	۳٫۴	۲٫۹
	+۲۰	۲٫۶	۳٫۹	-۲۵٫۱	-۰٫۵	۰	۱٫۵	۲٫۰۲	۱٫۶
	-۲۰	-۳٫۱	-۳٫۴	۲۰٫۹	۰٫۵	۰	-۱٫۱	-۱٫۹	-۱٫۵
	-۴۰	-۵٫۴	-۵٫۲	۴۵٫۰۲	۱٫۲	۰	-۲٫۵	-۴٫۰۱	-۳٫۳
$e = ۳$	+۴۰	-۵٫۳	-۷٫۴	-۱۱٫۰۵	-۱۵٫۲	۰	-۶۵٫۴	-۶۱٫۵	-۶۳٫۹
	+۲۰	-۳٫۱	-۲٫۸	-۶٫۱	-۸٫۳	۰	-۴۵٫۸	-۴۱٫۴	-۴۴٫۸
	-۲۰	۴٫۲	۳٫۱	۵٫۲	۸٫۲	۰	۸۴٫۶	۸۸٫۶	۸۷٫۵
	-۴۰	۸٫۹	۱۰٫۲	۱۰٫۹	۱۵٫۶	۰	۲۴۶٫۹	۲۲۱٫۱	۲۳۱٫۱

تولیدکننده رهبر، در جدول ۵ تحلیل حساسیت مربوط به بازی استکلبرگ ـ خرده‌فروش رهبر و در جدول ۶ تحلیل حساسیت مربوط به بازی همکاری نشان داده شده است. تحلیل حساسیت براساس پنج پارامتر اصلی $\alpha_۲$، $\beta_۲$،γ، δ و e صورت می‌گیرد.

مطابق جدول ۳، در بازی نش p و w نسبت به پارامترهای $\alpha_۲$، $\beta_۲$، γ و δ حساس نیستند، اما نسبت به افزایش e حساس و نسبت به کاهش آن خیلی حساس‌اند. a و A نسبت به پارامتر $\alpha_۲$ حساس نیستند، اما نسبت به $\beta_۲$، δ و e حساس‌اند. A نسبت به پارامتر γ حساس است، اما a نسبت به γ حساس نیست. در بازی نش مقدار بهینه‌ی t برابر صفر است و نسبت به هیچ‌کدام از پارامترها حساس نیست.

توابع سود تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره نسبت به $\alpha_۲$ خیلی حساس و نسبت به $\beta_۲$ حساس‌اند. سود تولیدکننده نسبت به γ حساس است. سود خرده‌فروش نسبت به γ نسبتاً حساس است. درنتیجه سود کل زنجیره نسبت به γ حساس است. سود تولیدکننده نسبت به افزایش و کاهش δ حساس است. سود خرده‌فروش نسبت به افزایش δ خیلی حساس می‌شود. درنتیجه سود کل زنجیره نیز نسبت به افزایش δ حساس می‌شود اما نسبت به کاهش آن نسبتاً حساس است. سود تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره نسبت به افزایش e خیلی حساس است. در بازی استکلبرگ ـ تولیدکننده رهبر[21] نرخ مشارکت بهینه را صفر در نظر گرفتیم، بنابراین نسبت به هیچ‌کدام از پارامترهاحساس نیست. مطابق جدول ۴، p و w نسبت به پارامترهای $\alpha_۲$، $\beta_۲$، γ، δ نسبتاً حساس‌اند و نسبت به e نیز حساس‌اند. a و A نسبت به پارامتر $\alpha_۲$ نسبتاً حساس‌اند و با افزایش و کاهش $\beta_۲$ حساس می‌شوند. a و A نسبت به پارامترهای γ، δ و e حساس‌اند و A با کاهش γ خیلی حساس می‌شود.

سود تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره با افزایش و کاهش $\alpha_۲$ خیلی حساس

جدول ۵. نتایج تحلیل حساسیت در بازی استکلبرگ ـ خرده‌فروش رهبر.

	تغییرات (٪)	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
$\alpha_2 = 1000$	+۴۰	۰	۰	۰	۰	۰	۴۵٫۳	۴۳٫۶	۴۴٫۵
	+۲۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲۲٫۷	۲۱٫۸	۲۲٫۲
	-۲۰	۰	۰	۰	۰	۰	-۲۲٫۷	-۲۱٫۸	-۲۲٫۲
	-۴۰	۰	۰	۰	۰	۰	-۴۵٫۳	-۴۳٫۶	-۴۴٫۵
$\beta_2 = 1000$	+۴۰	۰	۰	۱۱٫۸۷	۱۱٫۸۷	۰	-۱٫۹	-۰٫۵	-۱٫۲
	+۲۰	۰	۰	۶٫۳	۶٫۳	۰	-۰٫۸	-۰٫۶	-۰٫۷
	-۲۰	۰	۰	-۷٫۲	-۷٫۲	۰	۰٫۹۵	۰٫۷	۰٫۸
	-۴۰	۰	۰	-۱۵٫۷	-۱۵٫۷	۰	۲٫۱	۱٫۴	۱٫۸
$\gamma = 1$	+۴۰	۰	۰	-۵٫۰	۱۰٫۷	۰	۲٫۳	۱٫۴	۱٫۸
	+۲۰	۰	۰	-۳٫۱	۶٫۵	۰	۱٫۳	۰٫۸	۱٫۰
	-۲۰	۰	۰	۵٫۲	-۹٫۶	۰	-۱٫۶	-۰٫۸	-۱٫۲
	-۴۰	۰	۰	۱۴٫۳	-۲۳٫۵	۰	-۳٫۵	-۱٫۴	-۲٫۴
$\delta = 1$	+۴۰	۰	۰	۱٫۲	-۳۵٫۹	۰	۰٫۸	۲٫۲	۱٫۵
	+۲۰	۰	۰	-۰٫۴	-۲۰٫۴	۰	۰٫۴	۱٫۱	۰٫۸
	-۲۰	۰	۰	۲٫۸	۲۷٫۰	۰	-۰٫۴	-۱٫۲	-۰٫۸
	-۴۰	۰	۰	۸٫۳	۶۲٫۸	۰	-۱٫۰	-۲٫۷	-۱٫۹
$e = 3$	+۴۰	-۴٫۱	-۴٫۱	-۳۳٫۶	-۳۳٫۶	۰	-۷۴٫۲	-۷۲٫۶	-۷۳٫۴
	+۲۰	-۲٫۴	-۲٫۴	-۱۹٫۰	-۱۹٫۰	۰	۴۹٫۰	-۴۷٫۸	-۴۸٫۴
	-۲۰	۳٫۶	۳٫۶	۲۶٫۱	۲۶٫۱	۰	۹۷٫۸	۹۸٫۴	۹۸٫۱
	-۴۰	۹٫۵	۹٫۵	۶۵٫۱	۶۵٫۱	۰	۳۲۲٫۴	۳۱۳٫۰	۳۱۷٫۶

می‌شود و نسبت به β_2، γ و δ نسبتاً حساس و نسبت به e خیلی حساس است. مطابق جدول ۵، در بازی استکلبرگ ـ خرده‌فروش رهبر، p و w نسبت به پارامترهای α_2، β_2، γ و δ حساس نیستند، اما نسبت به e نسبتاً حساس‌اند. a و A نسبت به پارامتر α_2 حساس نیستند، اما با افزایش و کاهش β_2 و γ حساس می‌شوند. A نسبت به پارامتر δ نسبتاً حساس است، اما a نسبت به پارامتر δ حساس است و با کاهش آن خیلی حساس می‌شود. همچنین هر دو متغیر a و A نسبت به e حساس‌اند و با کاهش آن حساس‌تر می‌شوند. در بازی استکلبرگ ـ خرده‌فروش رهبر مقدار بهینه‌ی t برابر با صفر است و نسبت به هیچ‌کدام از پارامترها حساس نیست. توابع سود تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره نسبت به α_2 حساس، نسبت به β_2، γ و δ نسبتاً حساس، و نسبت به e خیلی حساس‌اند. مطابق جدول ۶، در بازی همکاری، p نسبت به پارامترهای α_2، β_2، γ و δ حساس نیست، ولی نسبت به افزایش e حساس و نسبت به کاهش e خیلی حساس است. a و A نسبت به پارامتر α_2 حساس نیستند، اما نسبت به β_2 حساس‌اند.

a نسبت به پارامتر γ نسبتاً حساس و A نسبت به پارامتر γ حساس است. a نسبت به پارامتر δ حساس است درحالی که A نسبت به پارامتر δ نسبتاً حساس است. a و A نسبت به پارامتر e حساس‌اند در حالی که سود کل زنجیره نسبت به e خیلی حساس و نسبت به α_2، γ و δ حساس است. همچنین نسبت به β_2 نسبتاً حساس است.

۶. نتیجه‌گیری

در این تحقیق همکاری در تبلیغات همراه با تصمیمات قیمت‌گذاری در یک زنجیره‌ی

جدول ۶. نتایج تحلیل حساسیت در بازی همکاری.

	تغییرات (٪)	p	w	A	a	t	Π_{sc}
$\alpha_۲ = ۱۰۰۰$	+۴۰	۰	-	۰	۰	-	۴۳٫۲
	+۲۰	۰	-	۰	۰	-	۲۱٫۶
	-۲۰	۰	-	۰	۰	-	-۲۱٫۶
	-۴۰	۰	-	۰	۰	-	-۴۳٫۲
$\beta_۲ = ۱۰۰۰$	+۴۰	۰	-	۱۱٫۹	۱۱٫۹	-	-۰٫۹۴
	+۲۰	۰	-	۶٫۳	۶٫۳	-	۰٫۵۰
	-۲۰	۰	-	-۷٫۳	-۷٫۲	-	۰٫۵۷
	-۴۰	۰	-	-۱۵٫۷	-۱۵٫۷	-	۱٫۲۴
$\gamma = ۱$	+۴۰	۰	-	-۳۴٫۰	-۷٫۶	-	-۴۱٫۹
	+۲۰	۰	-	-۱۹٫۷	-۳٫۷	-	-۴۲٫۵
	-۲۰	۰	-	۲۸٫۶	۲٫۹	-	-۴۴٫۱
	-۴۰	۰	-	۷۲٫۷	۳٫۶	-	-۴۵٫۳
$\delta = ۱$	+۴۰	۰	-	۲٫۱	-۲۷٫۱	-	-۴۱٫۸
	+۲۰	۰	-	۲٫۰	-۱۵٫۰	-	-۴۲٫۴
	-۲۰	۰	-	-۵٫۰	۱۸٫۷	-	-۴۴٫۰
	-۴۰	۰	-	-۱۴٫۸	۱۴٫۹	-	-۴۵٫۰
$e = ۱$	+۴۰	-۱۲٫۵	-	-۳۳٫۶	-۳۳٫۶	-	-۸۶٫۳
	+۲۰	-۷٫۷	-	-۱۹٫۰	-۱۹٫۰	-	-۷۲٫۰
	-۲۰	۱۴٫۳	-	۲۶٫۱	۲۶٫۱	-	۱۵۸٫۲
	-۴۰	۵۰٫۰	-	۶۵٫۱	۶۵٫۱	-	۱۷۸٫۵

تأمین دوسطحی شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش بررسی شد. تقاضا در این مدل تابعی از قیمت و تبلیغات است. چهار نظریه‌ی بازی، به‌منظور مطالعه‌ی اثر توازن قدرت زنجیره‌ی تأمین بر تصمیم‌گیری بهینه‌ی اعضای زنجیره توسعه داده شد، که سه بازی غیرهمکاری شامل بازی‌های نش، تولیدکننده رهبر و خرده‌فروش رهبر و یک بازی همکاری در نظر گرفته شد. مشاهده شد که مجموع حداقل سودهایی که هر دو طرف ادعا می‌کنند کوچک‌تر از سود کل همکاری است. بنابراین به این نتیجه رسیدیم که همکاری بین دو بازیکن وجود خواهد داشت؛ زیرا با توجه به فرض $e > ۱$ تغییرات قیمت تأثیر زیادی بر تقاضا دارد و با کاهش قیمت تقاضا افزایش پیدا می‌کند.

در صورت عدم همکاری در تبلیغات، خرده‌فروش سعی می‌کند سود خود را از طریق افزایش قیمت و میزان تبلیغات محلی افزایش دهد. از طرفی تولیدکننده سعی می‌کند مقادیر کم‌تری را صرف تبلیغات کند و بیشتر هزینه‌های تبلیغاتی را خرده‌فروش به عهده بگیرد. بنابراین افزایش بیشتر سود خرده‌فروش منجر به افزایش قیمت خرده‌فروشی می‌شود و به‌همین دلیل سود خرده‌فروش بیشتر از سود مابقی اعضای زنجیره‌ی تأمین در وضعیت غیرهمکاری می‌شود. درنتیجه تولیدکننده سود چندانی نسبت به هزینه‌های تولید و قیمت عمده‌فروشی کسب نمی‌کند. بنابراین تولیدکننده برای بقای خود در بازار ناگزیر به استفاده از تبلیغات مشارکتی و توافق بر همکاری با خرده‌فروش می‌شود. از طرفی حساسیت هریک از پارامترهای مدل بر متغیرهای تصمیم بررسی شد.

پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آتی استراتژی‌های همکاری و غیرهمکاری با توابع مختلف تقاضا توسعه داده شود و علاوه بر قیمت‌گذاری و تبلیغات، عوامل دیگری در همکاری نیز مد نظر قرار بگیرد.

پانوشت‌ها

1. goodwill function
2. differential game
3. Choi

منابع (References)

1. Berger, P.D. "Vertical cooperative advertising ventures", *Journal of Marketing Research*, **9**(3), pp. 309-312 (1972).
2. Karray, S. and Zaccour, G. "Could co-op advertising be a manufacturer's counterstrategy to store brands", *Journal of Business Research*, **59**(9), pp. 1008-1015 (2006).
3. JØrgensen, S. and Zaccour, G. "A differential game of retailer promotions", *Automatica*, **39**(7), pp. 1145-1155 (2003b).
4. JØrgensen, S., Sigue, S. and Zaccour, G. "Dynamic cooperative advertising in a channel", *Journal of Retailing*, **76**(1), pp. 71-92 (2000).
5. JØrgensen, S., Sigue, S. and Zaccour, G. "Stackelberg leadership in a marketing channel", *International Game*

Theory Review, **3**(1), pp. 13-26 (2001).

6. JØrgensen, S., Taboubi, S. and Zaccour, G. "Retail promotions with negative brand image effects: Is cooperation possible", *European Journal of Operational Research*, **150**(2), pp. 395-405 (2003).
7. Berger, P., Lee, J. and Weinberg, B. "Optimal cooperative advertising integration strategy for organizations adding a direct online channel", *Journal of the Operational Research Society*, **57**(8), pp. 920-927 (2006).
8. Huang, Z. and Li, S., *Coordination* and *Cooperation in Manufacturer-Retailer Supply Chains*, In: Shi, Y., Xu, W., Chen, Z., et al. (Eds.), Data Mining and Knowledge Management. Springer, Berlin, Chapter 19, pp. 174-186 (2005).
9. Li, S., Huang, Z., Zhu, J. and Chau, P. "Cooperative advertising, game theory and manufacturer–retailer supply chains", *Omega*, **30**(5), pp. 347-357 (2002).
10. Huang, Z., Li, S. and Mahajan, V. "An analysis of manufacturer–retailer supply chain coordination in cooperative advertising", *Decision Sciences*, **33**(3), pp. 469-494 (2002).
11. Bergen, M. and John, G. "Understanding cooperative advertising participation rates in conventional channels", *Journal of Marketing Research*, **34**(3), pp. 357-369 (1997).
12. Kim, S.Y. and Staelin, R. "Manufacturer allowances and retailer pass-through rates in a competitive environment", *Marketing Science*, **18**(1), pp. 59-76 (1999).
13. Karray, S. and Zaccour, G. "Effectiveness of coop advertising programs in competitive distribution channels", *International Game Theory Review*, **9**(2), pp. 151-167 (2007).
14. Yue, J., Austin, J., Wang, M. and Huang, Z. "Coordination of cooperative advertising in a two-level supply chain when manufacturer offers discount", *European Journal of Operational Research*, **168**(1), pp. 65-85 (2006).
15. Huang, Z. and Li, S. "Co-op advertising models in manufacturer–retailer supply chains: A game theory approach", *European Journal of Operational Research*, **135**(3), pp. 527-544 (2001).
16. Jorgensen, S. and Zaccour, G. "Equilibrium pricing and advertising strategies in a marketing channel", *Journal of Optimization Theory* and *Applications*, **102**(1), pp. 111-125 (1999).
17. JØrgensen, S. and Zaccour, G. "Channel coordination over time: Incentive equilibria and credibility", *Journal of Economic Dynamics* and *Control*, **27**(5), pp. 801-822 (2003a).
18. Wang, S.D., Zhou, Y.W., Min, J. and Zhong, Y.G. "Coordination of cooperative advertising models in a one-manufacturer two-retailer supply chain system", *Computers & Industrial Engineering*, **61**, pp. 1053-1071 (2011).
19. He, X., Prasad, A. and Sethi, S. "Cooperative advertising and pricing in a dynamic stochastic supply chain: Feedback stackelberg strategies", *Production* and *Operations Management*, **18**(1), pp. 78-94 (2009).
20. Choi, S. "Price competition in a channel structure with a common retailer", *Marketing Science,* **10**(4), pp. 271-296 (1991).
21. Szmerekovsky, J. and Zhang, J. "Pricing and two-tier advertising with one manufacturer and one retailer", *European Journal of Operational Research*, **192**(3), pp. 904-917 (2009).
22. Xie, J. and Neyret, A. "Co-op advertising and pricing models in manufacturer– retailer supply chains", *Computers & Industrial Engineering*, **56**(4), pp. 1375-1385 (2009).
23. Xie, J. and Wei, J. "Coordinating advertising and pricing in a manufacturer–retailer channel", *European Journal of Operational Research*, **197**(2), pp. 785-791 (2009).
24. Seyed-Esfahani, M.M., Biazaran, M. and Gharakhani, M. "A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer–retailer supply chains", *European Journal of Operational Research*, **211**(2), pp. 263-273 (2011).
25. Aust, G. and Buscher, U. "Vertical cooperative advertising and pricing decisions in a manufacturer–retailer supply chain: A game-theoretic approach", *European Journal of Operational Research*, **223**, pp. 473-482 (2012).
26. Zhang, J., Gou, Q., Liang, L. and Huang, Z. "Supply chain coordination through cooperative advertising with reference price effect", *Omega*, **41**(2), pp. 345-353 (2013).
27. Zhou, M. and Lin, J. "Cooperative advertising and pricing models in a dynamic marketing channel", *Journal of Systems Science* and *Systems Engineering*, **23**(1), 94-110 (2014).
28. Aust, G. and Buscher, U. "Cooperative advertising models in supply chain management: A review", *European Journal of Operational Research,* **234**(1), pp. 1-14 (2014).
29. Aust, G. and Buscher, U. "Vertical cooperative advertising in a retailer duopoly", *Computers & Industrial Engineering*, **72**, pp. 247-254 (2014).
30. Alaei, S., Alaei, R. and Salimi, P. "A game theoretical study of cooperative advertising in a single-manufacturer-two-retailers supply chain", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,* **74**(4), pp. 101-111 (2014).
31. Ghadimi, S., Szidarovszky, F., Farahani, R.Z. and Yousefzadeh Khiabani, A. "Coordination of advertising in supply chain management with cooperating manufacturer and retailers", *IMA Journal of Management Mathematics*, **24**, pp. 1-19 (2011).
32. Roy, A., Sana, S.S. and Chaudhuri, K. "Effect of cooperative advertising policy for two layer supply chain", *International Journal of Management Science* and *Engineering Management*, **9**(4), pp. 1-13 (2014).
33. Chutani, A. and Sethi, S.P. "A feedback stackelberg game of cooperative advertising in a durable goods oligopoly", *Dynamic Games in Economics,* Springer, **16**, pp. 89-114 (2014).
34. Karray, S. and Amin, S.H. "Cooperative advertising in a supply chain with retail competition", *International Journal of Production Research,* **23**(1), pp. 94-110 (2014).

پیوست

الف) اثبات قضیه ۱

تابع سود تولیدکننده نسبت به A مقعر است، چون مشتق دوم تابع، نسبت به A منفی است.

$$\frac{\partial^{2}\prod_m}{\partial A^{2}} = -(\delta+1)\delta D_{0}\beta_{2}(w-c)\times(p^{-e})a^{-\gamma}A^{-(\delta+2)} < 0 \quad (\text{۱الف})$$

بنابراین مقدار بهینه‌ی A از رابطه‌ی:

$$\frac{\partial\prod_m}{\partial A} = \delta D_{0}\beta_{2}(w-c)(p^{-e})a^{-\gamma}A^{-(\delta+1)} - 1 = 0$$

به دست خواهد آمد. بنابراین مقادیر بهینه از حل مسئله‌ی تولیدکننده عبارت است از:

$$t^{*} = 0 \quad (\text{۲الف})$$

$$w^{*} = \frac{p}{2} \quad (\text{۳الف})$$

$$A^{*} = \left(\delta D_{0}\beta_{2}(w-c)(p^{-e})a^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \quad (\text{۴الف})$$

برای حل مسئله‌ی خرده‌فروش متغیر z را به‌صورت $(p-w-d)(p^{-e})$ تعریف می‌کنیم. با این محدودیت که $w+d \leq p$ است. حال مشتق جزئی z نسبت به p برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial p} = (p^{-e}) - ep^{-(e+1)}(p-w-d) = 0$$

$$\Rightarrow (p^{-e-1})(p-e(p-w-d)) = 0 \quad (\text{۵الف})$$

از آنجاکه $p^{-e-1} > 0$ است، از معادله‌ی ۵الف مقدار $p = p_{1}$ برابر با $\frac{e(w+d)}{e-1}$ است. حال دامنه‌ی z را باتوجه به مقادیر مختلف p تعیین می‌کنیم. اگر $p = w+d$ باشد، آنگاه $z = 0$ و اگر $p = p_{1}$ باشد، آنگاه $z = e^{-e}(\frac{w+d}{e-1})^{1-e} > 0$. همچنین به‌ازای $p \to \infty$ داریم $z = 0$. پس بیشترین مقدار z در $p = p_{1}$ به دست می‌آید و کم‌ترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین:

$$0 \leq z \leq e^{-e}(\frac{w+d}{e-1})^{1-e}$$

در نتیجه مسئله‌ی خرده‌فروش در رابطه‌ی ۹ را چنین بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\max_{p,a}\ \Pi_r = D_{0}z(\alpha_{2} - \beta_{2}a^{-\gamma}A^{-\delta}) - (1-t)a\\ &\text{s.t. } 0 \leq z \leq e^{-e}(\frac{w+d}{e-1})^{1-e}, \quad 0 \leq a\end{aligned} \quad (\text{۶الف})$$

$\prod_r$ نسبت به z یک تابع صعودی است، چون مشتق جزئی آن نسبت به z برابر است با:

$$\frac{\partial\prod_r}{\partial z} = D_{0}(\alpha_{2} - \beta_{2}a^{-\gamma}A^{-\delta}) > 0$$

که مقداری مثبت و بزرگ‌تر از صفر است. بنابراین مقدار بهینه‌ی z برابر با $e^{-e}(\frac{w+d}{e-1})^{1-e}$ است. همچنین تابع سود تولیدکننده نسبت به a مقعر است، چون مشتق دوم تابع، نسبت به a برابر است با:

$$\frac{\partial^{2}\Pi_r}{\partial a^{2}} = -(\gamma+1)\gamma D_{0}z\beta_{2}a^{-(\gamma+2)}A^{-\delta} < 0$$

که یک مقدار منفی است. بنابراین مقدار بهینه‌ی a از رابطه‌ی:

$$\frac{\partial\Pi_r}{\partial a} = \gamma D_{0}z\beta_{2}a^{-(\gamma+1)}A^{-\delta} - (1-t) = 0$$

به دست خواهد آمد. در نتیجه مقادیر بهینه، از حل مسئله‌ی خرده‌فروش عبارت‌اند از:

$$p^{*} = \frac{e(w+d)}{e-1} \quad (\text{۷الف})$$

$$z^{*} = e^{-e}(\frac{w+d}{e-1})^{1-e} \quad (\text{۸الف})$$

$$a^{*} = \left(\frac{\gamma D_{0}z\beta_{2}A^{-\delta}}{1-t}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \quad (\text{۹الف})$$

بنابراین با حل معادلات ۲الف تا ۴الف، و ۷الف تا ۹الف به تعادل:

$$p^{N} = \frac{2ed}{e-2}$$

$$w^{N} = \frac{ed}{e-2}$$

$$a^{N} = \left(\gamma D_{0}\beta_{2}e^{-e}(\frac{2d}{e-2})^{1-e}\right)\left((\frac{\delta}{\gamma})\frac{e(d-c)+2c}{(2d)}\right)^{-\delta}$$

$$t^{N} = 0, \qquad A^{N} = \frac{(e(d-c)+2c)\delta a^{N}}{2d\gamma}$$

خواهیم رسید.

ب) اثبات قضیه‌ی ۲

با جایگزینی عبارت ۱۵ و ۱۶ در تابع سود تولیدکننده، تابع سود تولیدکننده تغییر می‌کند به:

$$\begin{aligned}\max_{w,A,t}\ \prod_m =& D_{0}(w-c)(\frac{e(w+d)}{e-1})^{-e}\\ &\times\left(\begin{array}{c}\alpha_{2} - \beta_{2}A^{-\delta}\\ \times\left(\frac{\gamma D_{0}\beta_{2}A^{-\delta}e^{-e}(\frac{w+d}{e-1})^{1-e}}{1-t}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}}\end{array}\right)\\ &- A - t\left(\frac{\gamma D_{0}\beta_{2}A^{-\delta}e^{-e}(\frac{w+d}{e-1})^{1-e}}{1-t}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\\ \text{s.t. }& 0 \leq A, \quad c \leq w \leq 1, \quad \text{and} \quad 0 \leq t \leq 1\end{aligned} \quad (\text{۱ب})$$

با ساده‌سازی رابطه‌ی ۱ب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\max_{w,A,t}\ \Pi_m =& -\left(A + D_{0}^{\frac{1}{\gamma+1}}A^{\frac{-\delta}{\gamma+1}}t(1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}}\right)\\ &\times(e-1)^{\frac{e-1}{\gamma+1}}e^{\frac{-e}{\gamma+1}}(w+d)^{\frac{1-e}{\gamma+1}}\beta_{2}^{\frac{1}{\gamma+1}}\gamma^{\frac{1}{\gamma+1}}\\ &-\left(D_{0}^{\frac{1}{\gamma+1}}A^{\frac{-\delta}{\gamma+1}}(1-t)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(e-1)^{\frac{e+\gamma}{\gamma+1}}e^{\frac{-e}{\gamma+1}}\right)\\ &\times(w+d)^{\frac{-(\gamma+e)}{\gamma+1}}(w-c)\beta_{2}^{\frac{1}{\gamma+1}}\gamma^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}}\\ &+\alpha_{2}D_{0}(e-1)^{e}e^{-e}(w+d)^{-e}(w-c)\end{aligned} \quad (\text{۲ب})$$

تابع سود تولیدکننده در رابطه‌ی ۲ب چنین بازنویسی می‌شود:

$$\max\ \Pi_m = -A + xA^{\frac{-\delta}{\gamma+1}}(1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}}t + yA^{\frac{-\delta}{\gamma+1}}(1-t)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} + z \quad (\text{۳ب})$$

که در آن x، y و z عبارت‌اند از:

$$x = -D_0^{\frac{1}{\gamma+1}} (e-1)^{\frac{e-1}{\gamma+1}} e^{\frac{-e}{\gamma+1}} (w+d)^{\frac{1-e}{\gamma+1}} \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{1}{\gamma+1}} \qquad (۴ب)$$

$$y = -D_0^{\frac{1}{\gamma 1}} (e-1)^{\frac{e+\gamma}{\gamma+1}} e^{\frac{-e}{\gamma+1}} (w+d)^{\frac{-(\gamma+e)}{\gamma+1}} \times (w-c) \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}} \qquad (۵ب)$$

$$z = \alpha_2 D_0 (e-1)^e e^{-e} (w+d)^{-e} (w-c) \qquad (۶ب)$$

برای تعیین مقدار بهینه‌ی t باید از Π_m در رابطه‌ی ۳ب، نسبت به t مشتق گرفت و مساوی صفر قرار داد که حاصل آن در ۷ب نشان داده شده است. حال به‌ازای هر $A > 0$ و $0 \leq t \leq 1$ داریم:

$$\frac{1}{\gamma+1} A^{\frac{-\delta}{\gamma+1}} (1-t)^{\frac{-(\gamma+2)}{\gamma+1}} \geq 0$$

بنابراین علامت مشتق:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \prod_m}{\partial t} &= \begin{pmatrix} (1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}} \\ +\frac{1}{\gamma+1}(1-t)^{\frac{-(\gamma+2)}{\gamma+1}} t \end{pmatrix} x A^{\frac{-\delta}{\gamma+1}} \\ &\quad - \frac{\gamma}{\gamma+1} (1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}} y A^{\frac{-\delta}{\gamma+1}} \\ &= \frac{1}{\gamma+1} A^{\frac{-\delta}{\gamma+1}} (1-t)^{\frac{-(\gamma+2)}{\gamma+1}} \\ &\quad \times (\gamma(1-t)(x-y) + x) = 0 \qquad (۷ب) \end{aligned}$$

با استفاده از $\gamma(1-t)(x-y) + x$ تعیین می‌شود، که یک تابع خطی از t است. درنتیجه $t = 1 + \frac{x}{\gamma(x-y)}$ و با استفاده از مقادیر x و y در معادله‌ی ۴ب و ۵ب مقدار بهینه‌ی t بر حسب w به دست خواهد آمد:

$$t = 1 + \frac{(w+d)}{\gamma(w+d) - (e-1)(w-c)} \qquad (۸ب)$$

با مشتق‌گیری از تابع سود تولیدکننده نسبت به t مقدار آن برابر:

$$t = 1 + \frac{(w+d)}{\gamma(w+d) - (e-1)(w-c)}$$

به دست آمده که مطابق مطالعات موجود،[۲۱] میزان بهینه‌ی t^* صفر است. همچنین برای تعیین مقدار بهینه‌ی A از Π_m در رابطه‌ی ۳ب، نسبت به A مشتق می‌گیریم و داریم:

$$\frac{\partial \prod_m}{\partial A} = -1 - \frac{\delta}{\gamma+1} A^{\frac{-(\delta+\gamma+1)}{\gamma+1}} (1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}} (xt+y) \qquad (۹ب)$$

با جایگذاری مقادیر x و y داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \prod_m}{\partial A} &= -1 + \frac{\delta}{\gamma+1} D_0^{\frac{1}{\gamma+1}} A^{\frac{-(\delta+\gamma+1)}{\gamma+1}} (1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}} \\ &\quad \times e^{\frac{-e}{\gamma+1}} \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{1}{\gamma+1}} \left((e-1)^{\frac{e-1}{\gamma+1}} (w+d)^{\frac{1-e}{\gamma+1}} \right) t \\ &\quad + \frac{\delta}{\gamma+1} D_0^{\frac{1}{\gamma+1}} A^{\frac{-(\delta+\gamma+1)}{\gamma+1}} (w-c)(1-t)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \\ &\quad \times e^{\frac{e\gamma}{\gamma+1}} \left(\frac{e(w+d)}{(e-1)} \right)^{-e} \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}} \\ &\quad \times \left((e-1)^{\frac{\gamma-e\gamma}{\gamma+1}} (w+d)^{\frac{e\gamma+\gamma}{\gamma+1}} \right) \qquad (۱۰ب) \end{aligned}$$

مشتق دوم Π_m نسبت به A عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \prod_m}{\partial A^2} &= -\frac{\delta(\delta+\gamma+1)}{(\gamma+1)^2} D_0^{\frac{1}{\gamma+1}} A^{\frac{-(\delta+2\gamma+2)}{\gamma+1}} e^{\frac{-e}{\gamma+1}} \\ &\quad \times \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{1}{\gamma+1}} (e-1)^{\frac{e-1}{\gamma+1}} (w+d)^{\frac{1-e}{\gamma+1}} (1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}} t \\ &\quad - \frac{\delta(\delta+\gamma+1)}{(\gamma+1)^2} D_0^{\frac{1}{\gamma+1}} A^{\frac{-(\delta+2\gamma+2)}{\gamma+1}} \\ &\quad \times (w-c) e^{\frac{e\gamma}{\gamma+1}} \left(\frac{e(w+d)}{(e-1)} \right)^{-e} \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}} \\ &\quad \times (e-1)^{\frac{\gamma-e\gamma}{\gamma+1}} (w+d)^{\frac{e\gamma+\gamma}{\gamma+1}} (1-t)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} < 0 \qquad (۱۱ب) \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که برای همه‌ی $w > c$ و $0 \leq t \leq 1$، رابطه‌ی $\frac{\partial^2 \prod_m}{\partial A^2} \leq 0$ برقرار است. بنابراین مقدار بهینه‌ی A از مشتق اول به دست می‌آید.

$$A^{\frac{(\delta+\gamma+1)}{\gamma+1}} = -\frac{\delta}{\gamma+1} (1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}} (xt + y(1-t)) \qquad (۱۲ب)$$

با جایگذاری مقادیر x و y در رابطه‌ی ۱۲ب داریم:

$$\begin{aligned} A^{\frac{(\delta+\gamma+1)}{\gamma+1}} &= \frac{\delta}{\gamma+1} D_0^{\frac{1}{\gamma+1}} (1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}} e^{\frac{-e}{\gamma+1}} \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{1}{\gamma+1}} \\ &\quad \times (e-1)^{\frac{e-1}{\gamma+1}} (w+d)^{\frac{1-e}{\gamma+1}} t \\ &\quad + \frac{\delta}{\gamma+1} D_0^{\frac{1}{\gamma+1}} (w-c) e^{\frac{e\gamma}{\gamma+1}} \left(\frac{e(w+d)}{(e-1)} \right)^{-e} \\ &\quad \times (1-t)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}} (e-1)^{\frac{\gamma-e\gamma}{\gamma+1}} (w+d)^{\frac{e\gamma-\gamma}{\gamma+1}} \\ &= \frac{\delta}{\gamma+1} D_0^{\frac{1}{\gamma+1}} (e-1)^{\frac{e-1}{\gamma+1}} e^{\frac{-e}{\gamma+1}} (1-t)^{\frac{-1}{\gamma+1}} \\ &\quad \times (w+d)^{\frac{-\gamma-e}{\gamma+1}} \beta_2^{\frac{1}{\gamma+1}} \gamma^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}} \\ &\quad \times (\gamma(w+d)t + (w-c)(1-t)(e-1)) \qquad (۱۳ب) \end{aligned}$$

بنابراین مقدار بهینه‌ی A عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} A &= \delta^{\frac{1+\gamma}{1+\gamma+\delta}} D_0^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} (e-1)^{\frac{e-1}{1+\gamma+\delta}} e^{\frac{-e}{1+\gamma+\delta}} \\ &\quad \times (1-t)^{\frac{-1}{1+\gamma+\delta}} (w+d)^{\frac{-\gamma-e}{1+\gamma+\delta}} \beta_2^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \\ &\quad \times \gamma^{\frac{-\gamma}{1+\gamma+\delta}} (\gamma+1)^{\frac{-(1+\gamma)}{1+\gamma+\delta}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \gamma(w+d)t \\ +(w-c)(1-t)(e-1) \end{pmatrix}^{\frac{1+\gamma}{1+\gamma+\delta}} \qquad (۱۴ب) \end{aligned}$$

برای به دست آوردن قیمت عمده‌فروشی w از تابع سود تولیدکننده نسبت به w مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \prod_m}{\partial w} =& \alpha_2 D_0 (\frac{e}{e-1})^{-e} \begin{bmatrix} -e(w+d)^{-e-1}(w-c) \\ +(w+d)^{-e}\end{bmatrix} \\ &- D_0(\frac{e}{e-1})^{-e} \begin{pmatrix} D_0^{-\gamma}\gamma^{-\gamma}\beta_2 A^{-\delta} e^{e\gamma} \\ \times(e-1)^{\gamma-e\gamma}(1-t)^{\gamma} \end{pmatrix}^{\frac{1}{\gamma+1}} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{-(\gamma+e)}{\gamma+1}(w+d)^{\frac{-(2\gamma+e+1)}{\gamma+1}}(w-c) \\ +(w+d)^{\frac{-(\gamma+e)}{\gamma+1}} \end{bmatrix} \\ &- t\left(\gamma D_0 \beta_2 A^{-\delta} e^{-e}(e-1)^{e-1}(1-t)^{-1}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \\ &\times \left[\frac{1-e}{\gamma+1}(w+d)^{\frac{-(e+\gamma)}{\gamma+1}}\right]\end{aligned} \tag{۱۵ب}$$

در حالت کلی مقادیر بهینه‌ی به‌دست آمده‌ی t و A را در مشتق تابع سود تولیدکننده نسبت به w، قرار می‌دهیم و از آنجا مقدار بهینه‌ی w را به‌دست می‌آوریم.

ج) اثبات قضیه‌ی ۳

با جایگزینی عبارت $t=0$، $w'=\frac{p'}{2}$ و $A=[\delta D_0\beta_2(w-c)(p')^{-e}a^{-\gamma}]^{\frac{1}{\delta+1}}$ در رابطه‌ی ۲۲، تابع هدف خرده‌فروش تغییر می‌کند به:

$$\begin{aligned}\underset{p,a}{\text{Max}}\ \ \Pi_r =& D_0(\frac{p'}{2})(p'+(c+d))^{-e} \\ &\times\left(\alpha_2-\beta_2 a^{-\gamma}\begin{pmatrix}\delta\beta_2(\frac{p'}{2})\times \\ (p'+(c+d))^{-e}a^{-\gamma}\end{pmatrix}^{\frac{-\delta}{\delta+1}}\right)-a \\ \text{s.t.}\ \ & a,p' \geq 0\end{aligned} \tag{۱ج}$$

برای حل این مسئله y را به‌صورت $y=\frac{p'}{2}(p'+(c+d))^{-e}$ تعریف می‌کنیم. برای تعیین دامنه‌ی y مشتق اول آن را نسبت به p' محاسبه، و با مقادیر حدی مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial p'} &= \frac{1}{2}(p'+(c+d))^{-e}-\frac{p'}{2}e(p'+(c+d))^{-e-1} \\ &= (p'+(c+d))^{-e}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{p'}{2}e(p'+(c+d))^{-1}\right)=0\end{aligned} \tag{۲ج}$$

از آنجا که همواره $(p'+(c+d))^{-e}>0$ است، پس رابطه‌ی:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{p'}{2}e(p'+(c+d))^{-1}\right)=0$$

برقرار است. بنابراین داریم:

$$p'=\frac{c+d}{e-1} \tag{۳ج}$$

دامنه‌ی y را با توجه به مقادیر مختلف p' تعیین می‌کنیم به‌نحوی که اگر $p'=0$ باشد، آنگاه $y=0$ بوده و اگر $p'=\frac{c+d}{e-1}$ باشد آنگاه $y=\frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}>0$ و $p'\to\infty \Rightarrow y=0$. پس بیشترین مقدار y در $p'=\frac{c+d}{e-1}$ به دست می‌آید و کم‌ترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین $0\leq y\leq \frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}$ است. درنتیجه مسئله‌ی خرده‌فروش را در رابطه‌ی ۱ج چنین بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\underset{p,a}{\text{Max}}\ \ \Pi_r = D_0 y\begin{pmatrix}\alpha_2 \\ -\beta_2 a^{-\gamma}(\delta\beta_2 y a^{-\gamma})^{\frac{-\delta}{\delta+1}}\end{pmatrix}-a \\ &\text{s.t.}\ \ 0\leq y\leq\frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e},\quad a\geq 0\end{aligned} \tag{۴ج}$$

$\prod_r$ یک تابع صعودی از y است، بنابراین مقدار بهینه‌ی y در $\frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}$ است.

$$y^{*}=y_{\max}=\frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e} \tag{۵ج}$$

برای به دست آوردن مقدار a، ابتدا مشتق جزئی دوم تابع سود خرده‌فروش را نسبت به a به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \prod_r}{\partial a^2} =& -(\frac{\gamma}{\delta+1})(\frac{\gamma+\delta+1}{\delta+1})D_0 y\beta_2^{\frac{1}{\delta+1}} \\ &\times(\delta y E[e^{x}])^{\frac{-\delta}{\delta+1}}a^{\frac{-\gamma}{\delta+1}-2}<0\end{aligned} \tag{۶ج}$$

بنابراین مقدار بهینه‌ی a از مشتق اول به دست خواهد آمد (رابطه‌ی ۷ج). با توجه به روابط $p'=p-(c+d)$ و $p'=\frac{c+d}{e-1}$ آنگاه:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \prod_r}{\partial a} &= \frac{\gamma}{\delta+1}D_0 y\beta_2^{\frac{1}{\delta+1}}(\delta D_0 y)^{\frac{-\delta}{\delta+1}}a^{\frac{-(\gamma+\delta+1)}{\delta+1}}-1=0 \\ &\Rightarrow a=\left(\gamma\frac{\beta_2^{\frac{1}{\delta+1}}\delta^{\frac{-\delta}{\delta+1}}}{\delta+1}\right)^{\frac{\delta+1}{\delta+\gamma+1}}(D_0 y)^{\frac{1}{\delta+\gamma+1}} \\ p^{SR} &= \frac{c+d}{e-1}+c+d \\ w^{SR} &= \frac{1}{2}(\frac{c+d}{e-1})+\frac{c+d}{2}\end{aligned} \tag{۷ج}$$

با توجه به روابط ۵ج و ۷ج داریم:

$$a^{SR}=\left(\gamma\frac{\beta_2^{\frac{1}{\delta+1}}\delta^{\frac{-\delta}{\delta+1}}}{\delta+1}\right)^{\frac{\delta+1}{\delta+\gamma+1}}\left(D_0\frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}\right)^{\frac{1}{\delta+\gamma+1}}$$

به‌همین ترتیب با جایگذاری، مقادیر بهینه‌ی t^{SR} و A^{SR} را از حل تعادل استکلبرگ ـ خرده‌فروش رهبر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}t^{SR} &= 0 \\ A^{SR} &= \left(\delta D_0\beta_2\frac{e^{-e}}{2}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}a^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{\delta+1}}\end{aligned}$$

د) اثبات قضیه‌ی ۴

برای حل این مسئله، z را مطابق ۱د تعریف، و دامنه‌ی آن را با توجه به مشتق اول و مقادیر حدی تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&z=(p-c-d)(p^{-e}) \\ &\text{s.t.}\ \ c+d\leq p\end{aligned} \tag{۱د}$$

مشتق اول ۱د نسبت به p چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial p} &= p^{-e} - ep^{-e-1}(p-c-d)\\ &= p^{-e}(1-ep^{-1}(p-c-d)) = 0\end{aligned} \qquad (د۲)$$

از آنجا که همواره $p^{-e} > 0$ است، پس رابطه‌ی $1 - ep^{-1}(p-c-d) = 0$ برقرار است. بنابراین مقدار $p = p_1$ برابر با $\frac{e(c+d)}{(e-1)}$ است. دامنه‌ی z را با توجه به مقادیر مختلف p تعیین می‌کنیم. اگر $p = c+d$، آنگاه $z = 0$ و اگر $p = p_1$ باشد، آنگاه $z = e^{-e}\left(\frac{c+d}{e-1}\right)^{1-e} > 0$ و نهایتاً $p \to \infty \Rightarrow z = 0$. پس بیشترین مقدار y در $p = p_1$ به دست می‌آید و کم‌ترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین $0 \leq z \leq e^{-e}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}$ است و درنتیجه رابطه‌ی ۲۸ را به‌صورت ۳د بازنویسی می‌کنیم:

$$\underset{p,a,A}{\text{Max}} \quad \prod_{sc} = D_0 z(\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma} A^{-\delta}) - a - A$$

$$\text{s.t.} \quad 0 \leq z \leq e^{-e}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e} \quad \text{and} \quad a, A \geq 0 \qquad (د۳)$$

$\prod_{sc}$ نسبت به z یک تابع صعودی است، چون مشتق جزئی $\prod_{sc}$ نسبت به z یک مقدار مثبت است:

$$\frac{\partial \prod_{sc}}{\partial z} = D_0(\alpha_2 - \beta_2 a^{-\gamma} A^{-\delta}) > 0$$

بنابراین مقدار بهینه z عبارت است از:

$$z^* = z_{\max} = e^{-e}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e} \qquad (د۴)$$

برای به دست آوردن مقادیر a و A ابتدا مشتقات جزئی دوم تابع هدف در معادله‌ی ۳د را نسبت به a و A به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \prod_{sc}}{\partial a} &= \gamma D_0 \beta_2 a^{-\gamma-1} A^{-\delta} z - 1\\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Pi_{sc}}{\partial a^2} = \frac{-\gamma(\gamma+1) D_0 \beta_2 z}{a^{\gamma+2} A^{\delta}} < 0\end{aligned} \qquad (د۵)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \prod_{sc}}{\partial A} &= \delta D_0 \beta_2 A^{-\delta-1} a^{-\gamma} z - 1\\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Pi_{sc}}{\partial A^2} = \frac{-\delta(\delta+1) D_0 \beta_2 z}{a^{\gamma} A^{\delta+2}} < 0\end{aligned} \qquad (د۶)$$

از آنجا که مشتق دوم آنها منفی است، مقادیر بهینه‌ی a و A از مشتق اول به دست می‌آید.

$$a = \left(\gamma D_0 \beta_2 A^{-\delta} z\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \qquad (د۷)$$

$$A = \left(\delta D_0 \beta_2 a^{-\gamma} z\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \qquad (د۸)$$

بنابراین با توجه به معادلات به دست آمده مقدار بهینه‌ی p در بازی همکاری به‌صورت $p^{co} = \frac{e(c+d)}{(e-1)}$ است. از روابط ۷د و ۸د رابطه‌ی $A^{co} = \frac{\delta}{\gamma} a^{co}$ به دست خواهد آمد. در نتیجه a^{co} عبارت خواهد بود از:

$$a^{co} = \left(\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\delta} D_0 \beta_2 e^{-e}(\frac{c+d}{e-1})^{1-e}\right)^{\frac{1}{\delta+\gamma+1}} \qquad (د۹)$$