مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۱-۳۳، شماره‌ی ۲/۱، ص. ۹۹-۱۰۵

Original Article

تعیین سطح بهینه‌ی ارتقاء، دوره‌ی وارانتی و حاشیه‌های سود محصولات دست دوم از دید مشتری و ارائه‌کننده با استفاده از رویکرد نظریه‌ی بازی‌ها

عصمت بغدادی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
کاظم نقندریان* (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران
مجید حیدری (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و صنایع، دانشگاه زنجان

در این مقاله، ارائه مدلی براساس نظریه بازی‌ها برای مشتری و ارائه‌کننده‌ی محصول دست دوم با فرض وارانتی تک بعدی ارائه می‌شود. از آنجا که مشتری محصول دست دوم از عملکرد قبلی محصول بی‌اطلاع است، ارائه‌کننده، وارانتی و ارتقاء را پیشنهاد می‌کند. اما این فعالیت‌ها ممکن است باعث افزایش قیمت محصول بیشتر از قیمت مورد انتظار مشتری و درنهایت صرف نظر کردن مشتری از خرید شود. در چنین شرایطی لازم است که ارائه‌کننده علاوه بر سود خود هزینه های مورد انتظار مشتری را نیز در نظر بگیرد. در این مقاله برای مدلسازی کردن تعارض منافع بین مشتری و ارائه‌کننده، مسأله براساس تعادل استکلبرگ نظریه بازی ها مدل می شود به طوریکه که مشتری نقش پیشرو و ارائه کننده نقش پیرو را دارد. سپس با استفاده از شرایط کروش کان تاکر مدل تک هدفه می‌شود و در نهایت مثال عددی و تحلیل حساسیت‌های صورت گرفته بیان می‌شود.

واژگان کلیدی: محصول دست دوم، وارانتی، ارتقاء، نظریه‌ی بازی‌ها، فرایند پواسون ناهمگن.

e_baghdadi@ind.iust.ac.ir
noghondarian@iust.ac.ir
mheydari@znu.ac.ir

۱. مقدمه

امروزه بازار خرید و فروش را می‌توان به دو بخش خرید و فروش محصولات نو و دست دوم تقسیم کرد. ازیک‌سو پیشرفت تکنولوژی که خود عاملی برای افزایش عمر محصولات است از یک سو، و پایین بودن قدرت خرید برخی خریداران از سوی دیگر باعث شده است تا ضمن گسترش روند رو به رشد بازار محصولات دست دوم، تصمیم‌گیری در چنین محیطی پیچیده‌تر شود. در سال ۲۰۰۰، مورتی و چاتوپادهیای برای اولین بار وارانتی محصولات دست دوم را مدل کردند[۱] و به تجزیه و تحلیل هزینه‌های وارانتی برای محصولات دست دوم پرداختند. آنها هزینه‌ی وارانتی برای محصولات دست دوم را مرتبط با عمر قبلی، میزان کارکرد، سوابق نگه‌داری و تعمیرات می‌دانند. آنها همچنین در سال ۲۰۰۴ در مقاله‌یی دیگر[۲] به بررسی استراتژی‌های بهبود قابلیت اطمینان محصولات دست دوم تحت وارانتی با سیاست تعمیر/جای‌گزینی رایگان پرداختند. در سال ۲۰۰۹، سعیدی مهرآباد و همکاران[۳] راه‌های مؤثر بهبود قابلیت اطمینان محصولات دست دومی را که با وارانتی فروخته می‌شود، مدل و تحلیل کردند. اما جلالی نائینی و شفیعی[۴] در سال ۲۰۱۰ یکی از مهم‌ترین بررسی‌ها در رابطه با محصولات دست دوم را انجام دادند؛ آنها با هدف بیشینه‌سازی سود مورد انتظار ارائه‌کننده، قیمت و استراتژی‌های ارتقاء بهینه را استخراج کردند. تابع هدف ارائه‌کننده شامل تابع تقاضا و تابع سود هر واحد محصول است. در سال ۲۰۱۲، شهانقی و همکاران[۵] به مدل‌سازی شکست‌های محصول و استراتژی‌های تعمیرات پیشگیرانه‌ی بهینه در طول قراردادهای وارانتی تمدیدشده دوبعدی پرداختند؛ سیاست وارانتی نیز در این مدل‌سازی سیاست تعمیر یا جای‌گزینی رایگان است. در سال ۲۰۱۲ شفیعی و چوکووا[۶] استراتژی‌های ارتقاء بهینه، سیاست وارانتی و قیمت فروش برای محصولات دست دوم را بیان کردند. در سال ۲۰۱۳ نیز استراتژی‌های کیفیت برای محصولات دست دوم تحت وارانتی بررسی شد.[۷] سپس در سال ۲۰۱۴ شفیعی و همکاران[۸] مدل بهینه‌یی برای طول دوره‌ی وارانتی و آب‌بندی[1] بهینه توسعه می‌دهند تا بتوانند هزینه‌ی سرویس‌دهی کل محصول را کاهش دهند. آنها نارضایتی مشتری از شکست محصول در دوره پساوارانتی[2] را با در نظرگرفتن جریمه‌یی برای تولیدکننده مدل کردند. شفیعی و همکاران نیز در سال

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۴/۲، اصلاحیه ۱۳۹۴/۹/۱۰، پذیرش ۱۳۹۴/۱۰/۱۵.

۲۰۱۳ زمان آب‌بندی بهینه، درجه تعمیرات پیشگیرانه، بازه این تعمیرات و هزینه‌ی آن را که وابسته به زمان است، برای محصول تعیین کردند.[۹] برای محصولات دست دوم تاکنون پژوهشی با نظریه‌ی بازی‌ها بین مشتری و ارائه‌کننده صورت نگرفته است، اما از مهم‌ترین مقالات نظریه‌ی بازی‌ها در رابطه با وارانتی تمدیدشده، مقاله جک و مورتی[۱۰] در سال ۲۰۰۷ است که طبق آن مدل استکلبرگ نظریه‌ی بازی‌ها برای وارانتی تمدیدشده انعطاف‌پذیر و استراتژی‌های بهینه‌ی مرتبط با آن مطرح می‌شود. تولیدکننده در مدل نقش پیشرو را دارد و متغیرهای تصمیم آن سود مرتبط با هر تعمیر در دوره‌ی وارانتی تمدیدشده و سود مرتبط با هر تعمیر در خارج از دوره‌ی وارانتی تمدیدشده است. مشتری نقش پیرو مدل را دارد و متغیرهای تصمیم آن زمان شروع دوره‌ی وارانتی تمدید شده و مدت دوره‌ی وارانتی تمدیدشده است.

معمولاً ارائه‌کننده بدون توجه به هزینه‌ی مورد انتظاری که مشتری برای محصول دست دوم و سایر مخارج آن در نظر می‌گیرد، دوره‌ی وارانتی و سطح ارتقاء را تعیین و نهایتاً محصول دست دوم را قیمت‌گذاری می‌کند که همین امر باعث از دست دادن برخی از مشتریان می‌شود. در صورتی که اگر ارائه‌کننده به غیر از سود محصول دست دوم، به هزینه‌های مورد انتظار مشتری نیز توجه کند، می‌تواند تقاضا برای این محصول و در نتیجه سود خود را افزایش دهد. ولی چون اغلب سود ارائه‌کننده با هزینه‌های مشتری در تضاد و تعارض است، فروش محصول دست دوم باید به نحوی باشد که بتوان این تعارض‌ها را سامان‌دهی و مدیریت کرد. اینجاست که می‌توان از نظریه‌ی بازی‌ها برای مدیریت و حل این تعارض استفاده کرد، به‌طوری که در آن مشتری به‌عنوان پیشرو تعادل استکلبرگ با متغیرهای تصمیم دوره‌ی وارانتی و سطح ارتقاء و همچنین ارائه‌کننده به‌عنوان پیرو تعادل استکلبرگ با متغیرهای تصمیم حاشیه‌های سود مربوط به سطح ارتقاء، دوره‌ی وارانتی و دوره‌ی پساوارانتی در نظر گرفته می‌شود.

۲. مفروضات مدل و علائم اختصاری

الف) مفروضات مدل

- قیمت فروش بستگی به فعالیت‌های ارتقاء، طول دوره‌ی وارانتی و سن گذشته محصول دست دوم دارد.
- تابع تقاضای مشتری تابعی از قیمت مورد انتظار فروش محصول دست دوم و قیمت مورد انتظار تعمیرات در خارج از دوره‌ی وارانتی است.
- شکست‌ها مستقل از یکدیگرند.
- همه‌ی شکست‌ها در پیشینه‌ی محصول با تعمیر جزئی[۳] اصلاح می‌شود، بنابراین فعالیت‌های اصلاحی اثر ناچیزی روی نرخ شکست محصول داشته‌اند.
- محصول دست دوم قبل از فروش تحت فعالیت‌های ارتقاء قرار می‌گیرد تا قابلیت اطمینان آن بهبود یابد.
- سیاست وارانتی استفاده شده توسط ارائه‌کننده، سیاست تعمیر رایگان[۴] است.
- فرایند شکست محصول دست دوم فرایند پواسون ناهمگن است.
- وارانتی محصول یک‌بعدی است.
- اثر فعالیت‌های ارتقاء محصول دست دوم با استفاده از فاکتور بهبود مدل می‌شود.

ب) علائم اختصاری

x: سن گذشته‌ی محصول دست دوم؛

$\overline{c_r}$: هزینه‌ی مورد انتظار هر بار تعمیر (با فرض جزئی بودن تعمیر) برای ارائه‌کننده در دوره وارانتی و پساوارانتی؛

w: متغیر تصمیم مشتری: طول دوره‌ی وارانتی $0 \leq w \leq L - x$؛

u: متغیر تصمیم مشتری: سطح ارتقاء $0 \leq u \leq x$؛

$\delta_{u,w}$: متغیر تصمیم ارائه‌کننده: حاشیه‌ی سود ارائه‌کننده به‌سبب ارتقاء و دوره‌ی وارانتی محصول دست دوم $\delta_{u,w} \geq 0$؛

δ_{pw}: متغیر تصمیم ارائه‌کننده: حاشیه‌ی سود ارائه‌کننده بابت تعمیر محصول دست دوم در دوره پساوارانتی $\delta_{pw} \geq 0$؛

T: متغیر تصادفی زمان تا مشاهده‌ی اولین شکست محصول؛

$f(t,u)$: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی T تحت ارتقاء مشخص u؛

$F(t,u)$: تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی T تحت ارتقاء مشخص u؛

$r(t,u)$: تابع نرخ شکست متغیر تصادفی T تحت ارتقاء مشخص u؛

c_p: هزینه‌ی خرید محصول از مصرف‌کننده[۵]؛

$c_u(u)$: هزینه‌ی ارتقاء برای محصولی با ارتقاء مشخص u؛

$c_w(u,w)$: هزینه‌ی وارانتی برای محصولی که ارتقایی با سطح u داشته و طول دوره‌ی وارانتی آن w است؛

$c_{pw}(u,w)$: هزینه‌ی تعمیر محصول در دوره‌ی پساوارانتی.

۳. مدل‌سازی مسئله

۱.۳. تابع هزینه‌ی مشتری

تابع هدف مشتری، عبارت است از کمینه‌سازی قیمت تمام شده مورد انتظار استفاده از محصول دست دوم. فرض بر این است که مشتری با انتخاب سطح ارتقاء u و طول دوره‌ی وارانتی w برای محصول دست دوم با سن x، به دنبال کمینه‌سازی هزینه‌ی استفاده از محصول تا پایان دوره‌ی عمر مفید آن است. لذا متغیرهای تصمیم مشتری سطح ارتقاء و طول دوره‌ی وارانتی خواهد بود. قیمت تمام‌شده‌ی مورد انتظار استفاده از محصول دست دوم در طول زمان تملک محصول ــ یعنی بازه زمانی $[x, L]$ ــ از جمع هزینه‌های قیمت خرید محصول دست دوم، قیمت تمام شده‌ی مورد انتظار سطح ارتقاء و دوره‌ی وارانتی محصول دست دوم که در بازه زمانی $[x, x+w]$ قرار می‌گیرد، و قیمت تمام شده‌ی استفاده از محصول در دوره پساوارانتی یعنی بازه زمانی $[x+w, L]$ به دست می‌آید:

$$E\left[C_{customer}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right] = c_p + E\left[p_{u,w}(u,w,\delta_{u,w})\right] + E\left[p_{pw}(u,w,\delta_{pw})\right] \quad (1)$$

الف) قیمت خرید محصول دست دوم

هزینه‌ی خرید محصول توسط ارائه‌کننده از مصرف‌کننده‌ی قبلی با c_p نمایش داده می‌شود که یک تابع خطیِ نزولی نسبت به x است:

$$c_p = \begin{cases} p_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) & \text{if } 0 < x < L \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

و در آن L عمر مفید محصول و p_0 قیمت خرید محصول جدید است. عمر محصول را در بازار، عمر مفید می‌نامند که بر اساس تکنولوژی و دلایل تجاری تخمین زده می‌شود.

ب) قیمت تمام شده‌ی مورد انتظار وارانتی محصول دست دوم برای مشتری با سطح ارتقاء مشخص

$$E\left[p_{u,w}(u,w,\delta_{u,w})\right]=(1+\delta_{u,w})(c_u(u)+E\left[c_w(u,w)\right]) \quad (3)$$

این هزینه‌ها عبارت‌اند از:

- هزینه‌ی عملیات ارتقاء برای ارائه‌کننده‌ی خدمات: با $c_u(u)$ نمایش داده می‌شود که تابع تصمیمی از متغیر تصمیم سطح ارتقاء است:

$$c_u(u)=c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi} \quad (4)$$

و در آن $c_s,c_u,\psi,\xi>0$ است و معمولاً با استفاده از داده‌های عملکرد محصول تخمین زده می‌شوند.

- هزینه‌ی مورد انتظار تعمیرات در طول دوره‌ی وارانتی برای ارائه‌کننده خدمات:

$$E\left[c_w(u,w)\right]=\overline{c_r}E\left[N_w(u,w)\right] \quad (5)$$

با فرض این که γ به‌عنوان عامل بهبود یا اثر فعالیت ارتقاء متغیری تصادفی با توزیع بتا $B(\gamma)$ باشد، به دست می‌آید:

$$E\left[N_w(u,w)\right]=\int_0^1\int_x^{x+w} r(t-\gamma u)B(\gamma)dtd\gamma \quad (6)$$

با جای‌گذاری فرمول‌های ۴ تا ۶ در رابطه‌ی ۳ داریم:

$$E\left[p_{u,w}(u,w,\delta_{u,w})\right]=(1+\delta_{u,w})(c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi}+\overline{c_r}\int_0^1\int_x^{x+w} r(t-\gamma u)B(\gamma)dtd\gamma) \quad (7)$$

بنابراین با توجه به فرمول‌های ۲ و ۷ قیمت تمام شده مورد انتظار محصول دست دوم برای مشتری عبارت است از:

$$E\left[\Pr ic(u,w,\delta_{u,w})\right]=c_p+E\left[p_{u,w}(u,w,\delta_{u,w})\right] \quad (8)$$

ج) قیمت تمام شده استفاده از محصول در دوره پساوارانتی

$$p_{pw}(u,w,\delta_{u,w})=c_{pw}(u,w)+\delta_{pw}c_{pw}(u,w)=(1+\delta_{pw})c_{pw}(u,w) \quad (9)$$

این هزینه چنین تعریف می‌شود:

- هزینه‌ی تعمیرات پساوارانتی محصول دست دوم برای تعمیرکننده برابر:

$$E\left[c_{pw}(u,w)\right]=\overline{c_r}E\left[N_{pw}(u,w)\right] \quad (10)$$

به‌طور مشابه، و با فرض این که γ به‌عنوان فاکتور بهبود یا اثر فعالیت ارتقاء متغیری تصادفی با توزیع بتا $B(\gamma)$ باشد، تعداد شکست‌ها در دوره‌ی پساوارانتی عبارت خواهد بود از:

$$E\left[N_{pw}(u,w)\right]=\int_0^1\int_{x+w}^{L} r(t-\gamma u)B(\gamma)dtd\gamma \quad (11)$$

با جای‌گذاری فرمول‌های ۱۰ و۱۱ در رابطه‌ی ۹ خواهیم داشت:

$$E\left[p_{pw}(u,w,\delta_{pw})\right]=(1+\delta_{pw})\overline{c_r}\int_0^1\int_{x+w}^{L} r(t-\gamma u)B(\gamma)dtd\gamma \quad (12)$$

۲.۳. معرفی و توضیح توابع هزینه و سود ارائه کننده

الف) هزینه‌های ارائه‌کننده

- هزینه‌ی خرید محصول c_p؛
- هزینه‌ی تعمیر محصول در طول دوره‌ی وارانتی محصول دست دوم با ارتقاء مشخص $c_w(u,w)$؛
- هزینه‌ی تعمیر پس از انقضای وارانتی محصول دست دوم $c_{pw}(u,w)$.

ب) سود مورد انتظار ارائه‌کننده محصول دست دوم

متغیرهای تصمیم ارائه‌کننده: حاشیه سود هزینه‌ی انجام شده در دوره‌ی وارانتی $(\delta_{u,w})$ و حاشیه سود هزینه‌ی انجام شده در دوره پساوارانتی (δ_{pw}) است. لذا سود مورد انتظار ارائه‌کننده:

$$E\left[\Pr ofit_{dealer}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right]=(\delta_{u,w}[c_u(u)+E[c_w(u,w)]]+\delta_{pw}E[c_{pw}(u,w)])\times d(E\left[\Pr ice(u,w,\delta_{u,w})\right],E\left[p_{pw}(u,w,\delta_{pw})\right]) \quad (13)$$

در فرمول فوق تابع تقاضا تابعی از قیمت محصول دست دوم و قیمت تمام شده تعمیرات خارج از دوره‌ی وارانتی برای مشتری است. اما با توجه به این که قیمت محصول به عمر محصول، قیمت سطح ارتقاء و دوره‌ی وارانتی وابسته است لذا در فرمول تقاضا به‌عنوان متغیرهای تأثیرگذار آمده است. بنابراین مدل تقاضا عبارت است از:

$$d(E\left[\Pr ic(u,w,\delta_{u,w})\right],E\left[p_{pw}(u,w,\delta_{pw})\right]=k_1\left(E\left[\Pr ice(u,w,\delta_{u,w})\right]\right)^{-\omega}\times\left(E\left[p_{pw}(u,w,\delta_{pw})\right]+k_2\right)^{-\upsilon} \quad (14)$$

پارامترهای $\omega,\upsilon>0$ توان قیمت محصول و قیمت پساوارانتی در تابع تقاضا است، دلیل منفی بودن آن‌ها در تابع تقاضا این است که با افزایش این قیمت‌ها تقاضا برای محصول دست دوم کاهش می‌یابد. مدل تابع تقاضای بیان شده تقریباً مبتنی بر مدل‌های تقاضای شفیعی و جلالی[۲] و همچنین مورتی و کومار[۱۱] است.

۳.۳. مدل ریاضی بهینه‌ی نهایی

در محیطی واقعی و برای خرید محصول دست دوم از یک ارائه‌کننده، می‌توان انتظار داشت ابتدا مشتری سطح ارتقاء و طول دوره‌ی وارانتی خود را به‌گونه‌یی انتخاب نماید که قیمت تمام شده خرید و استفاده از محصول دست دوم تا پایان عمر مفید آن را کمینه کند. در ادامه‌ی این تصمیم مشتری، ارائه کننده‌ی محصول دست دوم، حاشیه‌های سود مربوط به هزینه‌های ارتقاء، وارانتی و پساوارانتی را طوری انتخاب می‌کند که سود مورد انتظار وی با در نظرگرفتن میزان تقاضای خرید محصول دست دوم بیشینه شود. با در نظرگرفتن چنین شرایطی، از آنجا که تصمیمات اتخاذ شده توسط مشتری و ارائه‌کننده بر هم اثرگذار است و تصمیم‌گیری در محیطی متعارض صورت می‌گیرد، لذا از مدل تصمیم‌گیری استکلبرگ برای مدل‌سازی آن استفاده می‌شود.

برای این کار، مشتری به‌عنوان تصمیم‌گیرنده یعنی پیشرو و ارائه کننده نیز به‌صورت

پیرو در نظرگرفته شده و فرمول نهایی مدل ریاضی به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&\text{Leader}: \ \min E\left[C_{customer}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right]\\
&\text{Follower}: \ \max E\left[\Pr ofit_{dealer}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right]\\
&\text{Constraints}: \ \text{s.t} \ \ \delta_{u,w}\geq 0\\
&\qquad\qquad\quad \delta_{pw}\geq 0\\
&\qquad\qquad\quad 0\leq u\leq x\\
&\qquad\qquad\quad 0\leq w\leq L-x
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

۴.۳. حالت خاص

با فرض این‌که زمان تا مشاهده‌ی اولین شکست از توزیع وایبول $\text{Weibull}(\alpha,\beta)$ تبعیت کند، توابع شکست عبارت خواهد شد:

$$\begin{aligned}
f(t,u)&=\frac{\beta}{\alpha^{\beta}}(t-\gamma u)^{\beta-1}e^{-\frac{(t-\gamma u)}{\beta}}\\
r(t,u)&=\frac{\beta}{\alpha^{\beta}}(t-\gamma u)^{\beta-1}
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

هزینه‌ی مورد انتظار تعمیرات در دوره‌ی وارانتی برای ارائه‌کننده خدمات در بازه $[x,x+w]$ برای حالت خاص برابر:

$$\begin{aligned}
E\left[N_w(u,w)\right]&=\int_0^1\int_x^{x+w}\frac{\beta}{\alpha^{\beta}}(t-\gamma u)^{\beta-1}B(\gamma)dtd\gamma\\
E\left[N_w(u,w)\right]&=\int_0^1\frac{1}{\alpha^{\beta}}((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\\
E\left[c_w(u,w)\right]&=\overline{c_r}\int_0^1\frac{1}{\alpha^{\beta}}((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

قیمت تمام شده مورد انتظار وارانتی دست دوم برای مشتری $[x,x+w]$ برای حالت خاص برابر:

$$\begin{aligned}
E\left[p_{u,w}(u,w,\delta_{u,w})\right]&=(1+\delta_{u,w})(c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi}\\
&+\frac{\overline{c_r}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

هزینه‌ی تعمیرات پساوارانتی محصول دست دوم برای تعمیرکننده در بازه $[x+w,L]$ برای حالت خاص برابر:

$$E\left[c_{pw}(u,w)\right]=\overline{c_r}\int_0^1\frac{1}{\alpha^{\beta}}((L-\gamma u)^{\beta}-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma \tag{۱۹}$$

قیمت تمام شده استفاده از محصول در دوره پساوارانتی $[x+w,L]$ برای حالت خاص برابر:

$$\begin{aligned}
E\left[p_{pw}(u,w,\delta_{pw})\right]&=\frac{\overline{c_r}(1+\delta_{pw})}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((L-\gamma u)^{\beta}\\
&-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

قیمت تمام شده مورد انتظار استفاده از محصول دست دوم برای مشتری برای حالت خاص برابر:

$$\begin{aligned}
E\left[C_{custome r}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right]&=p_0(1-\frac{x}{L})+(1+\delta_{u,w})(c_s\\
&+c_u u^{\psi}x^{\xi}+\frac{\overline{c_r}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\\
&+\frac{\overline{c}_r(1+\delta_{pw})}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((L-\gamma u)^{\beta}-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

فرمول تابع تقاضای خرید محصول دست دوم برای حالت خاص برابر:

$$\begin{aligned}
&d(E\left[\Pr ic(u,w,\delta_{u,w})\right],E\left[p_{pw}(u,w,\delta_{pw})\right]=\\
&\quad k_1\left(\begin{array}{l}p_0(1-\frac{x}{L})+\\(1+\delta_{u,w})(c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi}+\\\frac{\overline{c_r}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\end{array}\right)^{-\omega}\\
&\quad\times\left(\frac{\overline{c_r}(1+\delta_{pw})}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((L-\gamma u)^{\beta}-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\right)^{-v}
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

تابع هدف سود ارائه‌کننده‌ی محصول دست دوم برای حالت خاص عبارت است از:

$$\begin{aligned}
E\left[\Pr ofit_{dealer}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right]&=(\delta_{u,w}[c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi}\\
&+\frac{\overline{c_r}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma]\\
&+\frac{\overline{c_r}\delta_{pw}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((L-\gamma u)^{\beta}-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\\
&\times k_1\left(\begin{array}{l}p_0(1-\frac{x}{L})+\\(1+\delta_{u,w})(c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi}+\\\frac{\overline{c_r}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\end{array}\right)^{-\omega}\\
&\times\left(\frac{\overline{c_r}(1+\delta_{pw})}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((L-\gamma u)^{\beta}-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\right)^{-v}
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

مدل ریاضی بهینه‌ی نهایی برای حالت خاص برابر:

$$\begin{aligned}
&\text{Leader}: \ \min p_0(1-\frac{x}{L})+(1+\delta_{u,w})(c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi}\\
&\quad+\frac{\overline{c_r}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\\
&\quad+\frac{\overline{c_r}(1+\delta_{pw})}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((L-\gamma u)^{\beta}-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\\
&\text{Follower}: \ \max \delta_{u,w}[c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi}\\
&\quad+\frac{\overline{c_r}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma]\\
&\quad+\frac{\overline{c_r}\delta_{pw}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((L-\gamma u)^{\beta}-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\\
&\quad\times k_1\left(\begin{array}{l}p_0(1-\frac{x}{L})+\\(1+\delta_{u,w})(c_s+c_u u^{\psi}x^{\xi}+\\\frac{\overline{c_r}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1((x+w-\gamma u)^{\beta}-(x-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\end{array}\right)^{-\omega}
\end{aligned}$$

$$\times\left(\frac{\overline{c_r}(1+\delta_{pw})}{\alpha^{\beta}}\int_{0}^{1}((L-\gamma u)^{\beta}-(x+w-\gamma u)^{\beta})B(\gamma)d\gamma\right)^{-v}$$

$$\text{Constraints}: \text{s.t}\quad \delta_{u,w}\geq 0$$
$$\delta_{pw}\geq 0$$
$$0\leq u\leq x$$
$$0\leq w\leq L-x \qquad (24)$$

۴. روش حل

ابتدا مدل تصمیم‌گیری استکلبرگ با استفاده از روشی که هو[۶] و همکاران[۱۲] در سال ۲۰۰۷ برای حل مسائل بهینه‌سازی دوسطحی بیان کردند، به یک مدل تک‌هدفه تبدیل می‌شود. در این روش، شرایط کروش ـ کان ـ تاکر تابع هدف پیرو به‌عنوان محدودیت‌های تابع هدف پیشرو در نظرگرفته می‌شود.

$$\text{Leader}: \min\quad E\left[C_{customer}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right]$$
$$\text{Constraints}: \text{s.t}\quad \frac{\partial E\left[Profit_{dealer}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right]}{\partial\delta_{u,w}}=\lambda_1$$
$$\frac{\partial E\left[Profit_{dealer}(u,w,\delta_{u,w},\delta_{pw})\right]}{\partial\delta_{pw}}=\lambda_2$$
$$-\lambda_1\delta_{u,w}=0$$
$$-\lambda_2\delta_{pw}=0$$
$$-\delta_{u,w}\leq 0$$
$$-\delta_{pw}\leq 0$$
$$-u\leq 0$$
$$-w\leq 0$$
$$w+x-L\leq 0$$
$$u-x\leq 0 \qquad (25)$$

۵. استراتژی مناسب

برای حل مدل، فرض می‌شود که زمان تا مشاهده اولین شکست از توزیع وایبول و اثر فعالیت‌های ارتقاء از توزیع بتا پیروی کند، با استفاده از مقادیر پارامترهای داده شده مدل حل و تحلیل حساسیت‌های لازم انجام می‌شود (جدول ۱).

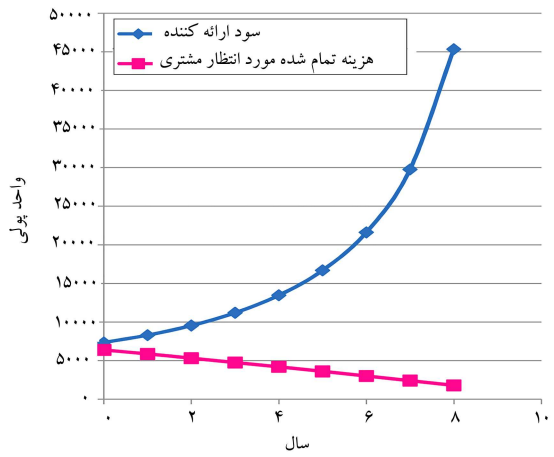
برای محاسبه‌ی مشتقات و حل مسائل بهینه‌سازی از نرم افزار Maple، استفاده شده است.

۶. تحلیل حساسیت مدل

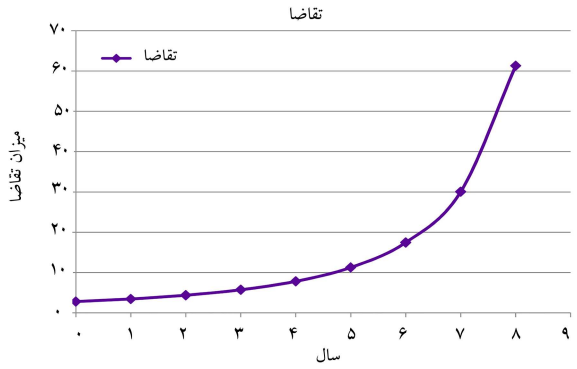
به دلیل پیچیده بودن مدل، محدب بودن مسئله با استفاده از ماتریس هشین بررسی نشد. اگر مسئله محدب باشد جواب‌های به دست آمده سراسری است در غیر این صورت سراسری نیست. مدل با استفاده از نرم‌افزار بیان شده حل و برای سن‌های مختلف تحلیل شد، رفتارهای مربوط به هزینه‌ی تمام شده مورد انتظار محصول دست دوم برای مشتری، تقاضای مشتری برای محصول دست دوم و سود ارائه‌کننده این محصول عبارت است از:

جدول ۱. مقادیر پارامترهای مدل.

هزینه‌ی راه‌اندازی فعالیت‌های ارتقاء برای هر محصول	$c_s=10$
هزینه‌ی ارتقاء مورد انتظار در واحد زمان	$c_u=50$
پارامترهای هزینه‌ی فعالیت‌های ارتقاء	$\psi=0/35, \xi=0/45$
پارامترهای توزیع خرابی محصول	$\frac{1}{\alpha}=0/354, \beta=2$
طول عمر محصول	$L=10$
قیمت محصول نو	$p_0=2500$
هزینه‌ی مورد انتظار هربار تعمیر	$\overline{c_r}=100$
سیاست وارانتی	FRW
پارامترهای توزیع بتا اثر فعالیت‌های ارتقاء	$\varepsilon=2, \zeta=3$



شکل ۱. تأثیر تغییر سن گذشته محصول دست دوم بر توابع تصمیم مشتری و ارائه‌کننده.



شکل ۲. تأثیر تغییر سن گذشته محصول دست دوم بر تقاضای این محصول.

در تشریح منحنی‌های هزینه و سود ارائه شده در شکل ۱ نیز لازم به توضیح است که در این شکل، منحنی مربوط به تابع هزینه، هزینه‌ی تمام شده تملک تنها یک محصول دست دوم به ازای مقادیر سن گذشته آن رسم شده است، این در حالی است که منحنی مربوط به تابع سود ارائه‌کننده، مربوط به سودی است که در قبال فروش بیش از یک محصول و متناسب با میزان تقاضای خرید محصول دست دوم، عاید ارائه‌کننده این محصولات می‌شود. که نمودار تقاضای این محصولات نیز براساس شکل ۲ است، لذا می‌توان انتظار داشت که میزان هزینه‌ی تمام شده‌ی یک محصول در مقایسه با میزان سود ارائه‌کننده به‌ازای فروش تعداد قابل توجهی محصول دست دوم بسیار کم‌تر باشد.

در تفسیر این موضوع نیز باید گفت: با آنالیز حساسیت روی سن گذشته محصول دست دوم و با توجه به نمودارهای شکل ۱ و شکل ۲ می‌توان مشاهده کرد که هرچه سن گذشته محصول دست دوم افزایش یابد، هزینه‌ی کل مورد انتظار مشتری کاهش می‌یابد و به دنبال کاهش یافتن این هزینه، تقاضا برای این محصول به‌صورت نمایی افزایش می‌یابد، و در نتیجه تعداد فروش و سود ارائه‌کننده رشد قابل توجهی خواهد داشت. چنان که در مثال عددی مشاهده می‌شود، برای تفسیر نتایج از منظر مشتری باید گفت: به‌ازای محصولات دست دوم با سن‌های گذشته متفاوت، در صورتی که آهنگ افزایش هزینه‌ی ارتقاء نسبت به آهنگ کاهش قیمت خرید محصول از مصرف‌کننده قبلی به‌ازای افزایش سن گذشته‌ی محصول کم‌تر باشد، با افزایش عمر گذشته‌ی محصول دست دوم، قیمت خرید محصول طبق رابطه‌ی ۲ از مصرف‌کننده‌ی قبلی کاهش، هزینه‌ی عملیات ارتقاء مطابق با رابطه‌ی ۴ افزایش می‌یابد که این میزان افزایش هزینه‌ی ارتقاء کم‌تر از میزان کاهش هزینه‌ی قیمت خرید از مصرف‌کننده قبلی بوده و خرید محصولات با عمر گذشته بیشتر و سپس انجام عملیات ارتقاء مؤثرتر برای بهسازی آن را توجیه‌پذیر می‌کند که ماحصل آن کاهش هزینه‌ی کل تملک محصول برای مشتری مطابق رابطه‌ی ۱ خواهد بود.

از منظر ارائه‌کننده‌ی محصول دست دوم نیز باید گفت: با افزایش عمر گذشته محصول دست دوم، به‌دلیل اقتصادی‌تر شدن خرید محصول دست دوم برای مشتریان، مطابق با رابطه‌ی ۱۴، تقاضا برای خرید افزایش یافته و ارائه‌کننده می‌تواند با باریک‌ترکردن حاشیه‌ی سود خود از هر تعمیر، بر جذابیت خرید محصول دوم افزوده و از طریق تحریک بیشتر تقاضا، میزان سود کل خود را مطابق رابطه‌ی ۱۳ افزایش دهد. به‌طور مشخص به‌دلیل نمایی بودن رابطه بین میزان تقاضا برای خرید محصول دست دوم با قیمت محصول؛ می‌توان انتظار داشت با کاهش قیمت محصول، سود ارائه‌کننده نیز به صورت نمایی افزایش یابد.

درخصوص اثر آهنگ تغییرات قیمت خرید از مصرف کننده قبلی و ارتقاء نیز باید گفت: که آهنگ افزایش هزینه‌ی ارتقاء در مقایسه با آهنگ کاهش قیمت خرید محصول از مصرف‌کننده پیشین نقش تعیین کننده‌یی در اقتصادی بودن انتخاب محصولات دست دوم با عمرگذشته‌ی بیشتر دارد. در چنین حالتی، اگر آهنگ افزایش هزینه‌ی ارتقاء نسبت به آهنگ کاهش قیمت خرید محصول از مصرف‌کننده قبلی به‌ازای افزایش سن گذشته، بیشتر باشد می‌توان انتظار داشت که انتخاب محصولاتی با عمر گذشته بیشتر اگرچه باعث کاهش هزینه‌ی خرید محصول از مصرف‌کننده قبلی می‌شود، از یک سو عدم ارتقاء محصول، به‌دلیل نرخ خرابی بالاتر این محصولات، باعث افزایش هزینه‌های تعمیر در طول دوره‌ی وارانتی و پساوارانتی می‌شود. از سوی دیگر کنترل و کاهش هزینه‌های خرابی احتمالی محصول نیز مستلزم انجام عملیات ارتقاء است که انجام این عملیات نیز هزینه‌بر خواهد بود. بنابراین در چنین شرایطی، مشتری می‌تواند کاهش هزینه به خاطر خرید محصول مسن‌تر و افزایش هزینه به‌خاطر ارتقاء یا خرابی در دوره‌ی وارانتی و پساوارانتی را به‌صورت یکپارچه در نظرگرفته و اقدام به خرید محصولی می‌کند که مجموع هزینه‌ی مورد انتظار خرید و ارتقاء آن کمینه باشد. بنابراین به‌ازای سن مشخصی از محصول، هزینه‌ی مورد انتظار مشتری کم‌ترین مقدار و به تبع آن سود ارائه‌کننده بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که سن مذکور را می‌توان سن بهینه برای خرید محصول دست دوم دانست.

همچنین تحلیل حساسیت روی متغیرهای تصمیم نشان می‌دهد که با ثابت در نظرگرفتن مقدار بهینه‌ی سایر متغیرهای تصمیم و آنالیز حساسیت بر روی یک متغیر تصمیم تابع هزینه‌ی مشتری و سود ارائه‌کننده در نقطه بهینه بهترین مقدار خود را دارند و در سایر نقاط مشتری و ارائه‌کننده از بهینه‌ی خود دور می‌شوند.

۷. نتیجه‌گیری

امروزه افزایش تمایل افراد برای خرید محصولات دست دوم از یک سو و منافع قابل توجه ناشی از ارائه‌ی محصولات دست دوم از سوی دیگر، فضای مناسبی برای ورود و ارائه‌ی خدمات وارانتی محصولات دست دوم ایجاد کرده است. در چنین شرایطی مدل کردن تعارض ذاتی منافع مشتریان و ارائه‌کننده محصولات دست دوم، با استفاده از تعادل استکلبرگ و سهیم کردن مشتری در قیمت‌گذاری محصول، می‌تواند ضمن ترغیب مشتری به خرید محصول دست دوم، فضایی را ایجاد کند که در آن مشتری اقدام به انتخاب محصول دست دومی نماید که به‌ازای آن مجموع هزینه‌ی تملک محصول کمینه شود. از سوی دیگر نیز در چنین بستری ارائه‌کننده بتواند با تعیین حاشیه‌ی سود تعمیرات خود، میزان تقاضا و سود ارائه‌ی محصولات دست دوم را بیشینه سازد. تحلیل‌های صورت گرفته بر سن گذشته‌ی محصول نشان می‌دهد درصورت پایین‌بودن هزینه‌ی ارتقاء در مقایسه با هزینه‌ی خرید محصول از مصرف‌کننده‌ی قبلی، مشتری ترجیح می‌دهد از بین محصولات دست دوم با سن گذشته‌ی متفاوت، محصولی با عمر گذشته‌ی بیشتر را انتخاب کند، زیرا محصول مسن‌تر به معنی کاهش هزینه‌ی خرید محصول از مصرف‌کننده قبلی بوده و در عین حال، انجام ارتقاء بالا از سوی دیگر بر روی چنین محصولی نیز به‌دلیل هزینه‌های پایین آن در مقایسه با هزینه‌ی خرید و یا هزینه‌ی تعمیرات احتمالی آتی توجیه‌پذیر بوده و باعث کاهش هزینه‌ی کل تملک محصول خواهد شد. از منظر ارائه‌کننده نیز اگرچه پایین بودن هزینه‌ی ارتقاء محصول از یک سو می‌تواند باعث کاهش درآمدهای ارائه‌کننده شود اما با این وجود با افزایش تقاضای مشتری، می‌توان انتظار داشت سود ارائه‌کننده به‌صورت نمایی افزایش یابد.

پانوشت‌ها

1. Burn in
2. post warranty
3. minimal
4. free repair warranty (FRW)
5. purchase price from an end user
6. Hu

منابع (References)

1. Chattopadhyay, G.N. and Murthy, D.N.P. "Warranty cost analysis for second-hand products", *Mathematical and Computer Modelling*, **31**(10-12), pp. 81-88 (May-June 2000).
2. Chattopadhyay, G.N. and Murthy, D.N.P. "Optimal reliability improvement for used items sold with warranty", *International Journal of Reliability and Applications*, **5**(2), pp. 47-58 (2004).
3. Saidi-Mehrabad, M., Noorossana, R. and Shafiee, M. "Modeling and analysis of effective ways for improving the reliability of second-hand products sold with warranty", *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, **46**(1-4), pp. 253-265 (May 2009).
4. Jalali Naini, S.G. and Shafiee, M. "Joint determination of price and upgrade level for a warranted second-hand product", *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, **54**(9-12), pp. 118-1198 (2011).
5. Shahanaghi, K., Noorossana, R., Jalali-Naini, S.G. and Heydari, M. "Failure modeling and optimizing preventive maintenance strategy during two-dimensional extended warranty contracts", *Eng. Fail. Anal.*, **28**, pp. 90-102 (2013).
6. Shafiee, M. and Chukova, S. "Optimal upgrade strategy, warranty policy and sale price for second-hand products", *Appl. Stoch. Model. Bus. Ind.*, **29**(2), pp. 157-169 (Mar. 2012).
7. Lo, H.-C. and Yu, R.-Y. "A study of quality management strategy for reused products", *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, **119**, pp. 172-177 (Nov. 2013).
8. Shafiee, M., Chukova, S. and Yun, W.Y. "Optimal burn-in and warranty for a product with post-warranty failure penalty", *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, **70**(1-4), pp. 297-307 (2014).
9. Shafiee, M., Finkelstein, M. and Zuo, M.J. "Optimal burn-in and preventive maintenance warranty strategies with time-dependent maintenance costs", *IIE Trans.*, **45**(9), pp. 1024-1033 (April 2013).
10. Jack, N. and Murthy, D.N.P. "A flexible extended warranty and related optimal strategies", *J. Oper. Res. Soc.*, **58**(12), pp. 1612-1620 (Nov. 2006).
11. Murthy, D.N.P. and Kumar, K.R. "Total product quality", *Internatinal Journal of Production Economics*, **67**, pp. 253-267 (2000).
12. Lv, Y., Hu, T., Wang, G. and Wan, Z. "A penalty function method based on Kuhn – Tucker condition for solving linear bilevel programming", *Applied Mathematics and Computation*, **188**(1), pp. 808-813 (2007).