

تصمیم‌گیری گروهی در شرایط عدم اطمینان با اشکال متفاوت بیان ترجیحات و ماتریس‌های مقایسات زوجی ناقص

علی میرفندرسکی* (دانشجوی دکتری)

کوروش عشقی (استاد)

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۵ (۱۱۱-۹۹-۲، شماره ۲، ص. ۱۱۱-۹۹-۲)

ورودی‌های یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری اکثراً مبتنی بر قضاوت شخصی افراد است؛ در بیشتر موارد نیز نمی‌توان این قضاوت‌ها را در قالب مقادیر عددی و قطعی بیان کرد. از این رو «عدم اطمینان» بخش اجتناب‌ناپذیر تصمیم‌گیری‌های گروهی تلقی می‌شود. با توجه به عدم تمرکز تصمیم‌گیرندگان در یک نقطه‌ی جغرافیایی، در بیشتر موارد، اجماع بر سر شکل یکسان بیان ترجیحات از سوی تصمیم‌گیرندگان میسر نیست. همچنین با توجه به این که معمولاً تصمیم‌گیرنده در باره‌ی تمام جوانب مسئله‌ی مورد بحث دانش کافی ندارد، دقت مقایسات زوجی نیز محل تردید است. در این نوشتار، روش جدیدی برای تصمیم‌گیری گروهی با بیان متفاوت ترجیحات در شرایط عدم اطمینان و با فرض ناقص بودن ماتریس مقایسات زوجی ارائه می‌شود. در این روش یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی با سه تابع هدف ارائه می‌شود. این مدل تماماً به دنبال بیشینه‌سازی شاخص توافق گروهی، کمینه‌سازی شاخص ناسازگاری‌های فردی و بیشینه‌سازی پایداری اوزان نهایی گزینه‌هاست.

واژگان کلیدی: تصمیم‌گیری گروهی، ماتریس مقایسات زوجی ناقص، بیان متفاوت ترجیحات، پایداری اوزان، توافق گروهی، سازگاری فردی.

mirfendereski@ie.sharif.edu
eshghi@sharif.edu

۱. مقدمه

تصمیم‌گیری و تعیین محدوده‌ی مسئله، سازمان‌دهی گروه تصمیم‌گیری، تعریف و توصیف مجموعه‌ی متناهی از معیارها، ارزیابی فردی گزینه‌ها توسط تصمیم‌گیرندگان، اجماع نظرات تصمیم‌گیرندگان برای تعیین وزن معیارها و ماتریس امتیازات گزینه‌ها و در نهایت رتبه‌بندی گزینه‌هاست.

در ادامه در بخش مطالعه‌ی ادبیات به بررسی حوزه‌های کلیدی تصمیم‌گیری گروهی می‌پردازیم. بخش دوم این پژوهش به بیان تعاریف مورد نیاز برای فهم بهتر روش پیشنهادی اختصاص دارد. در بخش روش پیشنهادی، گام‌های رویکرد مذکور به تفصیل بیان می‌شود. برای ارزیابی و آشنایی بهتر با روش پیشنهادی، به حل یک نمونه مسئله و تحلیل حساسیت آن می‌پردازیم و سپس با استفاده از دو رویکرد به اعتبارسنجی مدل می‌پردازیم. در نهایت ضمن بیان مجدد ویژگی‌های روش پیشنهادی، زمینه‌هایی برای تحقیقات آتی معرفی خواهد شد.

۲. مطالعه‌ی ادبیات علمی مسئله

در این بخش ادبیات موضوع در قالب زیربخش‌های تصمیم‌گیری گروهی در شرایط عدم اطمینان، توافق گروهی، تصمیم‌گیری گروهی با اشکال ناهمگن بیان ترجیحات و تصمیم‌گیری گروهی با روابط ترجیحی ناقص بررسی می‌شود.

تصمیم‌گیری در بسیاری از زمینه‌ها -- نظیر مالی، مهندسی، پزشکی و... -- امری ضروری است؛ فرایند تصمیم‌گیری، فرایند انتخاب بهترین گزینه از میان گزینه‌های موجود است. در روش‌های کلاسیک تصمیم‌گیری، ورودی‌های مسئله قطعی فرض شده است. با توجه به این حقیقت که ورودی‌های مسئله‌ی تصمیم‌گیری مبتنی بر قضاوت افراد است و قضاوت افراد در بیشتر مواقع در قالب مقادیر عددی و قطعی قابل بیان نیست، فرض فوق با موقعیت‌های زندگی واقعی چندان هم‌خوانی ندارد. با توجه به پیچیدگی‌های حاکم بر محیط‌های اجتماعی و اقتصادی دنیای امروز، این که یک تصمیم‌گیرنده به‌تنهایی قادر به در نظر گرفتن تمام جوانب یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری باشد امکان‌پذیر نیست. بنابراین بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها در دنیای واقعی به‌صورت گروهی انجام می‌گیرد. دانش و اطلاعات بیشتر، درک و فهم بهتر از مسئله، امکان ایجاد خطای کم‌تر، همکاری اعضای گروه، ایجاد خلاقیت بیشتر و تضمین آینده‌ی اجرایی تصمیمات از جمله مزایای تصمیم‌گیری گروهی در مقابل تصمیم‌گیری فردی است.

به‌طور کلی چارچوب تصمیم‌گیری گروهی عبارت است از: تعیین اهداف فرایند

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۹/۳، اصلاحیه ۱۳۹۳/۱۲/۱۸، پذیرش: ۱۳۹۴/۱/۲۳

۱.۲. تصمیم‌گیری گروهی در شرایط عدم اطمینان

یو^[۱] یک مدل تصمیم‌گیری گروهی چندمعیاره برای استفاده در مسئله‌ی انتخاب شرکا پیشنهاد داده است. اطلاعات ورودی این مدل به صورت اعداد فازی شهودی در نظر گرفته شده است. او همچنین در پژوهشی^[۲] روشی جدید برای تصمیم‌گیری گروهی ارائه داده که ورودی‌های آن در قالب اعداد بازه‌ی است. در این نوشتار روشی ارائه شده است که براساس آن، اعداد بازه‌ی با استفاده از مفاهیم آماری میانگین و واریانس به یک عدد بازه‌ی فازی شهودی تبدیل می‌شود. ترابی و رفیعی،^[۳] یک روش جدید برای استخراج اولویت‌ها از یک ماتریس مقایسه‌ی زوجی با درایه‌های فازی در حالت یک تصمیم‌گیرنده، به همراه دو روش جدید در حالت چند تصمیم‌گیرنده ارائه داده‌اند. دوپازو و همکاران^[۴] نیز برای استخراج بردار اولویت گروهی از ماتریس‌های مقایسه‌ی زوجی فازی مدلی جدید ارائه داده‌اند. مدل پیشنهادی مطالعه‌ی حاضر برای استخراج بردار اولویت‌ها نگاه ویژه‌ی به بحث سازگاری داشته است. هونگ و همکاران^[۵] روشی جدید برای تصمیم‌گیری گروهی بر مبنای نظریه‌ی مطلوبیت چندمعیاره ارائه داده‌اند.

۲.۲. توافق گروهی^۱

رضایت افراد وابسته به عملکرد مطلوب گروه است. از طرف دیگر جهت دستیابی به عملکرد مطلوب گروه و به تبع آن رضایت فردی، لازم است تصمیمات جمعی بر مبنای توافق گروهی صورت گیرد. اولین رویکرد ریاضی به کار گرفته شده در زمینه‌ی توافق گروهی را می‌توان در کارهای فرنچ و همکاران^[۶] در اواخر سال‌های ۱۹۴۰ و اوایل ۱۹۵۰ میلادی یافت. با ورود زنجیره‌ی مارکوف به نظریه‌ی توافق گروهی، این نظریه شکل جدیدی به خود گرفت. از پیشگامان این عرصه می‌توان به هراری،^[۷] دی‌گروت^[۸] و فرنچ^[۹] اشاره کرد. در ادامه مدل‌های بسیاری در زمینه‌ی دستیابی به توافق گروهی پیشنهاد داده شد. پیشگامان این عرصه را می‌توان لهر و ونگر^[۱۰] دانست. راگدا،^[۱۱] برای نخستین بار مفهوم توافق در محیط فازی را ارائه داد. در رویکردهای کلاسیک مطرح شده در زمینه‌ی توافق گروهی، مفهوم توافق به صورت اکید و محض در نظر گرفته شده است. این در حالی است که مفهوم توافق از منظر درک انسانی به مراتب انعطاف پذیرتر است. نقطه‌ی آغاز این نگرش در توافق گروهی را می‌توان به لوور^[۱۲] نسبت داد. در ادامه کاسپرزیک و فدریزی^[۱۳-۱۵] مفهوم اکثریت فازی را با بهره‌گیری از شاخص‌های زبانی فازی، برای سنجش توافق گروهی ارائه دادند. هررا ویدما و همکاران^[۱۶] مدل جدیدی برای توافق گروهی -- در حالتی که تصمیم‌گیرندگان از روش‌های مختلفی برای بیان ترجیحات خود استفاده کنند -- ارائه دادند.

۳.۲. تصمیم‌گیری گروهی با اشکال ناهمگن بیان ترجیحات

برای بخشی از مسائل پیچیده‌ی تصمیم‌گیری گروهی که عدم اطمینان شاخص کلیدی آن محسوب می‌شود، تصمیم‌گیرندگان متشکل از افرادی از فرهنگ‌های مختلف با پیشینه‌ی دانشی و سطوح تخصصی متفاوت در رابط با مسئله‌ی مورد بحث خواهند بود. از طرف دیگر تصمیم‌گیرندگان می‌توانند در محیط‌های مختلف اجتماعی مستقر باشند. از این رو اجماع پیرامون یک شکل همگن برای بیان ترجیحات چندین میسر نیست. در سال‌های اخیر بحث تصمیم‌گیری گروهی با اشکال متفاوت بیان ترجیحات توجه بسیاری را به خود جلب کرده است.^[۱۷-۲۱] هررا و همکاران،^[۲۲] یک روش جدید برای تجمیع شیوه‌های متفاوت بیان ترجیحات ارائه دادند. دانگ و همکاران،^[۲۳] یک مدل تصمیم‌گیری گروهی براساس ترجیحات زبانی ارائه دادند. فان و ژانگ^[۲۴] نیز یک

مدل برنامه‌ریزی آرمانی برای استخراج ارزیابی جمعی گزینه‌ها در حالت تصمیم‌گیری گروهی با اشکال ناهمگن بیان ترجیحات و با فرض ناقص بودن روابط ترجیحی ارائه دادند. پالامارس و همکاران (۲۰۱۳)، یک مدل توافقی برای تصمیم‌گیری گروهی ارائه دادند که در آن تصمیم‌گیرندگان قادرند نظرات خود را در قالب اشکال متفاوت بیان ترجیحات ارائه دهند.

۴.۲. تصمیم‌گیری گروهی با روابط ترجیحی ناقص^۲

در بسیاری از مسائل واقعی تصمیم‌گیری ممکن است شرایطی وجود داشته باشد که در آن تصمیم‌گیرندگان دانشی جامع از تمام جوانب مسئله‌ی مورد بحث نداشته نباشند، از این رو اظهار نظر و بیان برخی از قضاوت‌ها برای آن‌ها مقدور نیست. در نتیجه در این مسائل با روابط ترجیحی ناقص در تصمیم‌گیری گروهی روبه‌رو می‌شویم. در سال‌های اخیر بحث تصمیم‌گیری گروهی با روابط ترجیحی ناقص مورد توجه قرار گرفته است. برای مثال ژو و همکاران،^[۲۵] روشی جدید مبتنی بر تکنیک کمینه مربعات لگاریتمی برای تصمیم‌گیری گروهی با ماتریس ترجیحات فازی ناقص ارائه دادند. ژو و وانگ،^[۲۶] روش بردار ویژه را برای اولویت‌بندی ترجیحات فازی ناقص توسعه دادند. ژانگ و گیو^[۲۷] نیز رویکرد جدیدی برای تصمیم‌گیری گروهی در حالت ترجیحات ناقص و اشکال مختلف بیان آن در شرایط عدم اطمینان ارائه دادند.

۳. تعاریف مقدماتی

در این بخش به تشریح مفهوم سازگاری در اشکال متفاوت بیان روابط ترجیحی در حالت عدم اطمینان می‌پردازیم. این اشکال به ترتیب عبارت‌اند از: روابط ترجیحی ضربی بازه‌ی، روابط ترجیحی فازی بازه‌ی، روابط ترجیحی زبانی بازه‌ی، روابط ترجیحی ترتیبی بازه‌ی و روابط ترجیحی فازی شهودی.

تعریف ۱.

ماتریس زوجی $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یک رابطه‌ی ترجیحی ضربی بازه‌ی^۳ است اگر، برای هر a_{ij} گزاره‌های زیر صادق باشد^[۲۸]:

$$\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+] \quad (۱)$$

$$a_{ij}^- \leq a_{ij}^+ \quad (۲)$$

$$a_{ij}^- . a_{ji}^+ = a_{ji}^- . a_{ij}^+ = ۱ \quad (۳)$$

$$a_{ii}^- = a_{ii}^+ = ۱ \quad (۴)$$

$$a_{ij}^-, a_{ij}^+ \in \left\{ \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots, 7, 8, 9 \right\} \quad (۵)$$

تعریف ۲.

فرض کنید $([a_{ij}^-, a_{ij}^+])_{n \times n}$ یک رابطه‌ی ترجیحی ضربی بازه‌ی است. \tilde{A} یک رابطه‌ی ترجیحی ضربی بازه‌ی سازگار است اگر، فضای موجه محدب θ تهی نباشد. به عبارت دیگر دست کم یک بردار چون $(w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ باید موجود باشد که در رابطه‌ی ۶ صدق کند^[۲۹].

$$\theta = \{(w_1, w_2, \dots, w_n)^T | a_{ij}^- \leq \frac{w_i}{w_j} \leq a_{ij}^+, w_i \geq 0, i, j \in N, \sum_{i=1}^n w_i = 1\} \quad (۶)$$

تعریف ۳.

ماتریس زوجی $B = (b_{ij})_{n \times n}$ یک رابطه‌ی ترجیحی فازی بازه‌ی^۴ است اگر، برای هر i, j گزاره‌های زیر صادق باشد:^[۳۰]

$$\tilde{b}_{ij} = [b_{ij}^-, b_{ij}^+] \quad (۷)$$

$$b_{ij}^- \leq b_{ij}^+ \quad (۸)$$

$$b_{ij}^- + b_{ji}^+ = b_{ji}^- + b_{ij}^+ = ۱ \quad (۹)$$

$$b_{ii}^- = b_{ii}^+ = ۰,۵ \quad (۱۰)$$

$$b_{ij}^-, b_{ij}^+ \in [۰, ۱] \quad (۱۱)$$

\tilde{b}_{ij} بیانگر درجه‌ی برتری گزینه‌ی X_i به گزینه‌ی X_j است.

تعریف ۴.

فرض کنید $\tilde{B} = ([b_{ij}^-, b_{ij}^+])_{n \times n}$ یک رابطه‌ی ترجیحی فازی بازه‌ی است. B یک رابطه‌ی ترجیحی فازی بازه‌ی سازگار است اگر، فضای موجه محدب θ تهی نباشد. به عبارت دیگر دست کم یک بردار چون $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ باید موجود باشد که در رابطه‌ی ۲۱ صدق کند:^[۳۱]

$$\theta = \{(w_1, w_2, \dots, w_n)^T \mid b_{ij}^- \leq \frac{w_i}{w_i + w_j} \leq b_{ij}^+, w_i \geq 0, i, j \in N, \sum_{i=1}^n w_i = 1\} \quad (۱۲)$$

تعریف ۵.

اگر $S = \{s_\alpha \mid \alpha = 0, 1, \dots, T\}$ بیانگر مجموعه اصطلاحات زبانی با کاردینالیته فرد، و $I(s_\alpha) = \alpha$ نیز بر حسب اصطلاح زبانی -- مثل $I(s_\alpha) = \alpha$ -- فرض شود، آنگاه ماتریس $\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij})_{n \times n}$ یک رابطه‌ی ترجیحی زبانی بازه‌ی^۵ است اگر، برای هر درجیه \tilde{l}_{ij} گزاره‌های زیر صادق باشد:^[۳۲]

$$\tilde{l}_{ij} = [l_{ij}^-, l_{ij}^+] \quad (۱۳)$$

$$I(l_{ij}^-) \leq I(l_{ij}^+) \quad (۱۴)$$

$$I(l_{ij}^-) + I(l_{ji}^+) = I(l_{ij}^+) + I(l_{ji}^-) = T \quad (۱۵)$$

$$l_{ii}^- = l_{ii}^+ = s_{T+1} \quad (۱۶)$$

$$l_{ij}^-, l_{ij}^+ \in S \quad i, j \in N \quad (۱۷)$$

\tilde{l}_{ij} بیانگر درجه‌ی برتری زبانی گزینه‌ی X_i به گزینه‌ی X_j است.

تعریف ۶.

با استفاده از رابطه‌ی ۱۸ می‌توان ماتریس ترجیحی زبانی بازه‌ی $\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij})_{n \times n}$ را به یک ماتریس ترجیحی فازی بازه‌ی $\tilde{B} = ([b_{ij}^-, b_{ij}^+])_{n \times n}$ تبدیل کرد:^[۳۳]

$$\tilde{b}_{ij} = [b_{ij}^-, b_{ij}^+] = \left[\frac{I(l_{ij}^-)}{T}, \frac{I(l_{ij}^+)}{T} \right] \quad i, j \in N \quad (۱۸)$$

$T + ۱$ معرف کاردینالیته مجموعه‌ی زبانی S (اصطلاحات زبانی) است.

با استفاده از این تبدیل، سازگاری رابطه‌ی ترجیحی زبانی مشابه سازگاری رابطه‌ی ترجیحی فازی بازه‌ی تعریف خواهد شد.

تعریف ۷.

فرض کنید تصمیم‌گیرنده برای هر گزینه، ترجیح رتبه‌ی خود را در قالب $F_i =$

$[f_i^L, f_i^U]$ بیان می‌کند. مقدار f_i^L و f_i^U به ترتیب بیانگر موقعیت رتبه‌ی گزینه‌ی x_i در میان تمام گزینه‌ها در حالت خوش‌بینانه و بدبینانه است. در این حالت \tilde{F} یک ترجیح ترتیبی بازه‌ی^۶ است که متناظر با آن یک ترجیح ارزشی بازه‌ی $\tilde{E}_i = [e_i^L, e_i^U]$ تعریف می‌شود:^[۳۴]

$$e_i^L = \frac{\frac{n-f_i^U}{n-1} + \varepsilon}{\frac{n}{\gamma} + n\varepsilon} \quad (۱۹)$$

$$e_i^U = \frac{\frac{n-f_i^L}{n-1} + \varepsilon}{\frac{n}{\gamma} + n\varepsilon} \quad (۲۰)$$

ε پارامتر مثبتی است که مقدار آن را می‌توان مطابق رابطه‌ی ۲۱ محاسبه کرد مشروط بر آن که x به عنوان حد پایین وزن‌گزینه‌ها در نظر گرفته شده باشد:

$$\varepsilon = \frac{nx}{\gamma \cdot (1 - nx)} \quad (۲۱)$$

تعریف ۸.

یک رابطه‌ی ترجیحی فازی شهودی^۷ با ماتریس \tilde{R} نمایش داده می‌شود. هر درجیه ماتریس با دو مؤلفه‌ی (u_{ij}, v_{ij}) نمایش داده می‌شود. مؤلفه‌ی u_{ij} بیانگر درجه‌ی قطعیت برتری گزینه‌ی x_i به گزینه‌ی x_j و مؤلفه‌ی v_{ij} بیانگر درجه قطعیت عدم برتری گزینه‌ی x_i به گزینه‌ی x_j است. ماتریس یک رابطه‌ی ترجیحی فازی شهودی است اگر، برای هر درجیه \tilde{r}_{ij} گزاره‌های زیر صادق باشد:^[۳۵]

$$0 \leq u_{ij} + v_{ij} \leq 1 \quad (۲۲)$$

$$u_{ji} = v_{ij} \quad (۲۳)$$

$$u_{ij} = v_{ji} \quad (۲۴)$$

$$\pi_{ij} = 1 - u_{ij} - v_{ij} \quad (۲۵)$$

درجه‌ی عدم قطعیت برتری گزینه‌ی x_i به گزینه‌ی x_j اختصاراً با π_{ij} نمایش داده می‌شود.

تعریف ۹.

فرض کنید $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n \times n} = ((u_{ij}, v_{ij}))_{n \times n}$ یک ماتریس ترجیح فازی شهودی است. ماتریس \tilde{R} دارای سازگاری کامل است اگر، فضای محدب θ تهی نباشد. θ چنین می‌شود:^[۳۵]

$$\theta = \{(w_1, w_2, \dots, w_n)^T \mid u_{ij} \leq \frac{w_i}{w_i + w_j} \leq 1 - v_{ij}, w_i \geq 0, i, j \in N, \sum_{i=1}^n w_i = 1\} \quad (۲۶)$$

۴. روش پیشنهادی

در این بخش روش پیشنهادی ضمن بیان مفروضات و اهداف مسئله به تفصیل تشریح می‌شود.

۴.۱. مفروضات مسئله

فرضیات منظور در مدل‌سازی مسئله‌ی تصمیم‌گیری گروهی عبارت است از:

۱. بیان ترجیحات در قالب ماتریس مقایسات زوجی بازه‌ی در نظر گرفته می‌شود.

به یک شکل واحد تعریف می‌شود. در ادامه قضایای تبدیلی اشکال متفاوت بیان می‌شود.

قضیه ۱: فرض کنید $\tilde{B} = ([b_{ij}^-, b_{ij}^+])_{n \times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی بازه‌بندی است، در این حالت رابطه ترجیحی ضربی بازه‌بندی متناظر آن $\tilde{A} = ([a_{ij}^-, a_{ij}^+])_{n \times n}$ چنین تعریف می‌شود.

$$a_{ij}^- = \frac{b_{ij}^L}{1 - b_{ij}^L} \quad i, j \in N \quad (27)$$

$$a_{ij}^+ = \frac{b_{ij}^U}{1 - b_{ij}^U} \quad i, j \in N \quad (28)$$

اثبات: مطابق تعریف ۴ خواهیم داشت:

$$b_{ij}^L \leq \frac{w_i}{w_j + w_i} \leq b_{ij}^U : \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (29)$$

$$b_{ji}^L \leq \frac{w_j}{w_j + w_i} \leq b_{ji}^U : \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (30)$$

این دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{b_{ij}^L}{b_{ji}^U} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq \frac{b_{ij}^U}{b_{ji}^L} : \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (31)$$

با توجه به تعریف ۳ خواهیم داشت:

$$b_{ij}^U + b_{ji}^L = 1 \rightarrow b_{ji}^L = 1 - b_{ij}^U \quad (32)$$

$$b_{ji}^U + b_{ij}^L = 1 \rightarrow b_{ij}^L = 1 - b_{ji}^U \quad (33)$$

و در نهایت:

$$\frac{b_{ij}^L}{1 - b_{ij}^L} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq \frac{b_{ij}^U}{1 - b_{ij}^U} \quad (34)$$

قضیه ۲: اگر $\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij})_{n \times n} = ([l_{ij}^-, l_{ij}^+])_{n \times n}$ را یک رابطه ترجیحی زبانی بازه‌بندی فرض کنیم، رابطه ترجیحی ضربی بازه‌بندی متناظر آن $\tilde{A} = ([a_{ij}^-, a_{ij}^+])_{n \times n}$ است و چنین تعریف می‌شود.

$$a_{ij}^- = \frac{I(l_{ij}^-)}{T - I(l_{ij}^-)} \quad i, j \in N \quad (35)$$

$$a_{ij}^+ = \frac{I(l_{ij}^+)}{T - I(l_{ij}^+)} \quad i, j \in N \quad (36)$$

اثبات: مطابق تعریف ۶ خواهیم داشت:

$$\frac{I(l_{ij}^-)}{T} \leq \frac{w_i}{w_j + w_i} \leq \frac{I(l_{ij}^+)}{T} : \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (37)$$

$$\frac{I(l_{ji}^-)}{T} \leq \frac{w_j}{w_j + w_i} \leq \frac{I(l_{ji}^+)}{T} : \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (38)$$

این دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{I(l_{ij}^-)}{I(l_{ji}^+)} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq \frac{I(l_{ij}^+)}{I(l_{ji}^-)} : \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (39)$$

با توجه به تعریف ۵ خواهیم داشت:

$$I(l_{ji}^-) = T - I(l_{ij}^+) \quad (40)$$

$$I(l_{ij}^+) = T - I(l_{ji}^-) \quad (41)$$

۲. بیان ترجیحات در قالب اشکال متفاوت تعریف شده مجاز محسوب می‌شود.

۳. هر تصمیم‌گیرنده تنها مجاز به استفاده از یک شکل از اشکال بالا برای بیان ترجیحات خود است.

۴. بیان ناقص ماتریس مقایسات زوجی امکان‌پذیر است.

۵. فرایند استخراج ترجیحات زوجی از تصمیم‌گیرندگان تنها در یک مرحله صورت می‌گیرد.

۶. اوزان اهمیت برای هریک از تصمیم‌گیرندگان در نظر گرفته می‌شود.

۷. اوزان اهمیت برای هر گزینه از نقطه‌نظر هر تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود.

۲.۴. اهداف

در روش پیشنهادی هدف استخراج اوزان نهایی گزینه‌ها یا معیارهاست. با توجه به این موضوع که خروجی فرایند یک تصمیم‌گیری گروهی را می‌توان ورودی فرایند تصمیم‌گیری مدیریتی دیگری تلقی کرد، این نیازمندی احساس می‌شود که مقادیر عددی اوزان نهایی قابلیت برآوردسازی این مهم را داشته باشند. این قابلیت را می‌توان در قالب مفاهیم پایداری اوزان استخراجی، سازگاری گروهی و توافق گروهی برآورده ساخت. در بخش بعد گام‌های روش پیشنهادی به تفصیل تشریح می‌شود.

۳.۴. شرح روش پیشنهادی

با توجه به مفروضات مسئله و در راستای تحقق اهداف تبیین شده، روش پیشنهادی باید پاسخی روشن برای سؤالات زیر داشته باشد:

۱. چه رویکردی برای مقابله با تأثیرات نامطلوب ناسازگاری‌های موجود در ترجیحات ورودی تصمیم‌گیرندگان بر اوزان نهایی به کار گرفته می‌شود؟

۲. رویکرد برخورد با درایه‌های مجهول موجود در ماتریس‌های مقایسات زوجی چیست؟

۳. رویکرد برخورد با اشکال متفاوت بیان ترجیحات چیست؟

۴. مبنای استخراج اوزان اهمیت تصمیم‌گیرندگان چیست؟

۵. معیار اهمیت گزینه‌ها نزد هر تصمیم‌گیرنده چگونه استخراج شود؟

۶. شاخص سازگاری گروهی چگونه تعریف شود؟

۷. شاخص توافق گروهی چگونه تعریف شود؟

۸. شاخص پایداری گروهی چگونه تعریف شود؟

۹. استخراج اوزان نهایی چگونه صورت می‌گیرد؟

۱.۳.۴. بیان ترجیحات توسط هر تصمیم‌گیرنده

در این گام ترجیحات تصمیم‌گیرندگان در قالب اشکال مجاز تعریف شده توسط هر تصمیم‌گیرنده بیان می‌شود.

۲.۳.۴. همگون‌سازی ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌بندی در قالب

ماتریس‌های مقایسه‌ی بازه‌بندی ضربی

در این گام هدف همگون‌سازی اشکال متفاوت بیان ترجیحات و کاهش در حجم محاسبات گام‌های پیشرو است. بدین منظور با بهره‌گیری از تعاریف موجود برای هریک از اشکال متفاوت تعیین‌شده برای بیان ترجیحات، قضایایی جهت تبدیل این اشکال

و در نهایت:

$$\frac{I(l_{ij}^-)}{T - I(l_{ij}^-)} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq \frac{I(l_{ij}^+)}{T - I(l_{ij}^+)} \quad (42)$$

این دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{I(l_{ij}^-)}{I(l_{ji}^+)} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq \frac{I(l_{ij}^+)}{I(l_{ji}^-)} : \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (43)$$

با توجه به تعریف ۵ خواهیم داشت:

$$I(l_{ji}^-) = T - I(l_{ij}^+) \quad (44)$$

$$I(l_{ji}^+) = T - I(l_{ij}^-) \quad (45)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{I(l_{ij}^-)}{T - I(l_{ij}^-)} \leq \frac{w_i}{w_j} \leq \frac{I(l_{ij}^+)}{T - I(l_{ij}^+)} \quad (46)$$

مشابه اثبات مذکور می‌توان قضاای زیر را نیز ثابت کرد.

قضیه ۳: اگر $F_i = [f_i^L, f_i^U]$ یا یک رابطه‌ی ترجیحی ترتیبی بازه‌ی فرض کنیم، رابطه‌ی ترجیحی ضربی بازه‌ی متناظر آن، $\tilde{A} = ([a_{ij}^-, a_{ij}^+])_{n \times n}$ را می‌توان چنین تعریف کرد:

$$a_{ij}^- = \frac{\frac{n-f_i^U}{n-1} + \varepsilon}{\frac{n-f_j^L}{n-1} + \varepsilon} \quad i, j \in N \quad (47)$$

$$a_{ij}^+ = \frac{\frac{n-f_i^L}{n-1} + \varepsilon}{\frac{n-f_j^U}{n-1} + \varepsilon} \quad i, j \in N \quad (48)$$

قضیه ۴: اگر $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n \times n} = ((u_{ij}, v_{ij}))_{n \times n}$ یا یک رابطه‌ی ترجیحی فازی شهودی بازه‌ی فرض کنیم، رابطه‌ی ترجیحی ضربی بازه‌ی متناظر آن، $\tilde{A} = ([a_{ij}^-, a_{ij}^+])_{n \times n}$ را می‌توان چنین تعریف کرد:

$$a_{ij}^- = \frac{u_{ij}}{1 - u_{ij}} \quad i, j \in N \quad (49)$$

$$a_{ij}^+ = \frac{1 - v_{ij}}{v_{ij}} \quad i, j \in N \quad (50)$$

۳.۳.۴. استخراج ماتریس کامل سازگار از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌ی

ضربی تصمیم‌گیرندگان

هدف از این گام استخراج ماتریس‌های سازگار کاملاً متناظر با هریک از ماتریس‌های مقایسات زوجی تصمیم‌گیرندگان است. در این گام ابتدا تعریفی از سازگاری کامل در ماتریس مقایسات زوجی بازه‌ی (مشابه تعریف آن در حالت ماتریس مقایسات زوجی ضربی غیر بازه‌ی) ارائه می‌شود. در ادامه، با توجه به تعریف ارائه شده از سازگاری کامل، مدلی مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی ارائه می‌شود.

تعریف ۱۰

ماتریس $A = [a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ یک ماتریس مقایسات زوجی بازه‌ی ضربی است. این ماتریس دارای سازگاری کامل است، در صورتی که اوزان بازه‌ی $\bar{w}_i = [w_i^L, w_i^U]$ به‌گونه‌ی یافت شود که در گزاره‌های زیر صدق کنند.

$$\bar{a}_{ij} = \frac{\bar{w}_i}{\bar{w}_j} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} = \left[\frac{w_i^L}{w_j^U}, \frac{w_i^U}{w_j^L} \right] \quad (51)$$

با توجه به این تعریف مدل برنامه‌ریزی شماره ۱ برای استخراج یک ماتریس مقایسه‌ی زوجی بازه‌ی ضربی با سازگاری کامل از یک ماتریس مقایسه‌ی زوجی بازه‌ی ضربی ناقص دلخواه پیشنهاد می‌شود.

مدل شماره ۱. هدف اصلی این مدل استخراج یک ماتریس کاملاً سازگار متناظر با هریک از ماتریس‌های مقایسات زوجی بیان شده توسط تصمیم‌گیرندگان است. از طرف دیگر این مدل برای انطباق ماتریس استخراجی با ترجیحات واقعی تصمیم‌گیرندگان به دنبال آن است که ماتریس استخراجی مزبور با اعمال کم‌ترین تغییرات ممکن در درایه‌های ماتریس ترجیحات اصلی به دست آید. به عبارت دیگر انطباق با ترجیحات تصمیم‌گیرندگان و عدم تحریف آن در کنار مفهوم سازگاری ارکان کلیدی این مدل محسوب می‌شود.

پارامترها

A : ماتریس مقایسه‌ی زوجی (برای درایه‌های مجهول حد پایین مقدار صفر و برای حد بالا مقداری بزرگ نظیر ۱۰۰ در نظر گرفته شود)؛

δ_{ij} : اگر درایه‌ی a_{ij} مجهول باشد مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

متغیرها

cp_{ij}^L, cp_{ij}^U : متغیرهای کمکی برای خطی‌سازی قدرمطلق انحراف از حدود پایین درایه‌ی a_{ij} ؛

cd_{ij}^L, cd_{ij}^U : متغیرهای کمکی برای خطی‌سازی قدرمطلق انحراف از حدود بالا درایه‌ی a_{ij} ؛

w_i^L : حد پایین وزن اهمیتی i ام؛
 w_i^U : حد بالای وزن اهمیتی i ام.

$$\min (z) \quad (52)$$

Subject to :

$$z \geq (1 - \delta_{ij}) \cdot (cp_{ij}^L + cp_{ij}^U + cd_{ij}^L + cd_{ij}^U) \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (53)$$

$$a_{ij}^L \cdot w_j^U = w_i^L + cp_{ij}^L - cp_{ij}^U \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (54)$$

$$cd_{ij}^L - cd_{ij}^U + a_{ij}^U \cdot w_j^L = w_i^U \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (55)$$

$$w_i^U + \sum_{j \neq i} w_j^L \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (56)$$

$$w_i^L + \sum_{j \neq i} w_j^U \geq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (57)$$

$$w_i^U, w_i^L \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (58)$$

$$cp_{ij}^L, cp_{ij}^U, cd_{ij}^L, cd_{ij}^U \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (59)$$

روابط ۵۲ و ۵۳ برای مدل‌سازی خطی تابع هدف مدل به کار رفته که به دنبال کمینه‌سازی بیشترین میزان انحرافات از تعریف سازگاری، در میان درایه‌های ماتریس مقایسات زوجی است. روابط ۵۴ و ۵۵ به منظور مدل‌سازی خطی قدرمطلق‌های مقادیر انحرافات از تعریف سازگاری به‌ازای تمام درایه‌های تعریف شده‌ی ماتریس مقایسات زوجی به کار رفته است. در نهایت روابط ۵۶ و ۵۷ بیان‌گر محدودیت‌های نرمال‌ساز اوزان بازه‌ی است.

در ادامه با استفاده از مقادیر بهینه‌ی حدود بالا و پایین اوزان به دست آمده، از حل مدل بالا برای هر تصمیم‌گیرنده، ماتریس مقایسات زوجی ضربی بازه‌ی کامل سازگار متناظر با هر تصمیم‌گیرنده استخراج می‌شود:

هر گزینه حاصل خواهد شد. ما در این گام از این سازوکار استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که امتیاز اطلاق شده در هر مقایسه‌ی زوجی گزینه‌ها برخلاف روش کلاسیک تنها مقادیر صفر و ۱ نیست و می‌تواند هر مقدار ممکن را در بازه صفر و ۱ اتخاذ کند. این مهم از طریق مفهوم درجه‌ی صحت بزرگی در اعداد فازی تحقق می‌یابد. **شرح تفصیلی گام:** با توجه به این که اوزان به دست آمده برای هر تصمیم‌گیرنده در قالب اعداد فازی مثلثی $w_i^k = (L_i^k, M_i^k, U_i^k)$ است، برای رتبه‌بندی اوزان، ماتریس $T^k = (T_{ij}^k)_{n \times n}$ با استفاده از تعریف «درجه صحت بزرگی» تعریف می‌شود:

$$T_{ij}^k = T(w_i^k \geq w_j^k) = \begin{cases} 1 & M_i^k \geq M_j^k \\ \max\left(0, \frac{U_i^k - L_j^k}{(U_i^k - L_j^k) + (M_j^k - M_i^k)}\right) & M_i^k < M_j^k \end{cases} \quad (66)$$

رتبه‌بندی نهایی اوزان برای هر تصمیم‌گیرنده Rank_i^k چنین تعریف می‌شود، قابل ذکر است مقادیر رتبه‌ها می‌تواند هر مقدار مثبتی را اتخاذ کند. (صحیح بودن مقادیر رتبه‌ها الزامی نیست.)

$$\text{Rank}_i^k = n + 1 - \sum_{j=1}^n T_{ij}^k \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K \quad (67)$$

در این گام رتبه‌بندی‌های فردی به‌ازای هر تصمیم‌گیرنده استخراج شد.

۶.۳.۴. استخراج اوزان اهمیتی تصمیم‌گیرندگان

هدف این گام تعیین اهمیت تأثیرگذاری هر یک از تصمیم‌گیرندگان در شکل‌گیری تصمیم نهایی است. چنانچه تعداد مراحل تصمیم‌گیری متعدد باشد، می‌توان فرایند توافق گروهی را چنین تصویرسازی کنیم که در هر مرحله هر یک از تصمیم‌گیرندگان بخشی از حق رای خود را (به‌صورت مجازی) به سایر تصمیم‌گیرندگان واگذار می‌کند، به‌عبارت دیگر می‌توان به نقش هر تصمیم‌گیرنده در هر مرحله وزنی بین صفر و ۱ اطلاق کرد. بنابراین در این حالت زمان رسیدن به توافق گروهی و به‌تعبیری نتیجه‌ی نهایی را منطبق بر حصول ثبات در این اوزان دانست. پیرو رویکرد تبیین شده در بالا ما به دنبال تعیین میزان تأثیرپذیری ترجیحات هر تصمیم‌گیرنده از سایر تصمیم‌گیرندگان هستیم. از این رو به دنبال ابزاری هستیم که به بهترین شکل این تأثیرپذیری را نمایش دهد. در بین مفاهیم ریاضی بحث زاویه‌ی بین دو بردار تا حد زیادی این مفهوم را منعکس می‌کند، بنابراین در ادامه ابتدا تعریفی از زاویه (کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار) ارائه داده و سپس به بیان تعمیم آن در حالت دو ماتریس می‌پردازیم.

تعریف ۱۱.

تعریف ضرب داخلی بردارهای $\vec{\alpha}$ و $\vec{\beta}$ عبارت است از:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \beta_j \quad (68)$$

تعریف ۱۲.

زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{\alpha}$ و $\vec{\beta}$ که با γ نمایش داده می‌شود چنین تعریف می‌شود.

$$\cos \gamma = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}} \quad (69)$$

تعریف ۱۳.

$$a_{ij}^{kL} = \frac{w_i^{kL}}{w_j^{kL}} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, K \quad (60)$$

$$a_{ij}^{kU} = \frac{w_i^{kU}}{w_j^{kU}} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, K \quad (61)$$

$$a_{ij}^{kL} = a_{ij}^{kU} = 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad i = j, \quad k = 1, \dots, K \quad (62)$$

در ادامه، هرگاه از ماتریس‌های مقایسات زوجی تصمیم‌گیرندگان صحبت می‌شود، منظور ماتریس‌های بازنویسی شده‌ی این گام است.

۴.۳.۴. استخراج توابع پایداری ترجیحات هر یک از تصمیم‌گیرندگان

اهداف این گام افزایش اطمینان در نتایج نهایی با تکیه بر مفهوم پایداری اوزان، به تصویر کشیدن پایداری اوزان گزینه‌ها در شکلی منعطف‌تر (توابع فازی مثلثی) و فراهم‌سازی بستری برای گام نهایی (مدل نهایی چند تابع هدف) است.

در این گام ابتدا با استفاده از روش پیشنهادی محققین^[۳۶] مؤلفه‌های دوم توابع فازی مثلثی برای هر گزینه و به‌ازای هر تصمیم‌گیرنده استخراج می‌شود. سپس با تغییر در تابع هدف مدل مزبور (در دو مرحله، یک بار با تابع هدف پیشینه و بار دیگر با تابع هدف کمینه به‌ازای هر گزینه و متناظر با هر تصمیم‌گیرنده) و ورود تابع هدف مدل به‌صورت یک محدودیت جدید در کنار محدودیت‌های قبلی (قراردادن ضریبی از مقدار بهینه‌ی به دست آمده از مدل مورد استفاده^[۳۶] در قالب یک تساوی) مجدداً مدل حل شده و مؤلفه‌های اول و سوم توابع فازی مثلثی مربوط استخراج می‌شود. **مدل شماره ۲.** هدف از این مدل استخراج مؤلفه‌های اول و سوم توابع مثلثی تعریف شده در این گام است. این مهم از طریق ورود تابع هدف مدل قبل به شکل یک تساوی که در سمت راست آن ضریبی (بزرگ‌تر از ۱) از مقدار بهینه به دست آمده از حل مدل تاتینا - عشقی^[۳۶] موجود است و حل مدل به‌ازای هر گزینه و متناظر با هر تصمیم‌گیرنده در دو مرحله، یک بار با تابع هدف پیشینه و بار دیگر با تابع هدف کمینه تحقق می‌یابد.

پارامترهای مدل

γ : ضریب تعدیل؛

Z_1^{k*} : مقدار بهینه‌ی مدل شماره ۱؛

سایر پارامترها مشابه روش تاتینا - عشقی است.

متغیرهای مدل

متغیرها مشابه روش تاتینا - عشقی است.

$$\min / \max (w_i^k) \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K \quad (63)$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n (m_{ij}^k + n_{ij}^k) = (1 + \gamma) \cdot Z_1^{k*} \quad (64)$$

$$\text{Tatina - Eshghi Constraints;} \quad (65)$$

مقدار بهینه‌ی مدل بالا در حالت تابع هدف کمینه‌ساز را با L_i^k و مقدار بهینه‌ی آن را در حالت تابع هدف بیشینه‌ساز با U_i^k و اوزان بهینه‌ی به دست آمده از حل مدل تاتینا - عشقی به‌ازای هر تصمیم‌گیرنده را با M_i^k نمایش می‌دهیم.

۵.۳.۴. رتبه‌بندی فردی بر مبنای اوزان به دست آمده

هدف از این گام استخراج اولویت‌های گزینه‌های متناظر با هر تصمیم‌گیرنده است. ساختار رتبه‌بندی گزینه‌ها را در حالت کلاسیک می‌توان چنین به تصویر کشید که ما برای رتبه‌بندی کافی است تمام زوج مقایسات ممکن بین گزینه‌ها را بررسی کرده و به‌ازای صحت بزرگی هر گزینه در هر زوج مقایسه، امتیازی معادل ۱ برای آن در نظر بگیریم. در نهایت رتبه‌بندی نهایی گزینه‌ها از حاصل جمع این امتیازات برای

و توانمندی آن در برخورد با مسائل چندهدفه ابزاری مناسب برای تحقق خواسته‌ی ما در برخورد با این سه نیازمندی (پایداری، سازگاری و توافق) محسوب می‌شود. مدل شماره ۳. هدف از این مدل فراهم‌سازی بستری برای به تصویرکشیدن ارتباط توأم سه نیازمندی (پایداری، سازگاری و توافق) است. از این رو ابتدا متناظر با تعریف هریک از نیازمندی‌های سه‌گانه رابطه‌ی در حالت گروهی تعریف شده و به‌عنوان یک تابع هدف محسوب می‌شود. این سه تابع هدف عبارت‌اند از:

۱. تابع هدف پایداری: برای طراحی این تابع هدف از توابع پایداری که در گام چهارم روش پیشنهادی برای هر تصمیم‌گیرنده و به‌ازای هر گزینه استخراج شده استفاده می‌شود. بدین معنا که متناظر با هر جواب ممکن برای اوزان نهایی، مقداری بین صفر و ۱ از برد این توابع پایداری اختصاص می‌یابد که بیان‌گر میزان مطلوبیت از نقطه‌نظر نزدیکی وزن گزینه به جواب پایدار متناظرش به‌ازای هر تصمیم‌گیرنده است. از طرف دیگر با توجه به استدلالات مبتنی بر اهمیت اوزان اهمیتی تصمیم‌گیرندگان و اوزان اهمیت گزینه‌ها از نقطه‌نظر تصمیم‌گیرندگان، مجموع مقادیر به دست آمده از توابع هدف پایداری با اعمال وزن گزینه‌ها از نقطه‌نظر هر تصمیم‌گیرنده و وزن اهمیتی هر تصمیم‌گیرنده می‌تواند شاخصی مناسب برای انعکاس وضعیت پایداری یک جواب موجه از نقطه‌نظر گروهی باشد.

۲. تابع هدف سازگاری: مبنای طراحی این تابع هدف مجموع میزان انحرافات است که یک جواب موجه از اوزان گزینه‌ها منطبق با تعریف سازگاری از ماتریس‌های ترجیحات تصمیم‌گیرندگان به همراه خواهد داشت. این مجموع متناسب با وزن اهمیتی هر تصمیم‌گیرنده می‌تواند منعکس‌کننده وضعیت سازگاری یک جواب موجه از نقطه‌نظر گروهی باشد.

۳. تابع هدف توافقی: مبنای طراحی این تابع هدف مجموع میزان انحرافات است که رتبه‌بندی گروهی گزینه‌ها از مقادیر متناظرش در رتبه‌بندی‌های فردی تصمیم‌گیرندگان دارد. این مجموع متناسب با اوزان اهمیت تصمیم‌گیرندگان و اوزان اهمیت گزینه‌ها به‌ازای هر تصمیم‌گیرنده می‌تواند منعکس‌کننده وضعیت توافقی یک جواب موجه باشد.

پارامترها

K : تعداد تصمیم‌گیرندگان؛

A^k : ماتریس مقایسات زوجی در روش AHP برای تصمیم‌گیرنده‌ی k ؛

a_{ij}^{kU} : حد بالای تعیین شده در بازه ارائه‌شده برای عنصر سطر i ام و ستون j ام ماتریس A^k ؛

a_{ij}^{kL} : حد پایین تعیین شده در بازه ارائه‌شده برای عنصر سطر i ام و ستون j ام ماتریس A^k ؛

WD_k : وزن اهمیتی تصمیم‌گیرنده‌ی k ؛

WA_{ik} : وزن اهمیتی (معیار/گزینه) i ام از نقطه‌نظر تصمیم‌گیرنده‌ی k ؛

L_i^k : مشخصه‌ی اول تابع مثلثی بیان‌گر وزن اهمیت (گزینه/معیار) i ام از نقطه‌نظر تصمیم‌گیرنده k ؛

M_i^k : مشخصه‌ی دوم تابع مثلثی بیان‌گر وزن اهمیت (گزینه/معیار) i ام از نقطه‌نظر تصمیم‌گیرنده k ؛

U_i^k : مشخصه‌ی سوم تابع مثلثی بیان‌گر وزن اهمیت (گزینه/معیار) i ام از نقطه‌نظر تصمیم‌گیرنده k ؛

Rank_i^k : رتبه‌ی (گزینه/معیار) i ام از نقطه‌نظر تصمیم‌گیرنده‌ی k ؛

B : یک مقدار بزرگ که با توجه به ویژگی‌های مدل مقداری متناسبی تلقی می‌شود؛

ε : یک مقدار کوچک که با توجه به ویژگی‌های مدل $1/\varepsilon$ مقداری متناسب تلقی می‌شود.

مفهوم زاویه‌ی بین دو بردار برای دو ماتریس بازه‌ی X و Y قابل تعمیم است به:

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij}^l \cdot y_{ij}^l + x_{ij}^u \cdot y_{ij}^u)}{|X| \cdot |Y|} \quad (70)$$

$$|X| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((x_{ij}^l)^2 + (x_{ij}^u)^2)} \quad (71)$$

$$|Y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((y_{ij}^l)^2 + (y_{ij}^u)^2)} \quad (72)$$

برای تعیین اوزان اهمیتی تصمیم‌گیرندگان، ماتریس $(\gamma_{ij})_{n \times n}$ با استفاده از تعریف ارائه شده در بالا به صورت روابط ۷۳ تا ۷۵ بیان می‌شود. $A^i = [(x_{ij}^l, x_{ij}^u)]_{n \times n}$ بیان‌گر ماتریس مقایسه‌ی زوجی بازه‌ی تصمیم‌گیرنده‌ی i است.

$$\gamma_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (x_{km}^l \cdot x_{km}^l + x_{km}^u \cdot x_{km}^u)}{|A^i| \cdot |A^j|} \quad (73)$$

$$|A^i| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n ((x_{ij}^l)^2 + (x_{ij}^u)^2)} \quad (74)$$

$$|A^j| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n ((y_{ij}^l)^2 + (y_{ij}^u)^2)} \quad (75)$$

در نهایت اوزان اهمیتی تصمیم‌گیرندگان WD_k چنین تعریف می‌شود:

$$WD_k = \frac{\sum_{j=1}^K \gamma_{kj}}{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \gamma_{ij}} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (76)$$

۷.۳.۴. استخراج اوزان اهمیتی گزینه‌ها از نقطه‌نظر تصمیم‌گیرندگان

هدف از این گام استخراج اوزان اهمیتی گزینه‌ها از نقطه‌نظر هر تصمیم‌گیرنده و فراهم‌سازی پیش‌نیازهای لازم برای مدل چندهدفه‌ی پیشنهادی در گام نهایی است. برای استخراج اوزان اهمیت گزینه‌ها دو گزاره را در نظر می‌گیریم:

۱. اوزان اهمیتی گزینه‌ها از نقطه‌نظر هر تصمیم‌گیرنده متناسب با اولویت‌بندی فردی او است، بدین معنا که گزینه‌ی با اولویت بالاتر وزن اهمیتی بالاتری را اتخاذ می‌کند.

۲. تغییرات اوزان اهمیتی گزینه‌ها نسبت به اولویت‌های رتبه‌ی رفتار خطی دارد. این فرض که هریک از تصمیم‌گیرندگان علاقه‌مند است که رتبه‌بندی نهایی (گزینه‌ها/معیارها) مطابق با نظر آن‌ها صورت گیرد، منطبق با واقعیت است. از طرف دیگر اهمیت و حساسیت گزینه‌ها برای هریک از تصمیم‌گیرندگان با ترتیب رتبه‌بندی مورد نظر آن‌ها رابطه‌ی مستقیم دارد. با توجه به گزاره‌های بالا و با استفاده از ماتریس $(T_{ij}^k)_{n \times n}$ که در قسمت رتبه‌بندی فردی با استفاده از تعریف درجه صحت بزرگی استخراج شده است، رابطه‌ی زیر برای تعیین اوزان اهمیتی گزینه‌ها از نقطه‌نظر هریک از تصمیم‌گیرندگان پیشنهاد می‌شود:

$$WA_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^n T_{ij}^k}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n T_{ij}^k} \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, n \quad (77)$$

۸.۳.۴. تبیین مدلی چندهدفه

هدف از این گام، افزایش اطمینان در اوزان استخراجی از طریق دو بعد سازگاری و پایداری در کنار ارتقای پذیرش گروهی از طریق بعد توافقی است. برنامه‌ریزی ریاضی

متغیرها

$$w_i \leq a_{ij}^k \cdot w_j + cd_{ij}^k \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, K \quad (92)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (93)$$

$$w_i, cp_{ij}, cd_{ij}, \text{Rank}_i^g \quad i, j = 1, \dots, n \quad (94)$$

$$\text{Rank}_i^g, w_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (95)$$

$$z_{jk^0}, z_{jk^1}, z_{jk^2}, z_{jk^3}, z_{jk^4} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K \quad (96)$$

$$prd_{ik}, nrd_{ik} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K \quad (97)$$

$$x_{ij}, y_{ij} = \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (98)$$

$$v_{jk^1}, v_{jk^2}, v_{jk^3}, v_{jk^4} = \{0, 1\} \quad (99)$$

تابع هدف اول (رابطه‌ی ۷۸) به دنبال بیشینه‌سازی مجموع مطلوبیت‌های مربوط به پایداری جواب تمام تصمیم‌گیرندگان است، در این تابع، اهمیت تصمیم‌گیرندگان به همراه میزان اهمیت هرگزینه نزد هر تصمیم‌گیرنده به عنوان ضرایب هر مطلوبیت محسوب شده است. تابع هدف دوم (رابطه‌ی ۷۹) به دنبال بیشینه‌سازی میزان توافق گروهی است. این مهم از طریق کمیته‌سازی مجموع انحرافات رتبه‌بندی نهایی با رتبه‌بندی‌های فردی صورت گرفته است. در این رابطه نیز اهمیت تصمیم‌گیرندگان و میزان اهمیت هرگزینه نزد هر تصمیم‌گیرنده به عنوان ضرایب برای مقادیر انحرافات در نظر گرفته شده است. تابع هدف سوم (رابطه‌ی ۸۰) به دنبال بیشینه‌سازی میزان سازگاری قضاوت‌های فردی با اوزان نهایی است که این مهم از طریق کمیته‌سازی میزان ناسازگاری بین قضاوت‌های فردی با اوزان نهایی صورت گرفته است. در این رابطه اهمیت تصمیم‌گیرندگان نیز به عنوان ضرایب میزان ناسازگاری‌ها در نظر گرفته شده است. محدودیت‌های ۸۱-۸۳ نیز جهت خطی‌سازی توابع مطلوبیت مثلثی که توابع قطعه قطعه خطی محسوب می‌شوند، به کار گرفته شده است. محدودیت ۸۳ بیان‌گر متغیرهای SOS۲ (مجموعه‌یی از متغیرهایی که بیشینه دو عضو آن‌ها مقدار غیر صفر اتخاذ می‌کند) است. مجموعه محدودیت‌های ۸۴-۸۹ نیز برای تعیین ترتیب رتبه‌ی اوزان نهایی به کار رفته است. محدودیت ۹۰ نیز مدل‌سازی خطی قدرمطلق تفاوت‌های بین رتبه‌بندی نهایی گزینه‌ها با رتبه‌بندی فردی گزینه‌هاست. محدودیت‌های ۹۱ و ۹۲ نیز بیان‌گر قدرمطلق انحرافات از روابط سازگاری مقایسات زوجی بازه‌ی تصمیم‌گیرندگان است.

۹.۳.۴. حل مدل

هدف از این گام، امکان به تصویر کشیدن سناریوهای مختلف منطبق با سلیقه‌های مختلف تصمیم‌گیرندگان از طریق ترکیب‌های خطی توابع هدف سه‌گانه و پیشنهاد یک مجموعه جواب (جواب‌های پارتو) برای گزینش از سوی تصمیم‌گیرندگان به جای پیشنهاد تنها یک جواب است. رویکرد اصلی این گام، تبدیل مدل چند تابع هدفه به یک مدل تک تابع هدفه است.

مرحله‌ی ۱. مقدار بهینه‌ی هر هدف به‌طور مجزا از سایر اهداف در مواجهه با محدودیت‌ها حل می‌شود. به عبارت دیگر باید مدل‌های زیر حل شود؛ مقادیر X_6^* و X_8^* بهینه متغیرهای تصمیم مدل‌های شماره ۴ تا ۶ را به ترتیب با X_3^* ، X_4^* و X_5^* نمایش می‌دهیم. (مجموعه فضای موجه مدل ۳ را با S نمایش می‌دهیم).

مدل شماره‌ی ۴.

$$M_1 = \max (G_1) \quad (100)$$

$$\text{s.t. } x_i \in S \quad (101)$$

w_i : وزن نهایی (گزینه/معیار) i ام؛

Rank_i^g : رتبه‌ی نهایی (گزینه/معیار) i ام از نقطه‌نظر گروهی؛

$v_{jk^1}, v_{jk^2}, v_{jk^3}, v_{jk^4}$: متغیرهای کمکی صفر و ۱ مورد استفاده برای مدل‌سازی

متغیرهای SOS۲؛

$z_{jk^0}, z_{jk^1}, z_{jk^2}, z_{jk^3}, z_{jk^4}$: متغیرهای کمکی مورد استفاده برای خطی‌سازی

تابع قطعه قطعه خطی؛

x_{ij}, y_{ij} : متغیرهای کمکی صفر و ۱ مورد استفاده برای رتبه‌بندی نهایی گزینه‌ها/

معیارها؛

prd_{ik}, nrd_{ik} : بیان‌گر میزان انحرافات مثبت و منفی رتبه‌بندی گروهی (گزینه/معیار)

i ام از رتبه‌بندی متناظرش در حالت تصمیم‌گیرنده k ؛

cp_{ij}^k, cd_{ij}^k : بیان‌گر میزان انحرافات مثبت و منفی از احتمال‌ترین مقدار عنصر

سطر i ام و ستون j ام ماتریس A^k است؛

cp_{ij}^k : بیان‌گر میزان انحراف منفی از حد پایین عنصر سطر i ام و ستون j ام ماتریس

A^k است؛

cd_{ij}^k : بیان‌گر میزان انحراف مثبت از حد بالا عنصر سطر i ام و ستون j ام ماتریس

A^k است.

$$\max \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K W D_k \cdot z_{jk^2} \cdot W A_{ik} \right) \quad (78)$$

$$\min \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K W D_k \cdot (prd_{ik} + nrd_{ik}) \cdot W A_{ik} \right) \quad (79)$$

$$\min \left(\sum_{i,j} \sum_k W D_k \cdot (cp_{ij}^k + cd_{ij}^k) \right) \quad (80)$$

subject to :

$$w_j - (z_{jk^1} \cdot L_j^k + z_{jk^2} \cdot M_j^k + z_{jk^3} \cdot U_j^k + z_{jk^4}) = 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K \quad (81)$$

$$z_{jk^0} + z_{jk^1} + z_{jk^2} + z_{jk^3} + z_{jk^4} = 1 \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K \quad (82)$$

$$z_{jk^0}, z_{jk^1}, z_{jk^2}, z_{jk^3}, z_{jk^4} \in \text{SOS}^2 \quad (83)$$

$$w_i - w_j + B \cdot x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (84)$$

$$w_i - w_j + B \cdot y_{ij} \geq \varepsilon \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (85)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (86)$$

$$x_{ij} + y_{ji} = 1 \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (87)$$

$$\text{Rank}_i^g - 1 - \sum_{j=1: j \neq i}^n \frac{x_{ij} + y_{ij}}{2} = 0 \quad (88)$$

$$\sum_{i=1}^n \text{Rank}_i^g = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \quad (89)$$

$$\text{Rank}_i^g - \text{Rank}_i^k + prd_{ik} - nrd_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K \quad (90)$$

$$a_{ijL}^k \cdot w_j \leq w_i + cp_{ij}^k \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, K \quad (91)$$

مدل شماره ۵.

$$M_T = \max(G_T) \quad (102)$$

$$\text{s.t. } x_i \in S \quad (103)$$

مدل شماره ۶.

$$M_T = \max(G_T) \quad (104)$$

$$\text{s.t. } x_i \in S \quad (105)$$

مرحله ۲. برای استخراج یک تابع عضویت یک مقدار نه ضرورتاً مطلوب برای هر تابع هدف پیشنهاد داده می‌شود. این مقادیر را می‌توان از روابط ۱۰۲ تا ۱۰۴ استخراج کرد.

$$m_1 = \min(G_1 | X \in \{X_1^*, X_2^*\}) \quad (106)$$

$$M_T = \max(G_2 | X \in \{X_1^*, X_2^*\}) \quad (107)$$

$$M_T = \max(G_3 | X \in \{X_1^*, X_2^*\}) \quad (108)$$

مرحله ۳. تابع عضویت برای هر تابع هدف عبارت است از:

$$\mu_1(f_1(x)) = \frac{f_1(x) - m_1}{M_1 - m_1} = \frac{G_1 - m_1}{M_1 - m_1} \quad (109)$$

$$\mu_i(f_i(x)) = \frac{m_i - G_i}{M_i - m_i} \quad i = 2, 3 \quad (110)$$

مرحله ۴. به جای توابع هدف سه‌گانه در مدل شماره ۳ رابطه ۱۰۶ را جایگزین می‌کنیم:

$$\lambda \min_{i=1,2,3} \mu_i(f_i(x)) + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^3 \mu_i(f_i(x)) \quad (111)$$

برای خطی‌سازی تابع مذکور روابط ۱۰۷ تا ۱۰۹ جایگزین می‌شود.

$$\max \left(\lambda \cdot z + (1 - \lambda) \cdot \sum_{i=1}^3 \mu_i(f_i(x)) \right) \quad (112)$$

$$\text{Subject to:} \quad (113)$$

$$Z \leq \mu_i(f_i(x)) \quad i = 1, 2, 3 \quad (114)$$

در بخش بعد یک مسئله‌ی موجود در ادبیات با روش پیشنهادی حل، و خروجی آن با مقادیر به دست آمده در نوشتار مزبور مقایسه می‌شود. در نهایت روش جدیدی برای اعتبارسنجی خروجی‌ها نمایش داده می‌شود.

۱.۵. تعریف مسئله

یک شرکت چندملیتی به دنبال یک سرمایه‌گذاری است. تعداد پنج گزینه‌ی بالقوه پیش روی این سرمایه‌گذاری است. برای این تصمیم‌گیری کمیته‌ی چهارنفره از اعضای هیئت مدیره تشکیل شده است. هریک از این تصمیم‌گیرندگان از یک ماتریس مقایسه‌ی زوجی برای بیان ترجیحات خود استفاده می‌کند. با توجه به تنوع سلیقه‌ی این تصمیم‌گیرندگان که ریشه در تنوع تخصصی‌شان دارد، هریک از این افراد از یک روش متفاوت برای بیان ترجیحات خود استفاده می‌کند. تصمیم‌گیرندگان به ترتیب با استفاده از روش‌های ماتریس مقایسه‌ی زوجی بازه‌ی معکوس، ماتریس مقایسه‌ی زوجی بازه‌ی مکمل، ماتریس مقایسه‌ی زوجی مبتنی بر متغیرهای زبانی و ماتریس مقایسه‌ی زوجی مبتنی بر اعداد فازی شهودی به بیان ترجیحات خود می‌پردازند. از طرف دیگر با توجه به عدم تسلط هریک از تصمیم‌گیرندگان بر تمام حوزه‌های دانش مورد ارزیابی، بیان مقایسات زوجی به‌طور کامل مقدور نیست و بنابراین ماتریس مقایسات زوجی به‌صورت ناقص بیان می‌شود. ترجیحات تصمیم‌گیرندگان عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} [1, 1] & [\frac{1}{7}, 3] & \phi & [5, 7] & [3, 5] \\ [\frac{1}{7}, 3] & [1, 1] & [1, 3] & \phi & [1, 3] \\ \phi & [1, 3] & [1, 1] & [5, 7] & [1, 3] \\ [\frac{1}{5}, \frac{1}{7}] & \phi & [\frac{1}{7}, \frac{1}{5}] & [1, 1] & \phi \\ [\frac{1}{5}, \frac{1}{7}] & [\frac{1}{7}, 3] & [\frac{1}{7}, 1] & \phi & [1, 1] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [0, 5, 0, 7] & \phi & [0, 4, 0, 6] & [0, 5, 0, 7] & [0, 3, 0, 5] \\ \phi & [0, 5, 0, 5] & [0, 3, 0, 6] & \phi & [0, 5, 0, 8] \\ [0, 4, 0, 6] & [0, 4, 0, 7] & [0, 5, 0, 5] & [0, 6, 0, 8] & \phi \\ [0, 3, 0, 5] & \phi & [0, 2, 0, 4] & [0, 5, 0, 5] & \phi \\ [0, 5, 0, 7] & [0, 2, 0, 5] & \phi & \phi & [0, 5, 0, 5] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [s_2, s_2] & \phi & [s_2, s_5] & [s_2, s_5] & [s_2, s_2] \\ \phi & [s_2, s_2] & \phi & [s_2, s_2] & [s_2, s_2] \\ [s_1, s_2] & \phi & [s_2, s_2] & [s_2, s_2] & [s_2, s_5] \\ [s_1, s_2] & [s_2, s_2] & [s_2, s_2] & [s_2, s_2] & \phi \\ [s_2, s_2] & [s_2, s_2] & [s_1, s_2] & \phi & [s_2, s_2] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (0, 5, 0, 5) & (0, 6, 0, 1) & (0, 8, 0, 2) & (0, 6, 0, 3) & (0, 7, 0, 2) \\ (0, 1, 0, 6) & (0, 5, 0, 5) & (0, 5, 0, 1) & \phi & (0, 6, 0, 1) \\ (0, 2, 0, 8) & (0, 1, 0, 5) & (0, 5, 0, 5) & (0, 4, 0, 6) & \phi \\ (0, 3, 0, 6) & \phi & (0, 6, 0, 4) & (0, 5, 0, 5) & (0, 7, 0, 3) \\ (0, 2, 0, 7) & (0, 1, 0, 6) & \phi & (0, 3, 0, 7) & (0, 5, 0, 5) \end{pmatrix}$$

۲.۵. حل مسئله

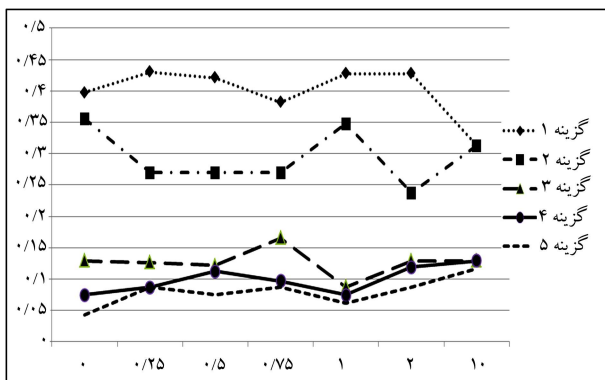
مدل چندهدفه‌ی ۳ با استفاده از خروجی‌های گام‌های هفت‌گانه قبل ساخته شده و با استفاده از تابع هدف تعریف شده (رابطه ۱۱۲) و شکل خطی‌سازی شده آن به‌ارزای مقادیر متفاوت λ حل شده است. نتایج مربوطه در جدول ۱ (به‌ارزای مقادیر صفر تا ۱ با فواصل ۰/۱ برای γ) نمایش داده شده است. در حقیقت هر مقدار γ می‌تواند متناظر با سطوح متفاوت ریسک‌پذیری تصمیم‌گیرندگان باشد. چنان که

۵. نتایج محاسباتی

در این بخش ابتدا برای روشن‌سازی هرچه بهتر گام‌های روش پیشنهادی، مثالی برگرفته از ادبیات موضوع با استفاده از روش پیشنهادی حل و با مقادیر به دست آمده در نوشتار مزبور مقایسه شده است. در ادامه ضمن تحلیل حساسیت مثال مذکور به اعتبارسنجی مدل مربوط با دو رویکرد متفاوت خواهیم پرداخت.

جدول ۱. اوزان پیشنهادی روش ارائه شده به‌ازای سناریوهای مختلف.

λ	مقادیر توابع عضویت اهداف سه‌گانه			اوزان استخراجی از هر سیاست		
۰٫۱ - ۰	۰٫۹۸۸	۰٫۹۸۰	۰٫۷۵۲	۰٫۱۱۹۰	۰٫۱۲۹۰	۰٫۲۶۹۷
۰٫۲	۰٫۹۸۷	۰٫۹۸۱	۰٫۷۵۲	۰٫۱۱۷۱	۰٫۱۲۷۱	۰٫۲۶۹۷
۰٫۳ - ۱	۰٫۹۸۴	۰٫۹۸۴	۰٫۷۵۲	۰٫۱۱۲۱	۰٫۱۲۲۱	۰٫۲۶۹۷



شکل ۱. تحلیل حساسیت اوزان نهایی گزینه‌ها و رتبه‌بندی نهایی آن‌ها نسبت به پارامتر ضریب تعدیل λ .

۱.۶. رویکرد اول

در این رویکرد، اعتبارسنجی مدل از طریق بررسی عملکرد مدل پیشنهادی در حل مسائل طرح شده در مقالات تقریباً مشابه موجود در ادبیات، و مقایسه آن با مقادیر استخراجی مقالات مزبور صورت می‌گیرد. در انتخاب مسائل تنوع مبنای گزینش قرار گرفته است. در جدول ۲ تنوع مسائل حل شده براساس مشخصات کلیدی آن‌ها نشان داده شده است. در جدول ۳، نتایج حاصل از به‌کارگیری روش پیشنهادی در حل این مسائل نمایش داده شده است. در ادامه به تشریح بیشتر نتایج می‌پردازیم. قابل ذکر است مقادیر خروجی مدل پیشنهادی براساس $\gamma = 0.5$ استخراج شده است.

۱.۱.۶. مقایسه با پژوهش دوپازو و همکاران

دوپازو و همکاران (۲۰۱۴) مدلی جدید برای استخراج بردار اولویت گروهی از ماتریس‌های مقایسه‌ی زوجی فازی ارائه داده‌اند. مدل مذکور برای استخراج بردار اولویت‌ها نگاه ویژه‌ی به بحث سازگاری داشته است. چنان‌که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، مقدار متناظر با تابع هدف سازگاری روش پیشنهادی به‌ازای جواب پیشنهادی مدل دوپازو از شرایط بسیار مطلوبی برخوردار است. این در حالی است که جواب‌های پیشنهادی این مدل از نقطه‌نظر توافق گروهی و پایداری در مقایسه با خروجی مدل پیشنهادی از سطح نامطلوبی برخوردارند.

۲.۱.۶. مقایسه با پژوهش ژو

ژو در سال ۲۰۱۲ روشی مبتنی بر سازگاری ارائه کرد. اوزان استخراجی به‌ازای به‌کارگیری روش پیشنهادی او (۰٫۲۲۱۴، ۰٫۱۵۷۸، ۰٫۱۲۷۲، ۰٫۲۰۱۵، ۰٫۲۹۲۱) است. مقادیر توابع هدف سه‌گانه در مدل پیشنهادی ما متناظر با این اوزان و به‌ترتیب برابر با ۰٫۷۵۲۶، ۱، ۰٫۹۶۳۷۵ است. این مقادیر نشان می‌دهد که جواب مزبور از نقطه‌نظر توافق گروهی با مطلوب‌ترین رتبه‌بندی ممکن منطبق است و از نقطه‌نظر شاخص سازگاری هم که محور اصلی استخراج اوزان بوده است در شرایط مطلوبی قرار دارد. این در حالی است که جواب استخراجی از نقطه‌نظر شاخص پایداری در مقایسه با جواب پیشنهادی مدل ما مطلوب نیست. در مجموع خروجی مدل

مشاهده می‌شود، رتبه‌بندی نهایی گزینه‌ها در تمام حالات مذکور مطابق است با:

$$X_1 \succ X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_5 \quad (115)$$

۳.۵. مقایسه با خروجی پژوهش ژانگ و گیو

ژانگ و گیو (۲۰۱۴) روشی پیشنهادی با رویکرد توافقی - سازگاری ارائه داده‌اند. خروجی روش پیشنهادی آن‌ها (۰٫۴۵۰۵، ۰٫۱۳۱۹، ۰٫۱۹۷۸، ۰٫۹۸۹، ۰٫۱۲۰۹) است. حال مقادیر توابع هدف سه‌گانه‌ی پیشنهادی روش ارائه شده به‌ازای این جواب به‌ترتیب ۰٫۶۷۲۲۹، ۰٫۶۲۸۲۷، ۰٫۹۸۴۱۷ است. مطابق انتظار، شاخص سازگاری تا حد مطلوبی در این روش برآورده شده است. از نقطه‌نظر شاخص توافقی نیز با وجود مقدار عددی ظاهراً پایین قابل پذیرش است، چرا که این شاخص مستقیماً مرتبط به رتبه‌بندی نهایی گزینه‌هاست که در رویکرد ژانگ و گو در مقایسه با روش پیشنهادی ما تفاوت تنها بر سر دو رتبه پایانی است. این در حالی است که جواب نهایی از نقطه‌نظر شاخص پایداری در مقایسه با جواب‌های روش پیشنهادی ما قابل رقابت نیست و در وضعیت نامطلوب قرار دارد.

۴.۵. تحلیل حساسیت

پارامتر ضریب تعدیل γ در گام چهارم برای استخراج مؤلفه‌های اول و سوم توابع فازی مثلثی به کار رفته است. با توجه به این که در روش پیشنهادی خروجی این گام به‌طور مستقیم به‌عنوان ورودی در گام‌های آتی روش به کار می‌رود، این پارامتر گزینه‌ی مناسبی برای تحلیل حساسیت محسوب می‌شود. تحلیل حساسیت این پارامتر به‌ازای مقادیر گسسته‌ی ۰٫۲۵، ۰٫۵، ۰٫۷۵، ۱ و ۲ صورت گرفته و برای بررسی جامع‌تر در حالت حدی در نظر گرفته شده است. یک حالت به‌ازای یک مقدار بزرگ برای γ (مقدار ۱۰) و حالت دیگر به‌ازای کوچک‌ترین مقدار ممکن برای پارامتر γ (مقدار صفر) است. رتبه‌بندی گزینه‌ها به‌همراه مقادیر اوزان استخراجی به‌ازای هر مقدار γ در شکل ۱ نمایش داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود به‌ازای تمام مقادیر γ رتبه‌بندی گزینه‌ها تغییری نداشته است. این تحلیل حساسیت می‌تواند ابزار مدیریت مناسبی برای گزینش و رتبه‌بندی نهایی قلمداد شود.

۶. اعتبارسنجی خروجی مدل پیشنهادی

در روش‌های تصمیم‌گیری گروهی در شاخه‌ی تصمیم‌گیری‌های انسانی در شرایط عدم اطمینان همواره عدم وجود شاخص‌های منحصر به فردی که اعتبارسنجی روش‌های مذکور را امکان‌پذیر سازد، چالش بزرگ حوزه‌ی تصمیم‌گیری تلقی می‌شود. این چالش عمل مقایسه و سنجش خروجی روش‌های متفاوت را به تعبیری غیرممکن ساخته است. از این رو در این بخش اعتبارسنجی مدل با دو رویکرد مختلف انجام شده است. در رویکرد اول مدل پیشنهادی با مدل‌های تقریباً مشابه موجود در ادبیات مقایسه شده و در رویکرد دوم با پیشنهاد یک روش جدید به اعتبارسنجی مدل پرداخته‌ایم.

جدول ۲. تنوع مثال‌های استخراجی از ادبیات موضوع برای به‌کارگیری روش پیشنهادی.

ویژگی‌های مسائل	مسئله ۱ دوپازو و همکاران (۲۰۱۴)	مسئله ۲ ژو (۲۰۱۲)	مسئله ۳ ژو و کای (۲۰۱۴)	مسئله ۴ ژانگ و گو (۲۰۱۴)
نوع بیان ترجیحات	عدم اطمینان	قطعی	عدم اطمینان	عدم اطمینان
تعداد تصمیم‌گیرندگان	۴	۷	۴	۴
ناقص یا کامل بودن ماتریس ورودی	کامل	کامل	کامل - ناقص	ناقص

جدول ۳. مقایسه‌ی مدل پیشنهادی با مدل‌های مشابه موجود در ادبیات.

مقادیر استخراجی	مسئله ۱ دوپازو و همکاران (۲۰۱۴)	مسئله ۲ یو (۲۰۱۲)	مسئله ۳ ژو و کای (۲۰۱۴)	مسئله ۴ ژانگ و گو (۲۰۱۴)
پژوهش	(۰/۱۴، ۰/۲۱، ۰/۳۲، ۰/۳۲)	(۰/۲۲۱۴، ۰/۱۵۷۸، ۰/۱۲۷۲، ۰/۲۰۱۵، ۰/۲۹۲۱)	(۰/۱۱۲۵، ۰/۱۱۵۵، ۰/۲۴۱۳، ۰/۵۳۰۷)	(۰/۳۵۱۹، ۰/۲۳۴۶، ۰/۱۰۵۷، ۰/۳۰۷۸)
پیشنهادی	(۰/۱۱۰۲، ۰/۱۳۱۸، ۰/۳۴۱۳، ۰/۴۱۶)	(۰/۳۶۷۵، ۰/۲۰۴۴، ۰/۸۸۵، ۰/۱۰۹۳، ۰/۲۳۰۳)	(۰/۶۱۴۸، ۰/۲۱۳۵، ۰/۰۹۸۰، ۰/۷۳۸)	(۰/۳۰۵۱، ۰/۲۳۱۷، ۰/۲۳۱۷، ۰/۲۳۱۷)
پژوهش	(۰/۵۴۵۷، ۰/۵۳۸۲، ۰/۹۹۸۶)	(۰/۵۲۶۱، ۱، ۰/۹۶۳۸)	(۰/۷۰۰۹، ۱، ۰/۸۷۴۸)	(۰/۰۰۱۷، ۰/۴۱۹۶، ۰/۹۴۵۹)
پیشنهادی	(۰/۹۹۶۷، ۱، ۰/۹۸۴۰)	(۱، ۱، ۰/۹۹۳)	(۰/۹۶۷، ۱، ۰/۹۵۶)	(۰/۲۱۸، ۰/۹۸۰، ۰/۹۸۹)
پژوهش	(۱/۵، ۱/۵، ۳، ۴)	(۱، ۳، ۵، ۴، ۲)	(۴، ۳، ۲، ۱)	(۱، ۳، ۴، ۲)
پیشنهادی	(۱، ۲، ۳، ۴)	(۲، ۴، ۵، ۳، ۱)	(۴، ۳، ۲، ۱)	(۳، ۳، ۳، ۱)

تصمیم‌گیرندگان در عدم دست‌یابی به مقادیر مطلوب پایداری غیرقابل انکار است اما، همچنان جواب‌های استخراجی روش پیشنهادی ما در وضعیت به مراتب مطلوب‌تری نسبت به مقادیر متناظر نوشتار مزبور قرار دارد. در مجموع خروجی مدل پیشنهادی توانسته است در تمامی شاخص‌ها خروجی این نوشتار را در این مثال مغلوب کند.

۲.۶. رویکرد دوم

در این بخش سعی شده با رویکردی جدید به اعتبارسنجی روش پیشنهادی پردازیم. رویکرد پیشنهادی مبتنی است بر یکی از شاخص‌ترین پارادوکس‌های موجود در روش‌های متداول تصمیم‌گیری که «وارونگی رتبه‌ی»^۸ نام دارد. با توجه به انواع تعریف‌های وارونگی که در ادبیات موضوع موجود است، سناریوهای متنوعی تعریف شده و مطابق با هر سناریو تغییرات لازم در مسئله‌ی اصلی اعمال شده و آن را با روش تصمیم‌گیری گروهی پیشنهادی خود حل می‌کنیم. این سناریوها عبارت‌اند از:

سناریو ۱. فرض کنید گزینه‌ی بی که هیچ ارجحیتی بر هیچ‌یک از گزینه‌های موجود تصمیم‌گیری ندارد، به مجموعه‌ی گزینه‌ها افزوده شود. چه تغییری در رتبه‌بندی گزینه‌ها خواهیم داشت؟

سناریو ۲. فرض کنید گزینه‌ی بی که بر تمام گزینه‌های موجود تصمیم‌گیری ارجحیت دارد، به مجموعه‌ی گزینه‌ها افزوده شود. چه تغییری در رتبه‌بندی گزینه‌ها خواهیم داشت؟

سناریوهای ۳-۷. اگر فرضاً یک گزینه از میان گزینه‌های موجود تصمیم‌گیری حذف شود، چه تغییری در رتبه‌بندی گزینه‌های باقی‌مانده خواهیم داشت؟

نتایج حاصل از به‌کارگیری رویکرد پیشنهادی در اعتبارسنجی مسئله‌ی موردی بخش نتایج محاسباتی در جدول ۴ ارائه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، ترتیب

پیشنهادی توانسته است در تمامی شاخص‌ها خروجی این روش را در این مثال مغلوب کند.

۳.۱.۶. مقایسه با پژوهش ژو و کای

ژو و کای^[۳۷] در پژوهش خود روشی مبتنی بر سازگاری ارائه داده‌اند. اوزان استخراجی به‌ازای به‌کارگیری روش پیشنهادی آن‌ها (۰/۵۱۹، ۰/۲۳۶، ۰/۱۱۳، ۰/۱۱۰) است. با توجه به این که این اوزان با استفاده از عملگر تجمیع ترتیبی اعمال شده بر روی اوزان بازه‌ی به دست آمده است، از این رو محدودیت مجموع اوزان برابر با ۱ را برآورده نمی‌کند. بنابراین در مرحله اول نیاز است بردار اوزان نرمال شود. بردار تبدیل یافته اوزان (۰/۵۳۰۷، ۰/۵۳۰۷، ۰/۲۴۱۳، ۰/۱۱۲۵) خواهد شد. مقادیر توابع هدف سه گانه پیشنهادی روش ارائه شده ما به‌ازای این جواب به ترتیب ۰/۷۰۰۸۸، ۱، ۰/۸۷۴۸ است که نشان می‌دهد جواب مزبور از نقطه‌نظر ترتیب رتبه‌ی گزینه‌ها کاملاً منطبق با مطلوب‌ترین رتبه‌بندی است. از نقطه‌نظر شاخص سازگاری هم مطابق انتظار، وضعیت مناسبی دارد. این در حالی است که از نقطه‌نظر شاخص پایداری به نسبت دو شاخص دیگر در مطلوبیت پایین‌تری قرار دارد. در مجموع خروجی مدل پژوهش پیشرو توانسته است در تمامی شاخص‌ها خروجی این نوشتار را در این مثال مغلوب کند.

۴.۱.۶. مقایسه با پژوهش ژانگ و گو

خروجی روش پیشنهادی ژانگ و گو (۲۰۱۴) که روشی مبتنی بر دو شاخص سازگاری و توافق گروهی است، (۰/۳۰۷۸، ۰/۱۰۵۷، ۰/۲۳۴۶، ۰/۳۵۱۹) است. مقادیر توابع هدف سه گانه پیشنهادی روش ارائه شده ما به‌ازای این جواب به ترتیب ۰/۰۱۷، ۰/۴۱۹۵۶، ۰/۹۴۵۸۹ است. مطابق انتظار، شاخص سازگاری تا حد مطلوبی در این روش برآورده شده است. از نقطه‌نظر شاخص توافقی نیز از مقدار مطلوب آن فاصله دارد. از طرف دیگر وضعیت کاملاً نامطلوب شاخص پایداری در جواب‌های پیشنهادی ژانگ و گو کاملاً مشهود است. تأثیر تعارض میان ترجیحات

جدول ۴. اعتبارسنجی مدل در مقابل وارونگی رتبه‌یی.

عنوان	رتبه‌بندی گزینه‌ها						مقادیر اوزان گزینه‌ها					
	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۶	۵	۴	۳	۲	۱
مسئله‌ی اصلی	-	۵	۴	۳	۲	۱	-	۰/۰۷۵	۰/۱۱۲	۰/۱۲۲	۰/۲۷۰	۰/۴۲۱
سناریو ۱	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰/۰۵۶	۰/۰۶۶	۰/۰۶۶	۰/۱۴۰	۰/۲۵۳	۰/۴۱۹
سناریو ۲	۱	۵/۵	۵/۵	۴	۳	۲	۰/۳۱۶	۰/۰۶۶	۰/۰۶۶	۰/۱۰۰	۰/۱۸۲	۰/۲۷۰
سناریو ۳	-	-	۴	۳	۲	۱	-	-	۰/۱۱۳	۰/۱۶۳	۰/۲۵۶	۰/۴۶۸
سناریو ۴	-	۴	-	۳	۲	۱	-	۰/۱۰۹	-	۰/۱۴۳	۰/۲۴۴	۰/۵۰۴
سناریو ۵	-	۳	۴	-	۲	۱	-	۰/۱۷۶	۰/۰۹۷	-	۰/۲۸۶	۰/۴۴۱
سناریو ۶	-	۳	۴	۲	-	۱	-	۰/۱۲۱	۰/۰۵۰	۰/۳۴۷	-	۰/۴۸۳
سناریو ۷	-	۴	۳	۱/۵	۱/۵	-	-	۰/۰۸	۰/۲۰۰	۰/۳۶۰	۰/۳۶۰	-

رتبه‌بندی‌ها در اکثر سناریوهای تعریف شده با رتبه‌بندی مسئله‌ی اصلی سازگار است.

۵. فرض ناقص بودن ماتریس مقایسات زوجی؛

۶. استخراج اوزان اهمیت تصمیم‌گیرندگان؛

۷. استخراج اوزان اهمیت گزینه‌ها از نقطه‌نظر هر تصمیم‌گیرنده؛

۸. پیشنهاد یک مجموعه جواب (جواب‌های پارتو) برای گزینش از سوی تصمیم‌گیرندگان به‌جای پیشنهاد تنها یک جواب؛

۹. ارائه‌ی یک رویکرد جدید برای اعتبارسنجی روش پیشنهادی تصمیم‌گیری گروهی.

فراهم‌سازی الگوریتم‌هایی برای اصلاح درایه به درایه ماتریس‌های مقایسات زوجی که حد مشخصی از شاخص سازگاری را فراهم نمی‌کنند از طریق شناسایی و اصلاح کم‌ترین تعداد قضاوت‌های موجود، حوزه‌ی مناسبی برای پژوهش‌های آینده تلقی می‌شود. امروزه متدهای جمع‌آوری اطلاعات حوزه‌ی دیگری از ادبیات موضوع تصمیم‌گیری گروهی را تشکیل می‌دهند. این در حالی است که با وجود وابستگی مشهود این حوزه با متدهای کمی تصمیم‌گیری گروهی، اما شاهد هستیم این دو حوزه به‌صورت موازی از هم گسترش می‌یابند. بنابراین پیشنهاد می‌شود مطالعه‌ی توأم این دو حوزه می‌تواند در تحقیقات آتی مورد توجه قرار گیرد.

۷. نتیجه‌گیری و مطالعات آتی

در این مطالعه روشی برای استخراج اوزان اهمیتی گزینه‌ها (معیارها) در مسئله‌ی تصمیم‌گیری گروهی -- در شرایط عدم اطمینان با فرض اشکال متفاوت بیان ترجیحات و با فرض ناقص بودن روابط ترجیحی در قالب ماتریس‌های مقایسات زوجی -- ارائه شده که بر مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی استوار است. ویژگی‌های روش پیشنهادی به‌طور خلاصه عبارت است از:

۱. کاهش میزان اتلاف اطلاعاتی؛

۲. تعریف توابع هدف چندگانه در استخراج اوزان؛

۳. توجه به پایداری اوزان نهایی؛

۴. فرضیات اشکال متفاوت بیان ترجیحات؛

پانویس‌ها

- group consensus
- incomplete preference relation
- interval multiplicative preference relation
- interval fuzzy preference relation
- interval-valued linguistic preference relation
- interval preference sequence
- intuitionistic fuzzy preference relation
- rank reversal

منابع (References)

- Yue, Z. "An intuitionistic fuzzy projection-based approach for partner selection", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(23), pp. 9538-9551 (2013).
- Yue, Z. "A group decision making approach based on aggregating interval data into interval-valued intuitionistic fuzzy information". *Applied Mathematical Modelling*, **38**(2), pp. 683-698 (2014).
- Torabi, S. and Rafei, H. "An optimization framework towards prioritization in fuzzy comparison matrices", *Expert Systems with Applications*, **39**(1), pp. 638-646 (2012).
- Dopazo, E., Lui, K., Chouinard, S. and Guisse, J. "A parametric model for determining consensus priority vectors from fuzzy comparison matrices", *Fuzzy Sets and Systems*, **246**, pp. 49-61 (2014).
- Huang, Y.-S. Chang, W.-C., Li, W.-H. and Lin, Z.-L. "Aggregation of utility-based individual preferences for group decision-making", *European Journal of Operational Research*, **229**(2), pp. 462-469 (2013).

6. Coch, L. and French Jr, J.R. "Overcoming resistance to change", *Human Relations*, **1**(4), pp. 512-532 (1948).
7. Harary, F. "On the measurement of structural balance", *Behavioral Science*, **4**(4), pp. 316-323 (1959).
8. DeGroot, M.H. "Reaching a consensus", *Journal of the American Statistical Association*, **69**(345), pp. 118-121 (1974).
9. French, S. "Consensus of opinion", *European Journal of Operational Research*, **7**(4), pp. 332-340 (1981).
10. Lehrer, K. and Wagner, C., *Rational Consensus in Science and Society: A Philosophical and Mathematical Study*, Springer, Science and Business Media, **24** (1981).
11. Ragade, R.K. "Fuzzy sets in communication systems and in consensus formation systems", *Cybernetics and System*, **6**(1-2), pp. 21-38 (1976).
12. Loewer, B. "Special issue on consensus", *Synthese*, **62**(1), pp. 1-1(1985).
13. Kacprzyk, J. and Fedrizzi, M. "Soft'consensus measures for monitoring real consensus reaching processes under fuzzy preferences". *Control and Cybernetics*, **15**(3-4), pp. 309-323 (1986).
14. Kacprzyk, J. and Fedrizzi, M. "A 'soft' measure of consensus in the setting of partial (fuzzy) preferences", *European Journal of Operational Research*, **34**(3), pp. 316-325 (1988).
15. Kacprzyk, J. and Fedrizzi, M. "A 'human-consistent' degree of consensus based on fuzzy logic with linguistic quantifiers", *Mathematical Social Sciences*, **18**(3), pp. 275-290 (1989).
16. Herrera-Viedma, E., Herrera, F. and Chiclana, F. "A consensus model for multiperson decision making with different preference structures", *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on*, **32**(3), pp. 394-402 (2002).
17. Delgado, M., Herrera, F., Herrera-Viedma, E. and Martinez, L. "Combining numerical and linguistic information in group decision making", *Information Sciences*, **107**(1), pp. 177-194 (1998).
18. Espinilla, M., Palomares, I., Martinez, L. and Ruan, D. "A comparative study of heterogeneous decision analysis approaches applied to sustainable energy evaluation", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **20**(supp01), pp. 159-174 (2012).
19. Fan, Z.-P., Ma, J., Jiang, Y.P., Sun, Y.H. and Ma, L. "A goal programming approach to group decision making based on multiplicative preference relations and fuzzy preference relations", *European Journal of Operational Research*, **174**(1), pp. 311-321 (2006).
20. Li, D.-F., Huang, Z.-G. and Chen, G.-H. "A systematic approach to heterogeneous multiattribute group decision making", *Computers & Industrial Engineering*, **59**(4), pp. 561-572 (2010).
21. Pérez, I.J., Cabrerizo, F.J. and Herrera-Viedma, E. "A mobile group decision making model for heterogeneous information and changeable decision contexts", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **19**(supp01), pp. 33-52 (2011).
22. Herrera, F., Martinez, L. and Sánchez, P.J. "Managing non-homogeneous information in group decision making", *European Journal of Operational Research*, **166**(1), pp. 115-132 (2005).
23. Dong, Y., Xu, Y. and Yu, S. "Linguistic multiperson decision making based on the use of multiple preference relations", *Fuzzy Sets and Systems*, **160**(5), pp. 603-623 (2009).
24. Fan, Z.-P. and Zhang, Y. "A goal programming approach to group decision-making with three formats of incomplete preference relations", *Soft Computing*, **14**(10), pp. 1083-1090 (2010).
25. Xu, Y., Patnayakuni, R. and Wang, H. "Logarithmic least squares method to priority for group decision making with incomplete fuzzy preference relations", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(4), pp. 2139-2152 (2013).
26. Xu, Y. and Wang, H. "Eigenvector method, consistency test and inconsistency repairing for an incomplete fuzzy preference relation", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(7), pp. 5171-5183 (2013).
27. Zhang, Z. and Guo, C. "An approach to group decision making with heterogeneous incomplete uncertain preference relations", *Computers & Industrial Engineering*, **71**, pp. 27-36 (2014).
28. Saaty, T.L. and L.G. Vargas, "Uncertainty and order in the analytic hierarchy process", *European Journal of Operational Research*, **32**(1), pp.107-117 (1987).
29. Wang, Y.M., Yang, J.B. and Xu, D.L. "A two-stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices", *Fuzzy sets and systems*, **152**(3), pp.475-498 (2005).
30. Xu, Z. "On compatibility of interval fuzzy preference relations", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **3**(3), pp. 217-225 (2004).
31. Xu, Z. and Chen, J. "Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations", *European Journal of Operational Research*, **184**(1), pp. 266-280 (2008).
32. Xu, Z. "A survey of preference relations", *International Journal of General Systems*, **36**(2), pp. 179-203 (2007).
33. Gao, C.-Y. and Peng, D.-H. "Consolidating SWOT analysis with nonhomogeneous uncertain preference information", *Knowledge-Based Systems*, **24**(6), pp. 796-808 (2011).
34. Zhu, J., *Theory and Approaches of Unascertained Group Decision-Making*, CRC Press (2012).
35. XU, Z.-S. "Approaches to multiple attribute decision making with intuitionistic fuzzy preference information", *Systems Engineering-Theory & Practice*, **27**(11), pp. 62-71 (2007).
36. Tatina, S. and Eshghi, K. "A robust model for an interval AHP", *Sharif Journal of Science and Research*, **26**(1), pp. 65-81 (2009).
37. Xu, Z. and Cai, X. "Deriving weights from interval multiplicative preference relations in group decision making", *Group Decision and Negotiation*, **23**(4), pp. 695-713 (2014).